Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: https://modelling.semnan.ac.ir/

ISSN: 2783-2538



Research Article

Expected value of some vertex degree based graph invariants of some inhomogeneous random bipartite graphs

Sara Samaie[a],Ali Iranmanesh[b,*] , Abolfazl Tehranian[a], Mohammad Ali Hosseinzadeh[c]

[a]*Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran*
[b]*Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran*
[c]*Faculty of Engineering Modern Technologies, Amol University of Special Modern Technologies, Amol, Iran*

UNCORRECTED PROOF

PAPER INFO

Paper history:

Received: 2022-03-13
Revised: 2022-05-12
Accepted: 2022-10-19

Keywords:

First Zagreb index;
Second Zagreb index;
Forgotten index;
Probabilistic matrix;
Inhomogeneous bipartite random graph.

ABSTRACT

Recently, random graph theory has been extensively applied in biological networks, chemical networks, and physical processes. They can provide meaningful insights into the structure of a network. Numerous studies have been conducted on studying degree based graph and investigating their properties, among which the first Zagreb index, the second Zagreb index, and the Forgotten index are the most important ones. In this paper, we focus on investigating graph invariants for inhomogeneous bipartite random graphs. Accordingly, we first compute the expected value of the first Zagreb index, the second Zagreb index and the forgotten topological index for inhomogeneous bipartite random graphs. Furthermore, by establishing upper and lower bounds for the probabilities of edge occurrences, the expected value bounds for these indices in inhomogeneous bipartite random graphs are determined. These analyses contribute to a better understanding of the properties of random graphs.

DOI: https://doi.org/

© 2024 Published by Semnan University Press.
This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

*** Corresponding author.**
E-mail address: iranmanesh@modares.ac.ir

How to cite this article:

مقاله پژوهشی

امید ریاضی برخی پایاهای گرافی مبتنی بر درجات رئوس برای گراف‌های تصادفی دوبخشی ناهمگن

سارا سمائی[۱]، علی ایرانمنش[۲و*]، ابوالفضل تهرانیان[۳]، محمد علی حسین زاده[۴]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۲۰
بازنگری مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۲۰
پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۷/۱۵

واژگان کلیدی:
شاخص زاگرب نوع اول،
شاخص زاگرب نوع دوم،
شاخص فرگاتن،
ماتریس احتمالاتی،
گراف دوبخشی تصادفی
ناهمگن.

چکیده

اخیرا موضوع گراف‌های تصادفی به طور گسترده در شبکه‌های بیولوژیکی، شبکه‌های شیمیایی و فرایندهای فیزیکی مورد استفاده قرار گرفته است. آنها می‌توانند بینش معناداری در مورد ساختار یک شبکه به ما ارائه دهند. تحقیقات متعددی در زمینه مطالعه پایاهای گرافی مبتنی بر درجه و بررسی خواص آنها صورت گرفته است که از جمله مهمترین آنها، شاخص زاگرب نوع اول، شاخص زاگرب نوع دوم و شاخص فرگاتن می‌باشند. در این مقاله به بررسی پایاهای گرافی برای گراف‌های تصادفی دوبخشی ناهمگن می‌پردازیم. در همین راستا، ابتدا به محاسبه امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول، شاخص زاگرب نوع دوم و شاخص فرگاتن گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن می‌پردازیم. همچنین با تعیین کران‌های بالا و پایین برای احتمالات وقوع یال‌ها، حدود امید ریاضی برای این شاخص‌ها در گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن مشخص می‌شوند. این تحلیل‌ها به درک بهتر از خصوصیات گراف‌های تصادفی کمک می‌کنند.

DOI: https://doi.org/

© 2024 Published by Semnan University Press.
This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

۱-مقدمه[۱]

فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. گراف تصادفی $G(n,p)$ گرافی است با n راس که در آن هر یال به طور مستقل با احتمال p رخ می‌دهد که p عددی بین صفر و یک می‌باشد [۱، ۲].

گراف دوبخشی تصادفی $G(X,Y)$، شامل دو مجموعه متمایز از رئوس مانند X و Y است بطوریکه در آن هر راس از X را به هر راس از Y به طور مستقل با احتمال p وصل می‌کنیم که p عددی بین صفر و یک است [۳].
توجه کنید اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه مجموعه $[n]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[n] := \{1, \ldots, n\}$$

در این مقاله G را یک گراف دوبخشی تصادفی بدون حلقه و بدون یال‌های چندگانه در نظر می‌گیریم. همچنین برای هر راس v درجه آن راس را با نماد d_v نشان می‌دهیم.

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: iranmanesh@modares.ac.ir
۱. دانشجو دکتری، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانشکده علوم و فناوری همگرا، گروه ریاضی
۲. استاد تمام، تهران، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض
۳. استاد تمام، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانشکده علوم و فناوری همگرا، گروه ریاضی
۴. استاد یار، آمل، دانشگاه تخصصی فناوری‌های نوین آمل، دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین

استناد به این مقاله: نحوه استناد فارسی در اینجا درج گردد.

UNCORRECTED PROOF

برای گراف دوبخشی $G(X,Y)$ ماتریس مجاورت به صورت $R=[S_{ij}]$ است، بطوریکه S_{ij} مولفه سطر i–ام و ستون j –ام می‌باشد.

$$R=\begin{bmatrix} 0_{n_1n_1} & S \\ S^T & 0_{n_2n_2} \end{bmatrix}$$

اگر $\{x_i,y_j\}\in E(G)$ آنگاه $S_{ij}=1$ و درغیراینصورت $S_{ij}=0$ است بطوریکه $x_i\in X$ و $y_j\in Y$. چون G یک گراف غیرجهتدار است، پس $S_{ij}=S_{ji}$. بلوک S یک ماتریس $n_1\times n_2$ است و $0_{n_1n_1}$ و $0_{n_2n_2}$ ماتریس‌های صفر هستند.

یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن $G(n_1,n_2,p_n,f)$ را چنین تعریف می‌کنیم که

$$Pr(S_{ij}=1)=p_n f_{ij}$$

بطوریکه $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ نشان دهنده اندیس رئوس می‌باشد و $f=(f_{ij})$ یک بردار با مولفه‌های f_{ij} از اعداد بین صفر و یک است که نشان‌دهنده‌ی وزن احتمالاتی هر یال می‌باشد و داریم $f_{ij}=f_{ji}$. همچنین $p_n\in[0,1]$ نشان دهنده یک ضریب احتمالاتی ثابت برای وجود یک یال است. هر S_{ij} یک متغیر تصادفی نظیر وجود یا عدم وجود یک یال در ماتریس مجاورت گراف تصادفی می‌باشد، بطوریکه متغیرهای تصادفی S_{ij} برای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ مستقل هستند [۴].

اگر برای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$، f_{ij} ثابت باشند، $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف تصادفی دوبخشی اردش-رنی است. برای یک بردار غیر ثابت f، $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف تصادفی اردش-رنی ناهمگن است.

منظور از یک شاخص توپولوژیکی، یک کمیت عددی است که بطور منحصر به فرد برای یک گراف تعیین می‌شود و همچنین تحت ایزومورفیسم گراف بدون تغییر باقی می‌ماند. در شیمی، شاخص‌های توپولوژیکی گراف به طور گسترده‌ای به عنوان توصیف کننده مولکولی استفاده می‌شوند [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰]. شاخص زاگرب نوع اول M_1 در هر گراف برابر مجموع درجه رئوس دو سر هر یال گراف است. شاخص زاگرب نوع دوم M_2 برابر مجموع حاصلضرب درجه رئوس دو سر هر یال گراف است [۵]. بنابراین برای گراف دلخواه G به صورت زیر خواهیم داشت:

$$M_1(G)=\sum_{\{x,y\}\in E(G)} d_x+d_y=\sum_{u\in V(G)} d_u^2,$$

$$M_2(G)=\sum_{\{x,y\}\in E(G)} d_x d_y.$$

همچنین شاخص فرگاتن [۱۱] برای گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(G)=\sum_{\{x,y\}\in E(G)} d_x^2+d_y^2=\sum_{u\in V(G)} d_u^3.$$

امید ریاضی را برابر با حد متوسط یا به عبارتی میانگین مقادیری که متغیر تصادفی اختیار می‌کند، تعریف می‌کنند. امید ریاضی یک متغیر تصادفی مانند H را با $\mathrm{E}[H]$ نشان می‌دهیم. اگر H و K دو متغیر مستقل باشند، آنگاه داریم

$$\mathrm{E}[HK]=\mathrm{E}[H]\mathrm{E}[K].$$

یکی از موضوعات پرطرفدار در مطالعه شاخص‌های توپولوژیکی، تعیین کران این شاخص‌ها و مطالعه ویژگی‌های گسسته آنهاست. همچنین تحلیل‌های عددی انجام شده بر روی تعدادی از شاخص‌ها در گراف تصادفی اردش-رنی و تحلیل کران بالا و پایین برای این شاخص‌ها و مطالعات شبیه‌سازی شده نشان می‌دهد که می‌توان برای این شاخص‌ها کران‌هایی بر حسب نیمی از تعداد راس‌ها در نظر گرفت. داسلیک و همکاران، پایاهای گرافی شاخص زاگرب نوع اول، نوع دوم و شاخص فرگاتن برای گراف‌های تصادفی اردش-رنی را تجزیه و تحلیل کرده‌اند [۱۲]. همچنین لی و همکاران، پایاهای گرافی زاگرب تعمیم یافته در گراف‌های اردش-رنی را تعیین کرده‌اند [۱۳]. بیشتر این مطالعات روی گراف‌های تصادفی اردش-رنی صورت گرفته است، تا اینکه اخیرا یوان، به بررسی و محاسبه حدود شاخص عمومی راندیک و شاخص عمومی اتصال جمع در گراف‌های تصادفی اردش-رنی ناهمگن پرداخته است [۴].

UNCORRECTED PROOF

بعلاوه، مارتینز و همکاران به تحلیل شاخص‌های راندیک و هارمونیک در گراف‌های تصادفی اردش-رنی پرداخته‌اند [۱۴، ۱۵]. از سوی دیگر، قربانی و حسین‌زاده کاربرد این شاخص‌ها را در ساختارهای نانوشیمی مانند نانواستار دندریمرها بررسی کرده‌اند [۵، ۷، ۸].

همچنین در پژوهش اخیر حسین‌زاده [۱۶] به رابطه میان شاخص‌های مبتنی بر درجه یک گراف و زیرگراف‌های تصادفی آن پرداخته است. همچنین، مطالعات جدید یوان [۱۷] درباره توزیع مجانبی شاخص‌های مبتنی بر درجه در گراف‌های تصادفی ناهمگن، پژوهش خان و همکاران [۱۸] درباره تحلیل شاخص‌های درجه در ساختارهای بلوری و مقاله فنگ و همکاران [۱۹] درباره قوانین حدی شاخص‌های تعمیم‌یافته زاگرب در گراف‌های تصادفی، همگی نشان می‌دهند که مسیر این پژوهش همسو با گرایش‌های اخیر در تحلیل احتمالاتی شاخص‌های گرافی است. این ارتباط‌ها بر نوآوری و اهمیت پژوهش حاضر در گسترش مطالعه احتمالاتی شاخص‌های گرافی تأکید می‌کنند.

ما در پژوهش پیشین [۲۰]، امید ریاضی شاخص‌های زاگرب را برای گراف‌های دوبخشی تصادفی در دو مدل $G(n_1,n_2,p)$ و $G(n_1,n_2,m)$ محاسبه کردیم. در آن مقاله، علاوه بر ارائه نتایج ترکیبی، شواهد محاسباتی نیز گزارش شد که درک بهتری از شاخص‌های مبتنی بر درجه در گراف‌های دوبخشی تصادفی فراهم می‌ساخت. مقاله حاضر این نتایج را در حالت کلی‌تر، یعنی گراف‌های دوبخشی تصادفی ناهمگن، تعمیم می‌دهد. در این حالت، احتمال وقوع یال‌ها یکنواخت نبوده و به یک ماتریس احتمال ناهمگن وابسته است، که به روشنی نشان می‌دهد ناهمگن بودن ساختار یک گراف تصادفی چگونه بر رفتار شاخص‌های توپولوژیکی کلاسیک تأثیر می‌گذارد.

در این مقاله، امید ریاضی و کران‌های بالا و پایین شاخص‌های زاگرب نوع اول و دوم و شاخص فرگاتن برای گراف‌های دوبخشی تصادفی ناهمگن را محاسبه می‌کنیم. فرمول‌های کلی ارائه‌شده امکان استخراج حالت‌های خاص و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف را فراهم می‌کنند. بعلاوه، مثال‌های عددی و شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که نتایج نظری با داده‌های تجربی مطابقت دارند. این پژوهش چارچوب جدیدی برای تحلیل شاخص‌های توپولوژیکی در ساختارهای پیچیده‌تر فراهم کرده و اهمیت آن‌ها را در مدل‌سازی شبکه‌های پیچیده نشان می‌دهد. تمامی نمادهای استفاده شده در این مقاله از مراجع [۲۱، ۲۲] گرفته شده است.

۲- امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن

شاخص زاگرب نوع اول $M_1(G)$ یکی از شناخته‌شده‌ترین شاخص‌های مبتنی بر درجه است که در بسیاری از مطالعات ریاضی شیمی برای توصیف خواص مولکولی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که مقدار $M_1(G)$ به درجات رئوس بستگی دارد، در مدل‌های تصادفی محاسبه امید ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

در این بخش امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول را محاسبه خواهیم کرد، همچنین کران بالا و کران پایینی برای آن تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد بطوریکه $n_1,\ n_2 \geq 2$ و $\min_{1\leq i\leq n_1,\ 1\leq j\leq n_2}\{f_{ij}\} > \varepsilon$ باشند، آنگاه:

$$n_1 n_2 p_n^2\left(\frac{2}{p_n}+n_1+n_2-2\right)\varepsilon \leq$$

$$\mathrm{E}\left[M_1(G)\right] \leq n_1 n_2 p_n^2\left(\frac{2}{p_n}+n_1+n_2-2\right).$$

اثبات. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن با دو مجموعه مجزا از رئوس مانند X و Y باشد، بطوری که $X=\{x_1,\ldots,x_{n_1}\}$ و $Y=\{y_1,\ldots,y_{n_2}\}$ می‌باشند و d_{x_i} درجه هر راس $x_i \in X$، $i\in[n_1]$ را با $d_{x_i}=\sum_{k=1}^{n_2} S_{ik}$ تعریف می‌کنیم که S_{ik} متغیر تصادفی نظیر مولفه واقع شده در سطر i-ام و ستون k-ام در بلوک S در ماتریس مجاورت گراف تصادفی است. بطور مشابه d_{y_j} درجه هر راس $y_j \in Y$،

UNCORRECTED PROOF

$j\in[n_2]$ را $d_{y_j}=\sum_{r=1}^{n_1}S_{jr}$ تعریف می‌کنیم، بطوریکه S_{jr} متغیر تصادفی نظیر مولفه واقع شده در سطر j-ام و ستون r-ام در بلوک S^T در ماتریس مجاورت گراف تصادفی است.

با توجه به تعریف شاخص زاگرب نوع اول، با فرض اینکه G یک گراف دوبخشی است، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]&=\mathrm{E}\left[\sum_{x_i\in X}d_{x_i}^2+\sum_{y_j\in Y}d_{y_j}^2\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n_1}\mathrm{E}\left[d_{x_i}^2\right]+\sum_{j=1}^{n_2}\mathrm{E}\left[d_{y_j}^2\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n_1}\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n_2}S_{ik}^2+\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n_2}S_{ik}S_{ik'}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{n_2}\mathrm{E}\left[\sum_{r=1}^{n_1}S_{jr}^2+\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{\substack{r'=1\\r'\neq r}}^{n_1}S_{jr}S_{jr'}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n_1}\left[p_n\sum_{k=1}^{n_2}f_{ik}+p_n^2\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n_2}f_{ik}f_{ik'}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{n_2}\left[p_n\sum_{r=1}^{n_1}f_{jr}+p_n^2\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{\substack{r'=1\\r'\neq r}}^{n_1}f_{jr}f_{jr'}\right]\qquad(1)
\end{aligned}$$

با توجه به تعریف و فرض $\min_{1\le i\le n_1,1\le j\le n_2}\{f_{ij}\}>\varepsilon$، داریم $n_1n_2\varepsilon\le\sum_{i\in[n_1]}\sum_{j\in[n_2]}f_{ij}\le n_1n_2$. پس از عبارت (۱) نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&n_1n_2p_n^2\left(\frac{2}{p_n}+n_1+n_2-2\right)\varepsilon\le\\
&\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]\le n_1n_2p_n^2\left(\frac{2}{p_n}+n_1+n_2-2\right).
\end{aligned}$$

■

توجه شود که فرمول به‌دست آمده وابستگی مستقیم بین توزیع احتمالات f_{ij} و مقدار امید ریاضی زاگرب نوع اول را نشان می‌دهد. در حالتی که $f_{ij}=1$ برای همه جفت رئوس، این رابطه به فرمول بدست آمده در گراف‌های دوبخشی اردش-رنی بازمی‌گردد [۲۰].

مثال ۲.۲. فرض کنید یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن $G(n_1,n_2,p_n,f)$ داشته باشیم که در آن $n_1=3$ و $n_2=3$، یعنی گراف از دو بخش $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ و $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ تشکیل شده است. هر یال به احتمال $p_n=0.5$ تشکیل شده است. بردار احتمال ناهمگن $f=(f_{ij})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}0.8&0.5&0.2\\0.9&0.6&0.3\\1.0&0.7&0.4\end{bmatrix}$$

که در آن f_{ij} بیانگر شدت ارتباط بین رئوس $x_i\in X$ و $y_j\in Y$ است. پس احتمال وجود یال بین x_i و y_j برابر با p_nf_{ij} است. با استفاده از قضیه ۱.۲ امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول برابر $\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]=8.79$ است.

در مثال ۲.۲ تمرکز اصلی محاسبه‌ی عددی امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول در یک گراف دوبخشی تصادفی است. مثال بعد با فرض اینکه تمام مولفه‌های بردار f برابر یک است و در نظر گرفتن وزن احتمالاتی ثابت p، تأکید بر جنبه‌ی مدلسازی این شاخص و چگونگی شدت تعاملات و ناهمگن بودن ساختاری در شبکه‌های پیچیده، مانند شبکه‌های زیستی دارد.

مثال ۳.۲. گراف تصادفی $G(n_1,n_2,p)$ با $n_1=3$ و $n_2=3$، که هر یال بین مجموعه‌های X و Y با احتمال ثابت $p=0.5$ و f با مولفه‌های ثابت یک می‌باشد را در نظر بگیرید. در این حالت، با استفاده از قضیه ۱.۲ امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول برابر $\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]=27$ است. این مدل مبنای مقایسه با حالت ناهمگن است و نشان می‌دهد در شرایط یکنواخت، شاخص زاگرب با افزایش تراکم یال‌ها رشد خطی دارد.

UNCORRECTED PROOF

در ادامه، میزان رشد (پیچیدگی) محاسباتی امید ریاضی شاخص زاگرب نوع اول برای گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن بر حسب نماد O معرفی شده است.

نتیجه ۴.۲. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد، آنگاه:

$$\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]=O\left(\max\left\{n_1^2n_2,\ n_1n_2^2\right\}\right).$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۲ نتیجه بدست می‌آید. ■

نتیجه ۵.۲. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد بطوریکه به ازای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ داشته باشیم $f_{ij}=t$ که $0\le t\le 1$، آنگاه داریم:

$$\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]=n_1n_2p_n^2t^2\left(\frac{2}{p_nt}+n_1+n_2-2\right).$$

اثبات. اگر $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی و ناهمگن باشد بطوریکه برای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$، $f=\left(f_{ij}\right)$ یک بردار با مولفه‌های ثابت $f_{ij}=t$ از اعداد بین صفر و یک باشند بطوریکه $Pr\left(S_{ij}=1\right)=p_nt$ و S_{ij}ها مستقل هستند. چون تمام f_{ij} ها ثابت هستند، $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف تصادفی دوبخشی اردش-رنی است. با استفاده از اثبات قضیه ۱.۲، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. ■

توجه ۶.۲. در حالت خاص اگر برای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ داشته باشیم $f_{ij}=1$ و قرار دهیم $p_n=p$، یک گراف تصادفی دوبخشی $G(n_1,n_2,p)$ خواهیم داشت که طبق نتیجه ۵.۲ داریم:

$$\mathrm{E}\left[M_1(G)\right]=n_1n_2p\left(\left(n_1+n_2-2\right)p+2\right).$$

لازم به ذکر است که این عبارت در قضیه ۱.۲. قسمت (الف) در [۲۰] نیز توسط نویسندگان بدست آمده است. ■

۳- امید ریاضی شاخص زاگرب نوع دوم گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن

شاخص زاگرب نوع دوم $M_2(G)$ که به تعامل بین درجات رئوس متصل توجه دارد، در تحلیل شبکه‌های شیمیایی و پیچیده با خواص مولکولی مانند پایداری و انرژی ارتباط دارد، بنابراین گنجاندن ناهمگنی به معنی نزدیک‌تر شدن مدل به مولکول‌های واقعی است که پیوندهای یکنواخت ندارند. در شبکه‌های زیستی، مقدار $M_2(G)$ می‌تواند شدت همبستگی بین دو گروه گره‌ها (مثلاً ژن‌ها و پروتئین‌ها) را نشان دهد.

در این بخش، ابتدا ما برای نخستین بار امید ریاضی $M_2(G)$ را برای گراف دوبخشی ناهمگن $G(n_1,n_2,p_n,f)$ محاسبه می‌کنیم. در این گراف، ماتریس احتمال $f=\left(f_{ij}\right)$ ساختار ناهمگن شبکه را مدل می‌کند و باعث بروز گام‌های جدیدی در فرمول نهایی می‌شود، مانند حالتی که $f_{ij}=1$ ظاهر می‌شوند [۲۰]. سپس کران‌های بالا و پایین آن را ارائه می‌کنیم تا رفتار شاخص در مدل‌های مختلف روشن شود.

قضیه ۱.۳. اگر $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد و داشته باشیم $n_1,n_2\ge 2$ و $\min_{1\le i\le n_1,\,1\le j\le n_2}\left\{f_{ij}\right\}>\varepsilon$. آنگاه:

$$n_1n_2p_n\begin{pmatrix}1+p_n\left(n_1+n_2-2\right)+\\ p_n^2\left(n_1-1\right)\left(n_2-1\right)\varepsilon\end{pmatrix}\le \mathrm{E}\left[M_2(G)\right]$$
$$\le n_1n_2p_n\begin{pmatrix}1++p_n\left(n_1+n_2-2\right)+\\ p_n^2\left(n_1-1\right)\left(n_2-1\right)\end{pmatrix}.$$

UNCORRECTED PROOF

اثبات. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن با دو مجموعه مجزا از رئوس $X=\{x_1,\ldots,x_{n_1}\}$ و $Y=\{y_1,\ldots,y_{n_2}\}$ می‌باشد. d_{x_i} درجه هر راس $x_i\in X$، و بطور مشابه d_{y_j} درجه هر راس $y_j\in Y$، $j\in[n_2]$ می‌باشد.

با توجه به تعریف شاخص زاگرب نوع دوم، چنین خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}[M_2(G)]=\mathrm{E}\left[\sum_{\{x_i,y_j\}\in E(G)} d_{x_i}d_{y_j}\right]$$
$$=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} d_{x_i}d_{y_j}S_{ij}\right]=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\mathrm{E}\left[d_{x_i}d_{y_j}S_{ij}\right] \quad (2)$$

از طرفی داریم:

$$\mathrm{E}\left[d_{x_i}d_{y_j}S_{ij}\right]=\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{r=1}^{n_1}\mathrm{E}\left[S_{ik}S_{jr}S_{ij}\right]$$
$$=\mathrm{E}\left[S_{ij}S_{ji}S_{ij}\right]+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_2}\mathrm{E}\left[S_{ik}S_{ji}S_{ij}\right]+$$
$$\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n_1}\mathrm{E}\left[S_{ij}S_{jr}S_{ij}\right]+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_2}\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n_1}\mathrm{E}\left[S_{ik}S_{jr}S_{ij}\right]$$
$$=p_n f_{ij}+p_n^2 f_{ij}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_2} f_{ik}+p_n^2 f_{ij}\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n_1} f_{jr}$$
$$+p_n^3 f_{ij}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_2}\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n_1} f_{ik}f_{jr}$$

بنابراین با جاگذاری در عبارت (۲) داریم:

$$\mathrm{E}[M_2(G)]=$$
$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\begin{array}{l} p_n f_{ij}+p_n^2 f_{ij}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_2} f_{ik} \\ +p_n^2 f_{ij}\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n_1} f_{jr}+p_n^3 f_{ij}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_2}\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n_1} f_{ik}f_{jr}\end{array}\right) \quad (3)$$

با توجه به تعریف و فرض $\min_{1\le i\le n_1,\,1\le j\le n_2}\{f_{ij}\}>\varepsilon$، داریم $n_1n_2\varepsilon\le\sum_{i\in[n_1]}\sum_{j\in[n_2]} f_{ij}\le n_1n_2$. پس از عبارت (۳) نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$n_1n_2p_n\left(\begin{array}{l}1+p_n(n_1+n_2-2)+\\ p_n^2(n_1-1)(n_2-1)\end{array}\right)\varepsilon\le\mathrm{E}[M_2(G)]$$
$$\le n_1n_2p_n\left(\begin{array}{l}1+p_n(n_1+n_2-2)\\ +p_n^2(n_1-1)(n_2-1)\end{array}\right).$$

■

مثال ۲.۳. فرض کنید یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن $G(n_1,n_2,p_n,f)$ داشته باشیم که در آن $n_1=n_2=3$ و $p_n=0.5$ تشکیل شده است. بردار احتمال ناهمگن $f=(f_{ij})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.5 & 0.2\\ 0.9 & 0.6 & 0.3\\ 1.0 & 0.7 & 0.4\end{bmatrix}$$

با جایگذاری در فرمول بدست آمده در قضیه ۱.۳، $\mathrm{E}[M_2(G)]=7.062$ است.

مثال ۳.۳ کاربرد گرافی تصادفی دوبخشی ناهمگن را در یک مدلسازی شبکه‌های زیستی نشان می‌دهد.

مثال ۳.۳. اگر مجموعه X بیانگر ژن‌ها و مجموعه Y بیانگر پروتئین‌ها در یک شبکه زیستی باشد، آنگاه گراف $G(n_1,n_2,p_n,f)$، می‌تواند تعاملات ژن–پروتئین را مدل کند. احتمال p_nf_{ij} بیانگر میزان تمایل ژن i به فعال‌سازی پروتئین j است.

در این حالت، ناهمگنی ماتریس احتمال $f=(f_{ij})$ نشان‌دهنده تفاوت‌های بیولوژیکی در شدت تعامل‌هاست. تحلیل $\mathrm{E}[M_2(G)]$ در این مدل می‌تواند شدت همبستگی بین ژن‌ها و پروتئین‌ها از نظر ساختار شبکه‌ای را نشان دهد.

UNCORRECTED PROOF

در ادامه، میزان رشد (پیچیدگی) محاسباتی امید ریاضی شاخص زاگرب نوع دوم برای گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن بر حسب نماد O معرفی شده است.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد، آنگاه:

$$\mathrm{E}\left[M_2(G)\right]=O\left(n_1^2n_2^2\right).$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۳، نتیجه بدست می‌آید. ■

نتیجه ۵.۳. اگر $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد و به ازای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ داشته باشیم $f_{ij}=t$ که $0\le t\le 1$، آنگاه داریم:

$$\mathrm{E}\left[M_2(G)\right]=n_1n_2p_nt\begin{pmatrix}1+(n_1+n_2-2)\,p_nt\\+(n_1-1)(n_2-1)\,p_n^2t^2\end{pmatrix}.$$

اثبات. اگر $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد چون تمام f_{ij} ها ثابت هستند، بطوریکه به ازای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$، $Pr\left(S_{ij}=1\right)=p_nt$ که $p_n\in[0,1]$ و $t\in[0,1]$ ثابت باشند و S_{ij} ها مستقل باشند. چون تمام f_{ij} ها ثابت هستند، با استفاده از اثبات قضیه ۱.۳، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. ■

توجه ۶.۳. در حالت خاص اگر به ازای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ داشته باشیم $f_{ij}=1$ و قرار دهیم $p_n=p$، یک گراف تصادفی دوبخشی $G(n_1,n_2,p)$ خواهیم داشت که طبق نتیجه ۵.۳ داریم:

$$\mathrm{E}\left[M_2(G)\right]=n_1n_2p\begin{pmatrix}(n_1-1)(n_2-1)\,p^2\\+(n_1+n_2-2)\,p+1\end{pmatrix}.$$

لازم به ذکر است که این عبارت در قضیه ۱.۲. قسمت (ب) در [۲۰] نیز توسط نویسندگان بدست آمده است. ■

۴- امید ریاضی شاخص فرگاتن گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن

در شیمی، شاخص فرگاتن $F(G)$ با خواص فیزیکی و شیمیایی مانند انرژی مولکول‌ها ارتباط دارد، بنابراین نتایج این بخش نشان‌دهنده اهمیت توجه به ناهمگنی در مدل‌سازی است. این امر به ویژه در مدل‌های واقعی از شبکه‌ها که درجات رئوس توزیع نامتوازن دارند اهمیت دارد.

در این بخش نیز کران بالا و پایین امید ریاضی شاخص فرگاتن را برای گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد، بطوریکه $n_1,\ n_2\ge 3$ و $\min_{1\le i\le n_1,\,1\le j\le n_2}\left\{f_{ij}\right\}>\varepsilon$ باشند. آنگاه:

$$n_1n_2p_n\begin{pmatrix}2+3p_n\left(n_1+n_2-2\right)+\\p_n^2\left(n_1-1\right)\left(n_1-2\right)+\\p_n^2\left(n_2-1\right)\left(n_2-2\right)\end{pmatrix}\varepsilon$$

$$\le \mathrm{E}\left[F\left(G\right)\right]\le n_1n_2p_n\begin{pmatrix}2+3p_n\left(n_1+n_2-2\right)\\+p_n^2\left(n_1-1\right)\left(n_1-2\right)+\\p_n^2\left(n_2-1\right)\left(n_2-2\right)\end{pmatrix}.$$

اثبات. $G(n_1,n_2,p_n,f)$ را یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن با دو مجموعه مجزا از رئوس مانند X و Y در نظر بگیرید که $X=\left\{x_1,\ldots,x_{n_1}\right\}$ و $Y=\left\{y_1,\ldots,y_{n_2}\right\}$ می‌باشند و درجه هر راس $x_i\in X$، $d_{x_i}=\sum_{k=1}^{n_2}S_{ik}$ را $i\in[n_1]$ در نظر بگیرید بطوریکه و بطور مشابه درجه هر راس $y_j\in Y$، d_{y_j} را $j\in[n_2]$ در نظر بگیرید بطوریکه $d_{y_j}=\sum_{r=1}^{n_1}S_{jr}$.

UNCORRECTED PROOF

با توجه به تعریف شاخص فرگاتن و با فرض اینکه G یک گراف دوبخشی است، داریم:

$$\mathrm{E}\left[F(G)\right]=\mathrm{E}\left[\sum_{x_i\in X} d_{x_i}^3+\sum_{y_j\in Y} d_{y_j}^3\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\mathrm{E}\left[d_{x_i}^3\right]+\sum_{j=1}^{n_2}\mathrm{E}\left[d_{y_j}^3\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\mathrm{E}\left[\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{n_2} S_{ik}^3+3\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n_2} S_{ik}^2 S_{ik'}+\\ \sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n_2}\sum_{\substack{k''=1\\k''\neq k,k'}}^{n_2} S_{ik}S_{ik'}S_{ik''}\end{array}\right]+$$

$$\sum_{j=1}^{n_2}\mathrm{E}\left[\sum_{r=1}^{n_1} S_{jr}^3+3\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{\substack{r'=1\\r'\neq r}}^{n_1} S_{jr}^2 S_{jr'}+\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{\substack{r'=1\\r'\neq r}}^{n_1}\sum_{\substack{r''=1\\r''\neq r,r'}}^{n_1} S_{jr}S_{jr'}S_{jr''}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\left[\begin{array}{l}p_n\sum_{k=1}^{n_2} f_{ik}+3p_n^2\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n_2} f_{ik}f_{ik'}+\\ p_n^3\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n_2}\sum_{\substack{k''=1\\k''\neq k,k'}}^{n_2} f_{ik}f_{ik'}f_{ik''}\end{array}\right]+$$

$$\sum_{j=1}^{n_2}\left[\begin{array}{l}p_n\sum_{r=1}^{n_1} f_{jr}+3p_n^2\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{\substack{r'=1\\r'\neq r}}^{n_1} f_{jr}f_{jr'}+\\ p_n^3\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{\substack{r'=1\\r'\neq r}}^{n_1}\sum_{\substack{r''=1\\r''\neq r,r'}}^{n_1} f_{jr}f_{jr'}f_{jr''}\end{array}\right] \qquad (4)$$

با توجه به تعریف و فرض داریم $\min_{1\le i\le n_1,\,1\le j\le n_2}\left\{f_{ij}\right\}>\varepsilon$، داریم $n_1n_2\varepsilon\le\sum_{i\in[n_1]}\sum_{j\in[n_2]} f_{ij}\le n_1n_2$. پس از عبارت (۴) نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$n_1n_2p_n\left(\begin{array}{l}2+3p_n(n_1+n_2-2)+\\ p_n^2(n_1-1)(n_1-2)\\ +p_n^2(n_2-1)(n_2-2)\end{array}\right)\varepsilon\le$$

$$\mathrm{E}\left[F(G)\right]\le n_1n_2p_n\left(\begin{array}{l}2+3p_n(n_1+n_2-2)+\\ p_n^2(n_1-1)(n_1-2)+\\ p_n^2(n_2-1)(n_2-2)\end{array}\right).$$

■

مثال ۲.۴. فرض کنید یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن $G(n_1,n_2,p_n,f)$ داشته باشیم که در آن $n_1=n_2=3$ و $p_n=0.5$ تشکیل شده است. بردار احتمال ناهمگن $f=\left(f_{ij}\right)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.5 & 0.2\\ 0.9 & 0.6 & 0.3\\ 1.0 & 0.7 & 0.4\end{bmatrix}$$

با جایگذاری در فرمول بدست آمده در قضیه ۱.۴، $\mathrm{E}\left[F(G)\right]=16.677$ است.

اکنون میزان رشد (پیچیدگی) محاسباتی امید ریاضی شاخص فرگاتن برای گراف تصادفی دوبخشی ناهمگن بر حسب نماد O معرفی شده است.

نتیجه ۳.۴. فرض کنید $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد، آنگاه:

$$\mathrm{E}\left[F(G)\right]=O\left(\max\left\{n_1^3n_2,\ n_1n_2^3\right\}\right).$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۴، نتیجه بدست می‌آید. ■

نتیجه ۴.۴. اگر $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد و برای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$ داشته باشیم $f_{ij}=t$ که $0\le t\le 1$ و $n_1,\ n_2\ge 3$، آنگاه داریم:

$$\mathrm{E}\left[F(G)\right]=n_1n_2p_nt\left(\begin{array}{l}2+3(n_1+n_2-2)p_nt+\\ (n_1-1)(n_1-2)p_n^2t^2+\\ (n_2-1)(n_2-2)p_n^2t^2\end{array}\right).$$

اثبات. اگر $G(n_1,n_2,p_n,f)$ یک گراف دوبخشی تصادفی ناهمگن باشد بطوریکه به ازای هر $i\in[n_1]$ و $j\in[n_2]$، $Pr\left(S_{ij}=1\right)=p_nt$ که $p_n\in[0,1]$ و $t\in[0,1]$ ثابت باشند و S_{ij}ها مستقل باشند. چون تمام

UNCORRECTED PROOF

f_{ij} ها ثابت هستند، با استفاده از اثبات قضیه ۱.۴ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. ■

توجه ۵.۴. در حالت خاص اگر به ازای هر $i \in [n_1]$ و $j \in [n_2]$ داشته باشیم $f_{ij} = 1$ و قرار دهیم $p_n = p$، یک گراف تصادفی دوبخشی $G(n_1, n_2, p)$ خواهیم داشت که طبق نتیجه ۴.۴ داریم:

$$\mathrm{E}[F(G)] = n_1 n_2 p \begin{pmatrix} (n_1 - 1)(n_1 - 2)p^2 + \\ (n_2 - 1)(n_2 - 2)p^2 + \\ 3(n_1 + n_2 - 2)p + 2 \end{pmatrix}.$$

لازم به ذکر است که این عبارت در قضیه ۱.۲. قسمت (ج) در [۲۰] نیز توسط نویسندگان بدست آمده است. ■

۵- نتیجه گیری

توجه به ماهیت گراف‌های تصادفی در مدل سازی رخ دادهای طبیعی، مانند شبکه‌های اجتماعی، برقراری پیوند بین اتم‌های مواد شیمیایی و ...، باعث شده که این گراف‌ها کاربردهای زیادی در علوم بین رشته‌ای پیدا کنند و پژوهشگران بسیاری به مطالعه این گراف‌ها بپردازند.

با توجه به تعریف گراف‌های تصادفی دوبخشی ناهمگن، زمانی از این نوع گراف‌ها استفاده می‌شود که احتمال وقوع یال‌ها در دو بخش گراف به‌صورت یکنواخت نباشد. این مدل به‌ویژه در مطالعه شبکه‌های واقعی با ساختارهای نامتوازن کاربرد دارد. در ریاضی شیمی، شاخص‌های زاگرب و شاخص فرگاتن ابزار مهمی برای پیش‌بینی خواص مولکولی، پایداری و انرژی ترکیبات هستند. توجه به ناهمگنی در این شاخص‌ها امکان مدل‌سازی دقیق‌تر مولکول‌هایی با پیوندهای متفاوت را فراهم می‌آورد و می‌تواند در طراحی و تحلیل ترکیبات شیمیایی پیچیده مورد استفاده قرار گیرد. ظهور این مدل‌ها بیانگر اثر غیرخطی ناهمگنی بر ویژگی‌های ساختاری گراف هستند و نشان می‌دهند که نمی‌توان شبکه‌های واقعی را صرفاً با مدل‌های یکنواخت توصیف کرد.

در شبکه‌های بیولوژیکی، این شاخص‌ها معیار مناسبی برای سنجش همبستگی و تعامل بین دو مجموعه رئوس (مانند ژن‌ها و پروتئین‌ها) محسوب می‌شوند. مدل ناهمگن، با در نظر گرفتن احتمال‌های متفاوت برای اتصال میان اجزای شبکه، سازگاری بیشتری با واقعیت شبکه‌های زیستی دارد و می‌تواند به تحلیل پویایی‌ها و مقاومت ساختاری چنین سیستم‌هایی کمک کند.

علاوه بر این، حدود نظری و امید ریاضی‌های به‌دست‌آمده برای شاخص‌های زاگرب و فرگاتن کاربردهای عملی در سیستم‌های واقعی دارند. همان‌گونه که در مثال ۳.۳ نشان داده شده است، نتایج ارائه شده می‌توانند برای تحلیل ویژگی‌های ساختاری شبکه‌های ناهمگن مورد استفاده قرار گیرند. در شبکه‌های شیمیایی، این شاخص‌ها به سنجش پایداری مولکولی و پیچیدگی ساختار کمک می‌کنند، در حالی‌که در شبکه‌های زیستی، برای توصیف همبستگی درجه و مقاومت تعاملات زیستی میان موجودیت‌ها کاربرد دارند. از این‌رو، مدل‌های ارائه‌شده پلی میان نامتغیرهای گرافی و مدل‌سازی عملی در سیستم‌های پیچیده برقرار می‌سازند.

در این مقاله، ما به محاسبه امید ریاضی سه مورد از قدیمی‌ترین و مهم‌ترین شاخص‌های توپولوژیکی مبتنی بر درجات رئوس گراف، با نام‌های شاخص اول و دوم زاگرب و نیز شاخص فرگاتن برای گراف‌های تصادفی دوبخشی ناهمگن پرداخته‌ایم. همچنین کران‌هایی را برای امید ریاضی این پایاهای گرافی ارائه کرده‌ایم تا بتوان با استفاده از آن‌ها، بدون در دست داشتن یک گراف دوبخشی، تخمینی برای این شاخص‌ها داشت و نهایتا به بررسی پیچیدگی زمانی برای محاسبه این شاخص‌ها پرداخته‌ایم. لازم به ذکر است که با استفاده از نتایج بدست آمده در این مقاله، می‌توان تعدادی از نتایج ارائه شده در [۲۰] را نتیجه گرفت.

نوآوری‌های اصلی این پژوهش را می‌توان در چند جنبه اساسی خلاصه کرد. در این مطالعه، برای نخستین بار

UNCORRECTED PROOF

شاخص‌های مورد بررسی در چارچوب مدل گراف دوبخشی ناهمگن محاسبه شده‌اند، در حالی‌که در پژوهش‌های پیشین [۲۰] تنها حالت کلاسیک مدل اردوش–رنی مورد بررسی قرار گرفته بود. همچنین، فرمول‌های کلی ارائه‌شده نه‌تنها حالت ناهمگن را در بر می‌گیرند، بلکه امکان استخراج و تحلیل حالت‌های خاص را نیز فراهم می‌سازند. در نهایت، ترکیب نتایج نظری با مثال‌های عددی و شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که یافته‌های نظری با داده‌های تجربی سازگاری بالایی دارند و از دقت و اعتبار قابل توجهی برخوردارند.

در نهایت، این پژوهش مسیرهای جدیدی را برای تحقیقات آینده می‌گشاید. از جمله می‌توان به تحلیل دقیق‌تر کران‌های بالا و پایین برای امید ریاضی شاخص‌های گراف‌های تصادفی ناهمگن، بررسی شاخص‌های توپولوژیک دیگر مانند شاخص‌های راندیک و شاخص‌های مبتنی بر فاصله و همچنین تعمیم چارچوب ارائه‌شده به گراف‌های چندبخشی، گراف‌های وزندار و حتی گراف‌های پویا اشاره کرد. همچنین، توسعه‌ی الگوریتم‌های کارآمد برای محاسبه‌ی این شاخص‌ها در شبکه‌هایی با مقیاس بزرگ‌تر می‌تواند جهت‌گیری ارزشمندی برای پژوهش‌های آتی باشد. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که توجه به ناهمگنی گراف‌های تصادفی نه‌تنها از لحاظ نظری اهمیت دارد، بلکه از دیدگاه کاربردی نیز برای توصیف شبکه‌های واقعی امری اجتناب‌ناپذیر است.

تعارض منافع

بدینوسیله نویسندگان اعلام می‌کنند که در مورد انتشار این مقاله تعارض منافع وجود ندارد.

مراجع

[1] Erdös, Paul, and Alfréd Rényi. "On Random Graphs, I." *Publicationes Mathematicae Debrecen* 6 (1959): 290–297.

[2] Erdös, Paul, and Alfréd Rényi. "On the Evolution of Random Graphs." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* 5 (1960): 17–61.

[3] Skerman, Fiona. *Degree Sequences of Random Bipartite Graphs.* PhD Thesis, The Australian National University, Canberra, 2010.

[4] Yuan, Ming. "On the Randić Index and Its Variants of Network Data." *Test* (2023): 1–25. https://doi.org/10.1007/s11749-023-00962-7

[5] Ghorbani, Modjtaba, and Mohammad Ali Hosseinzadeh. "A Note on Zagreb Indices of Nanostar Dendrimers." *Optoelectronics and Advanced Materials – Rapid Communications* 4 (2010): 1877–1880.

[6] Gutman, Iván, Branko Ruscic, Nenad Trinajstić, and C. F. Wilcox. "Graph Theory and Molecular Orbitals. XII. Acyclic Polyenes." *Journal of Chemical Physics* 62 (1975): 3399–3405.

[7] Hosseinzadeh, Mohammad Ali, and Modjtaba Ghorbani. "On the Zagreb Indices of Nanostar Dendrimers." *Optoelectronics and Advanced Materials – Rapid Communications* 4 (2010): 378–380.

[8] Hosseinzadeh, Mohammad Ali, and Modjtaba Ghorbani. "GA Index of Nanostar Dendrimers." *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials* 11 (2009): 1671–1674.

[9] Randić, Milan. "Novel Graph Theoretical Approach to Heteroatoms in Quantitative Structure–Property Relationships." *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 10 (1991): 213–227.

UNCORRECTED PROOF

[10] Randić, Milan. "On Computation of Optimal Parameters for Multivariate Analysis of Structure–Property Relationship." *Journal of Computational Chemistry* 12 (1991): 970–980.

[11] Furtula, Boris, and Iván Gutman. "A Forgotten Topological Index." *Journal of Mathematical Chemistry* 53 (2015): 1184–1190.

[12] Došlić, Tomislav, Mohammad Ali Hosseinzadeh, Samaneh Hossein-Zadeh, Ali Iranmanesh, and Fraydoun Rezakhanlou. "On Generalized Zagreb Indices of Random Graphs." *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 84 (2020): 499–511.

[13] Li, Siman, Li Shi, and Wei Gao. "Two Modified Zagreb Indices for Random Structures." *Main Group Metal Chemistry* 44, no. 1 (2021): 150–156.

[14] Martinez-Martinez, C. T., J. A. Mendez-Bermudez, Jose M. Rodriguez, and Jose M. Sigarreta. "Computational and Analytical Studies of the Randić Index in Erdös–Rényi Models." *Applied Mathematics and Computation* 377 (2020): 125–137.

[15] Martinez-Martinez, C. T., J. A. Mendez-Bermudez, Jose M. Rodriguez, and Jose M. Sigarreta. "Computational and Analytical Studies of the Harmonic Index on Erdös–Rényi Models." *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 85 (2021): 395–426.

[16] Hosseinzadeh, Mohammad Ali. "Unveiling the Interplay Between Degree-Based Graph Invariants of a Graph and Its Random Subgraphs." *Acta Applicandae Mathematicae* 193, no. 1 (2024): Article 12. https://doi.org/10.1007/s10440-024-00688-5

[17] Yuan, Mingao. "Asymptotic Distribution of Degree–Based Topological Indices." *arXiv preprint* arXiv:2310.03988 (2023).

[18] Khan, Abdul Rauf, Abdul Mutlib, Francis Joseph H. Campeña, Fairouz Tchier, Maimoona Karim, and Shahid Hussain. "Investigation of Reduced Reverse Degree-Based Polynomials and Indices of Gold Crystals." Physica Scripta 99 (2024): 075259. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad5648

[19] Feng, Qunqiang, Hongpeng Ren, and Yaru Tian. "Limit Laws for the Generalized Zagreb Indices of Random Graphs." *arXiv preprint* arXiv:2503.04060v1 (2025).

[20] Samaie, Sara, Ali Iranmanesh, Abolfazl Tehranian, and Mohammad A. Hosseinzadeh. "Expected Value of Zagreb Indices of Random Bipartite Graphs." *Iranian Journal of Mathematical Chemistry* 15, no. 1 (2024): 27–37.

[21] Bollobás, Béla. *Probabilistic Combinatorics and Its Applications.* Providence: American Mathematical Society, 1991.

[22] Bondy, John Adrian, and U. S. R. Murty. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 244. Springer, New York, 2008.

UNCORRECTED PROOF