رابطه‌سازی سه جزء مثلثی برای صفحه‌ی خمشی

محمد رضایی پژند[۱،*]، سید رضا سرافرازی[۲]، یاسر صادقی[۳]

اطلاعات مقاله

واژگان کلیدی:
صفحه‌ی خمشی،
همگرایی،
تابع‌های شکل،
ماتریس کرنش،
ماتریس سختی،
آزمون وصله،
نقطه‌ی گوس.

چکیده

سخن در باره‌ی تحلیل صفحه‌ی خمشی با روش اجزای محدود می‌باشد. با وجود نوآوری‌های علمی فراوان که تاکنون به دست آمده است، پیشرفت پژوهشی جدید در این زمینه کاری بسیار دشوار می‌باشد. با این حال، سه جزء نوی مثلثی برای تحلیل صفحه‌ی خمشی در این مقاله رابطه‌سازی می‌شود. آزمون‌های وصله‌ی یک و چند جزئی برای جزءهای پیشنهادی به کار می‌رود. همچنین، با برنامه‌ی رایانه‌ای نویسندگان، مسأله‌های گوناگونی با این جزءها تحلیل خواهد شد. افزون بر این‌ها، پاسخ‌های سه جزء پیشنهادی با نتیجه‌های پژوهشگران دیگر و نیز جواب‌های دقیق مقایسه می‌گردد. یافته‌های این مقاله آشکار می‌کند که جزءهای جدید توانایی رسیدن به پاسخ دقیق را به‌خوبی دارند. باید افزود، یکی از سه جزء پیشنهادی دارای بهترین روند همگرایی است.

۱- پیش‌گفتار

روش اجزای محدود یک فرایند تحلیل عددی است. این شیوه یکی از قوی‌ترین و ارزشمندترین راه‌کارهایی است که پژوهشگران بسیاری برای به‌دست آوردن حل تقریبی معادله‌های دیفرانسیل از آن استفاده می‌کنند. فن مزبور در آغاز برای تحلیل سازه‌ها به کار رفت. ولی امروزه برای یافتن پاسخ عددی بسیاری از مسأله‌های گوناگون در مهندسی و علوم از آن بهره می‌جویند. توانایی روش اجزای محدود در تحلیل گونه‌های مختلف محیط‌های پیوسته می‌باشد [۱]. یکی از مسأله‌های دشوار، صفحه‌ی خمشی است که کاربرد زیادی به‌ویژه در سازه‌های صنعتی دارد. حل دقیق یک صفحه‌ی خمشی در حالت کلی امکان‌پذیر نیست. به سخن دیگر، فقط پاره‌ای از حالت‌های خاص آن را می‌توان با راه‌کارهای دقیق حل نمود. با وجود این، روش اجزای محدود می‌تواند بسیاری از حالت‌های پیچیده‌ی صفحه‌های خمشی را نیز تحلیل نماید [۲-۴]. این ویژگی شایسته سبب گردید که به صورت گسترده‌ای از این فرآیند عددی برای تحلیل صفحه‌های خمشی استفاده کنند. خاطرنشان می‌نماید که پژوهش‌های گسترده و فراوانی در این زمینه صورت گرفته است و هم‌اکنون نیز ادامه دارد [۵-۷]. یک دلیل وجود این حجم زیاد و بی‌نظیر کار علمی، پیچیدگی رفتار صفحه‌های خمشی می‌باشد. جزءهای ارائه شده برای صفحه‌های خمشی بسیار زیاد هستند [۸]. با این حال، تاکنون جزء محدودی که بتواند جوابگوی همه‌ی نیازها و پیچیدگی‌های مختلف انواع صفحه‌های خمشی باشد، پیدا نشده است. بنابراین، در زمان حاضر و در آینده نیز

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mrpajand@yahoo.com
۱. استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران
۲. دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران
۳. دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه عمران

پژوهشگران شاهد پیشرفت‌های دیگری در این زمینه خواهند بود [۹].

در میانه‌ی دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی، پژوهشگران به یک ویژگی مهم روش اجزای محدود دست یافتند. آشکار شد که سازگاری جزء‌ها نقش مهمی در همگرایی به پاسخ درست دارد. برقراری شرط‌های سازگاری در پهلوهای جزء‌های مسأله‌ی صفحه‌ی خمشی بسیار دشوار است. به‌وجود آوردن سازگاری شیب عمود بر لبه‌های جزء نیاز به تدبیر ویژه‌ای دارد [۱۰]. باگنر و همکاران دو جزء ۱۶ و ۳۶ درجه آزادی مستطیلی سازگار را ارائه کردند که همگرایی خوبی از خود نشان می‌دادند. در این جزء‌ها از مشتق دوم تغییرمکان به عنوان درجه آزادی استفاده می‌شد. خاطرنشان می‌کند که رابطه‌سازی جزء مناسب مثلثی، مشکل‌تر از گونه‌ی مستطیلی است. کلاف و تاچر سه نوع‌جزء سه‌پهلوی ناسازگار ارائه نمودند. هریک از این جزء‌ها کاستی‌هایی داشتند. برای نمونه، در اثر حرکت یکپارچه‌ی جسم سخت نتیجه‌ی مطلوبی نمی‌دادند. بازلی و همکاران این مسأله را ساده نمودند و از یک هندسه‌ی همگن استفاده کردند. آن‌ها رابطه‌ای برای تابع شکل به‌کار بردند که از مختصه‌ی سطحی استفاده می‌کند. جزء مثلثی این پژوهشگران، زیاد مورد استفاده قرار گرفت و دو گونه‌ی سازگار و ناسازگار آن در دسترس می‌باشد [۱۱ و ۱۲].

در این مقاله، رابطه‌سازی جزء‌های پیشنهادی بر پایه‌ی پنداشت تابع تغییرمکان انجام می‌پذیرد. نویسندگان از یک چند جمله‌ای کامل بهره می‌جویند که برای همگرایی به پاسخ درست مفید خواهد بود. در جزء یکم *(N12)* شش تغییرمکان w و ۹ چرخش عمود بر پهلوی $\partial w/\partial n$، ۱۵ درجه‌ی آزادی جزء را به وجود می‌آورند. درجه‌های آزادی این جزء قدری شبیه به جزء مثلثی سمی- لوف معروف است [۱۳ و ۱۴]. ولی رابطه‌سازی این دو به‌طور کامل با یکدیگر متفاوت می‌باشند. در جزء دوم *(N13)* چهار تغییرمکان w، چهار چرخش $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ و ۹ دوران عمود بر پهلو، $\partial w/\partial n$، وجود دارد.

در این پژوهش، رابطه‌سازی نوینی برای جزء سوم *(N6)*، انجام می‌پذیرد. با وجود این، نتیجه‌ی کار همانند جزئی است که در منبع‌های مختلف با نام *T21* شناخته می‌شود. یادآوری می‌نماید، این جزء را بل [۱۵]، آرجریس [۱۶] و آیرون [۱۷] نیز به گونه‌های دیگری رابطه‌سازی کرده‌اند. باید دانست، جزء سوم مثلثی شش گرهی است. شش درجه آزادی در هر گوشه‌ی جزء، w، $\partial w/\partial x$، $\partial w/\partial y$، $\partial^2 w/\partial x^2$، $\partial^2 w/\partial y^2$ و $\partial^2 w/\partial x\partial y$ هستند و گره‌های میان پهلویی فقط درجه‌آزادی $\partial w/\partial n$ را دارند.

۲- گره‌های جزء‌ها

شکل ۱ پیکربندی گره‌های جزء *N12* را نشان می‌دهد. سه گونه گره در این جزء وجود دارد. گره‌های گوشه به شماره‌های *1*، *2* و *3*، درجه آزادی خیز، w، دارند. گره‌های میان پهلو به شماره‌های *1b*، *2b* و *3b* هستند، که افزون بر تغییرمکان عمود بر صفحه، درجه آزادی چرخش عمود بر پهلوی $\partial w/\partial n$ را دارند. گره‌های *1a*، *1c*، *2a*، *2c*، *3a* و *3c* در پهلوها می‌باشند. درجه آزادی آن‌ها فقط چرخش عمود بر پهلوی $\partial w/\partial n$ است. بنابراین، بردار درجه آزادی این جزء را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\delta^e\} = \{\{\delta^e\}_1 \quad \{\delta^e\}_2 \quad \{\delta^e\}_3\}^T \tag{۱}$$

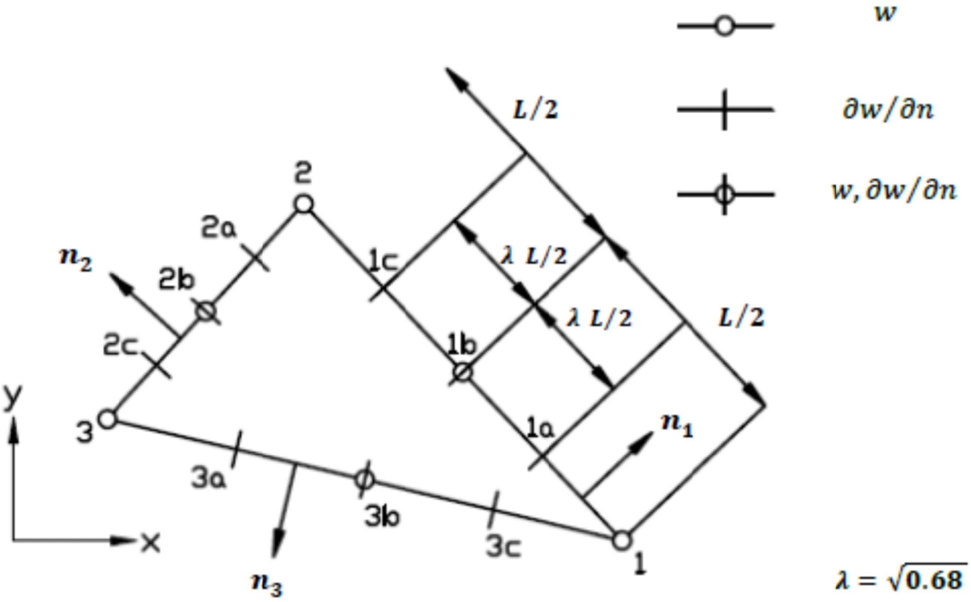
در این رابطه، $\{\delta^e\}_j$، $j=1,2,3$ درجه‌های آزادی وابسته به هر پهلو را مشخص می‌کند و به صورت زیر می‌باشد:

$$\{\delta^e\}_j = \left\{ w_j \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n_j}\right)_{ja} \quad w_{jb} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n_j}\right)_{jb} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n_j}\right)_{jc} \right\}^T \tag{۲}$$

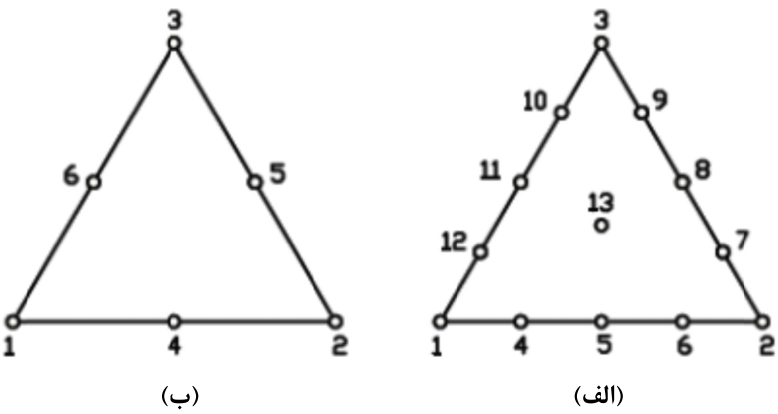
پهلوها، گره‌ها و درجه‌های آزادی به گونه‌ی پاد ساعت‌گرد در مثلث مرتب شده‌اند. شکل (۲-الف) پیکربندی گره‌های جزء *N13* را نشان می‌دهد. در این جزء، درجه‌های آزادی w، $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ برای گره‌های *1*، *2*، *3* و *13* به‌کار می‌روند. افزون بر این‌ها، در گره‌های *4* تا *12* از درجه‌آزادی $\partial w/\partial n$ استفاده می‌گردد. پیکربندی گره‌های جزء *N6* نیز در شکل (۲-ب) آمده است. در این

جزء، درجه‌های آزادی گره‌های *1*، *2* و *3* مقدارهای w، $\partial w/\partial x$، $\partial w/\partial y$، $\partial^2 w/\partial x^2$، $\partial^2 w/\partial y^2$ و $\partial^2 w/\partial x \partial y$ هستند. برای گره‌های *4*، *5* و *6* تنها از درجه‌آزادی $\partial w/\partial n$ استفاده می‌شود.

در ادامه، رابطه‌سازی نویسندگان برای جزء *N12* می‌آید. خاطرنشان می‌کند، رابطه‌سازی دو جزء دیگر نیز به صورت مشابهی انجام می‌پذیرد. به دلیل حجم محدود مقاله، رابطه‌سازی‌های جزء‌های دوم و سوم درج نمی‌شوند.



شکل۱- پیکربندی گره‌های جزء $N12$



شکل ۲ پیکربندی گره‌های جزء $N13$ و $N6$

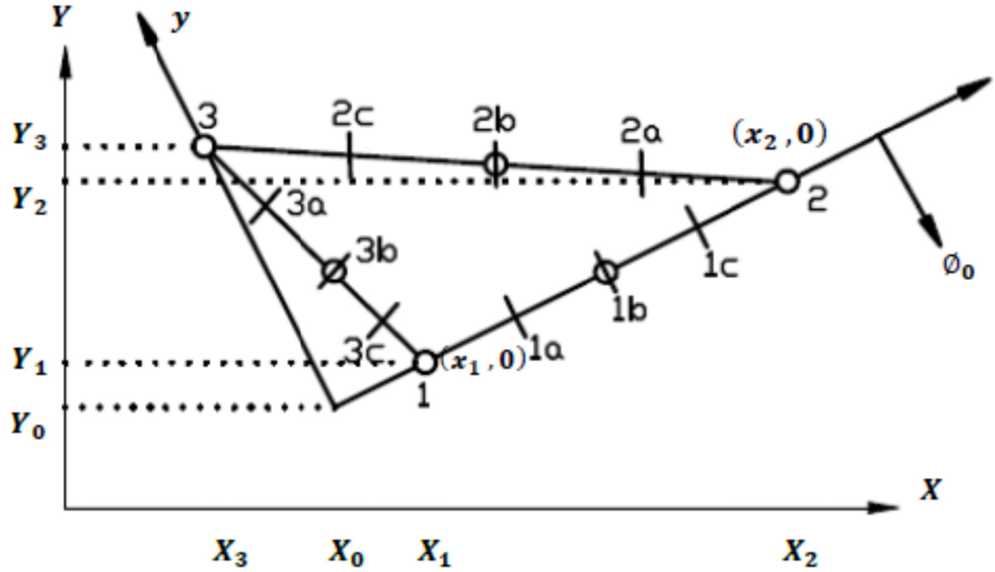
۳-هندسه‌ی جزء

موقعیت هر نقطه از جزء را می‌توان با استفاده از دستگاه مختصه‌ی محلی $(x\ ,\ y)$ و یا در حالت عمومی‌تر با استفاده از دستگاه مختصه‌ی کلی $(X\ ,\ Y)$ مشخص کرد. شکل ۳ هر دو نوع دستگاه مختصه‌ی محلی و کلی را نمایش می‌دهد. تغییر دستگاه از مختصه‌ی محلی به کلی با استفاده از رابطه‌ی زیر امکان پذیر است:

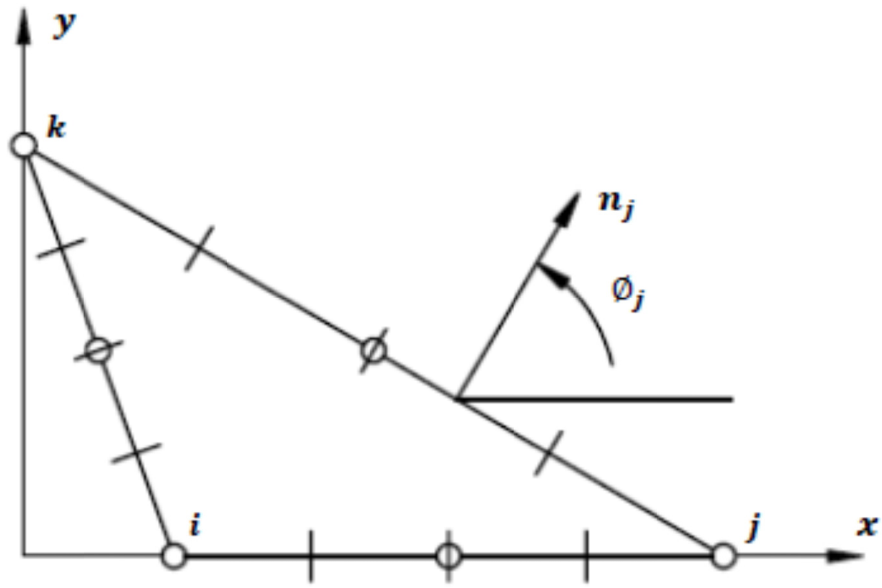
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} + [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \qquad (۳)$$

در رابطه‌های کنونی، ماتریس تبدیل [T] به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[T] = \begin{bmatrix} cos\, \emptyset_0 & -\, sin\, \emptyset_0 \\ sin\, \emptyset_0 & cos\, \emptyset_0 \end{bmatrix} \qquad (۴)$$



شکل ۳- دستگاه مختصه‌ی کلی و محلی



شکل ۴- تعریف بردار عمود

شکل ۴ بردار عمود بر پهلوی j-k را نشان می‌دهد. مشتق خیز در راستای عمود بر پهلو از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n_j} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n_j} = \frac{\partial w}{\partial x} cos\, \emptyset_j + \frac{\partial w}{\partial y} sin\, \emptyset_j \quad (۵)$$

رابطه‌ی ۵ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \{n_j\} \quad (۶)$$

در این‌جا، بردار عمود بر پهلوی j-k به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{n_j\} = \pm \begin{Bmatrix} cos\, \emptyset_j \\ sin\, \emptyset_j \end{Bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \begin{Bmatrix} y_k - y_j \\ x_j - x_k \end{Bmatrix} \quad (۷)$$

در رابطه‌ی کنونی، (x_j, y_j) و (x_k, y_k)، به ترتیب، مختصه‌های گره‌های j و k هستند.

۴- تابع‌های شکل

هر سه جزء تابع خیز درجه‌ی چهار کامل دارند. به سخن دیگر، می‌پندارند که تابع خیز جزء صفحه‌ی خمشی به صورت زیر نوشته شود:

$$w = \{\alpha\}^T\{P\} \quad (۸)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{15}\}^T \quad (۹)$$

$$\{P\} = \{1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2 \;\; x^3 \;\; x^2y \;\; xy^2 \;\; y^3 \;\; x^4 \;\; x^3y \;\; x^2y^2 \;\; xy^3 \;\; y^4\}^T \quad (۱۰)$$

یادآوری می‌نماید که در رابطه‌سازی جزء‌های پیشنهادی، افزون بر درجه‌های آزادی خیز، از دوران گرد محورهای کلی و همچنین از شیب خیز در جهت عمود بر پهلوها استفاده می‌شود. برای یافتن تابع‌های دوران باید مشتق بردار P نسبت به مختصه‌های x و y را به‌کار برد. افزون بر این، می‌توان از ماتریس دوران برای یافتن دوران گرد محورهای کلی بهره جست. با جای‌گذاری رابطه‌ی ۸ در ۶، مشتق عمود بر پهلوی j-k همانند زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \{\alpha\}^T\{Q_j\} \quad (۱۱)$$

بر پایه‌ی آنچه درج شد، بردار $\{Q_j\}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{Q_j\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\{P\} \quad \frac{\partial}{\partial y}\{P\}\right]\{n_j\} \quad (۱۲)$$

با کاربرد رابطه‌های ۸ و ۱۱، بردار عامل‌های گرهی پهلوی j-k پیدا می‌شود:

$$\{\delta^e\}_j = [C]_j\{\alpha\} \quad (۱۳)$$

در رابطه‌ی کنونی، ماتریس $[C]_j$ به صورت زیر بر پا می‌گردد:

$$[C]_j = \left[\{P_j\} \;\; \{Q_{ja}\} \;\; \{P_{jb}\} \;\; \{Q_{jb}\} \;\; \{Q_{jc}\}\right]^T \quad (۱۴)$$

این ماتریس ۱۵ ستون و ۵ سطر دارد. سطرهای یکم و سوم با جاگذاری مختصه‌های گره‌های j و jb در چندجمله‌ای $\{P\}$ به دست می‌آیند. سطرهای دوم، چهارم و پنجم به $\{Q_j\}$ و نیز به موقعیت گره‌های ja، jb و jc وابسته می‌باشند. با تشکیل ماتریس‌های مشابه برای دو پهلوی دیگر مثلث، رابطه‌ی زیر را می‌توان برای درون‌یابی عامل‌های جزء نوشت:

$$\{\delta^e\} = [C]\{\alpha\} \quad (۱۵)$$

$$[C] = [[C]_1 \quad [C]_2 \quad [C]_3]^T \quad (۱۶)$$

این ماتریس، مربعی و ۱۵×۱۵ است و هندسه‌ی جزء را مشخص می‌کند. با حل معادله‌ی ۱۵ نسبت به $\{\alpha\}$ و جای‌گزینی آن در رابطه‌ی ۸، تابع‌های شکل همانند زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$[N] = \{P\}^T[\bar{C}] \quad (۱۷)$$

در رابطه‌ی کنونی، $[\bar{C}]$ وارون ماتریس $[C]$ می‌باشد.

۵- ماتریس کرنش

در این بخش، به چگونگی یافتن ماتریس کرنش پرداخته خواهد شد. آشکار است که هر درایه از بردار $\{P\}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_i = x^{m(i)}y^{n(i)}(i = 1,2,\dots,15) \quad (۱۸)$$

$$\begin{cases} m(i) = 1 + \beta(i) - i \\ n(i) = \alpha(i) - \beta(i) + i \end{cases} \quad (۱۹)$$

$$\begin{cases} \alpha(i) = INT\left(\dfrac{\sqrt{8i-7}-3}{2}\right) \\ \beta(i) = \dfrac{(\alpha(i)+1)(\alpha(i)+4)}{2} \end{cases} \quad (۲۰)$$

به صورت مشابه، هر درایه از چندجمله‌ای $\{Q_j\}$ صورت زیر را دارد:

$$Q_{ij} = [m(i)x^{m(i)-1}y^{n(i)} \quad n(i)x^{m(i)}y^{n(i)-1}]\{n_j\} \quad (۲۱)$$
$$(i = 1,2,\dots,15)$$

در این رابطه‌سازی، ماتریس کرنش با $[B]$ نشان داده شده است. این ماتریس کرنش‌ها را بر حسب تغییرمکان‌های گرهی حساب می‌کند:

$$[B] = \{L\}[N] \quad (۲۲)$$

عملگر $\{L\}$ برای صفحه‌های خمشی به‌صورت زیر است:

$$\{L\} = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right\}^T \quad (۲۳)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۷ در ۲۲، ماتریس کرنش به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$[B] = [\acute{B}][\bar{C}] \tag{۲۴}$$

$$[\acute{B}] = \{L\}\{P\}^T \tag{۲۵}$$

در اینجا، $[\acute{B}]$ را ماتریس کمکی می‌گویند و با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$[\acute{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 12x^2 & 6xy & 2y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 & 2x^2 & 6xy & 12y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 0 & 6x^2 & 8xy & 6y^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

می‌توان درایه‌های $\acute{b}_{ij}$ در این ماتریس را به صورت عمومی زیر نوشت:

$$\acute{b}_{ij} = r_{ij}\, x^{m_{ij}} y^{n_{ij}} \quad (i = 1,2,3\, ;\, j = 1,2,\dots,15) \tag{۲۷}$$

ضریب‌های r_{ij} و عامل‌های m_{ij} و n_{ij} در جدول ۱ مشخص شده‌اند.

جدول ۱- عامل‌های ماتریس کرنش جزء

i	r_{ij}	m_{ij}	n_{ij}
1	$m(j)[m(j)-1] \geq 0$	$m(j)-2 \geq 0$	$n(j)$
2	$n(j)[n(j)-1] \geq 0$	$m(j)$	$n(j)-2 \geq 0$
3	$2m(j)\, n(j)$	$m(j)-1 \geq 0$	$n(j)-1 \geq 0$

۶-ماتریس سختی

رابطه‌ی کلی برای یافتن ماتریس سختی جزء، $[K^e]$، به‌صورت زیر است:

$$[K^e] = \int_\Omega [B]^T[\hat{D}][B]\, d\Omega \tag{۲۸}$$

در رابطه‌ی کنونی، $[\hat{D}]$ نماینده‌ی ماتریس کشسانی برای صفحه‌های خمشی است و عامل Ω سطح جزء را مشخص می‌کند. با جای‌گذاری ماتریس کرنش $[B]$ از معادله‌ی (۲۴)، در رابطه‌ی (۲۸)، ماتریس سختی برای جزء به‌دست می‌آید. نتیجه‌ی کار به صورت زیر خواهد بود:

$$[K^e] = [\bar{C}]^T[\acute{K}^e][\bar{C}] \tag{۲۹}$$

در این جا، $[\acute{K}^e]$ ماتریس کمکی نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\acute{K}^e] = \int_\Omega [\acute{B}]^T[\hat{D}][\acute{B}]\, d\Omega \tag{۳۰}$$

با مشخص بودن درایه‌های ماتریس $[\hat{D}]$، درایه‌های ماتریس $[\acute{K}^e]$ را می‌توان به‌دست آورد. رابطه‌ی زیر این کار را انجام می‌دهد:

$$\acute{k}_{ij}^e = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{3}\left(\acute{b}_{kj}\sum_{l=1}^{3}\acute{b}_{li}d_{lk}\right)\right] d\Omega = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\acute{b}_{kj}\acute{b}_{li}d_{lk}\right) d\Omega \tag{۳۱}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۷) در (۳۱)، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\acute{k}_{ij}^e = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} d_{lk}r_{kj}r_{li}x^{(m_{kj}+m_{li})}\, y^{(n_{kj}+n_{li})}\right) d\Omega \tag{۳۲}$$

شایان توجه است، عامل‌های d_{lk}، r_{kj} و r_{li} مستقل از مختصه‌های x و y هستند. از این رو، رابطه‌ی کنونی را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\acute{k}_{ij}^e = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} d_{lk}r_{kj}r_{li}J_{ijkl} \tag{۳۳}$$

$$J_{ijkl} = \int_\Omega x^{(m_{kj}+m_{li})}y^{(n_{kj}+n_{li})}\, d\Omega \qquad J_{ijkl} = y_3^{n+1}(x_2^{m+1} - x_1^{m+1})\frac{m!\,n!}{(m+n+2)!} \tag{۳۴}$$

در این رابطه، m و n عددهای صحیح هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} m = m_{kj} + m_{li} \\ n = n_{kj} + n_{li} \end{cases} \quad (۳۵)$$

۷-تنش‌ها

گشتاورها و یا تنش‌های تعمیم‌یافته را می‌توان در هر نقطه در داخل جزء به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\hat{\varepsilon}\} = \quad (۳۶)$$

$$[D]\{\hat{\varepsilon}\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

آشکار است که برای یافتن گشتاورهای گرد محورهای مختصه‌های کلی باید از ماتریس دوران زیر استفاده نمود:

$$\begin{bmatrix} M_X & M_{XY} \\ M_{XY} & M_Y \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix}[T]^T \quad (۳۷)$$

به صورت مشابه، می‌توان رابطه‌های جزءهای $N13$ و $N6$ را ارئه نمود. برای انجام این کار، لازم است ماتریس $[\bar{C}]$ برحسب درجه‌های آزادی جزءهای مزبور برپا گردد.

۸-ارزیابی رفتار جزء

شیوه‌ی اجزای محدود یک روش تقریبی است و رفتار هر جزء نو باید در تحلیل‌های گوناگون وارسی شود. از سوی دیگر، مسأله‌های کاربردی بزرگ هستند و نمی‌توان اثر عامل‌های گوناگون را به صورت جدا جدا بررسی نمود. از این رو، مسأله‌های سنگ‌نشانه توسط پژوهشگران به کار می‌روند. یکی از این مسأله‌ها آزمون وصله است. در این بخش، رفتار جزءها با اجرای آزمون‌های وصله‌ی یک و چند جزئی و همچنین، سامانه‌های سنگ‌نشانه‌ی دیگر بررسی می‌شوند. آن گونه که شکل ۵ نشان می‌دهد، در این بخش، تنش‌ها در چهار نقطه‌ی گوس حساب خواهد شد.

۸-۱- آزمون وصله‌ی یک جزئی

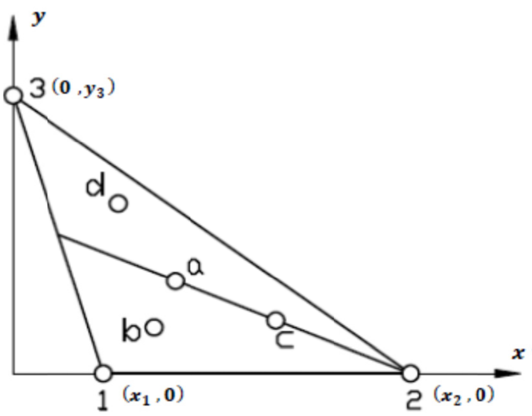
جزء‌های محدود باید بتوانند حالت حرکت جسم سخت و تنش یکنواخت را به درستی الگوسازی نمایند. به سخن دیگر، اگر شرط‌های مرزی یا نیرویی این حالت‌ها به یک جزء یا ترکیبی از جزءها وارد گردد، پاسخ اجزای محدودی باید تنش‌های صفر را در حالت حرکت جسم سخت و گشتاورهای ثابت را در سراسر جزء به دست دهد. در این بخش، آزمون وصله برای سازه‌ی یک جزئی اجرا می‌شود. برای انجام این آزمون، پنج گونه جزء، همانند شکل ۶، به کار می‌رود. در این آزمون، ضریب کشسانی، $E = ۱۰^{۱۱}$، ضریب پواسن، $\nu = ۰/۳$ و ضخامت جزء، $t = ۰/۰۱$ می‌باشد. در حالت حرکت جسم سخت، $w_1 = ۰/۰۴$، $w_2 = ۰/۰۱$ و $w_3 = ۰/۰۲$ پنداشته می‌شود. همچنین، در حالت کرنش ثابت، خیزها برابر با $w_1 = w_2 = w_3 = ۰$ و گشتاور یکنواخت در اطراف لبه‌های مثلث برابر با $M = ۱۰۰۰$ است. با بررسی این جزءها نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید که نشان می‌دهند هر سه جزء پیشنهادی توانایی الگوسازی درست حالت حرکت جسم سخت و نیز کرنش ثابت را دارند:

۱- حرکت جسم سخت: برنامه‌ی نویسندگان گشتاورهای زیر را در هر نقطه‌ی گوس نتیجه می‌دهد:

$$M_X = M_Y = M_{XY} = ۰/۰۰$$

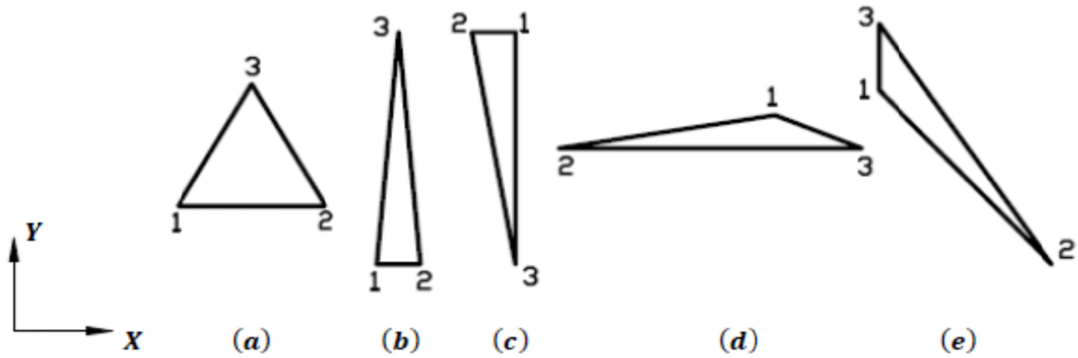
۲- حالت کرنش ثابت: مقدارهای زیر در هر نقطه‌ی گوس حساب می‌شوند:

$$M_X = M_Y = ۱۰۰۰/۰۰ \quad ; \quad M_{XY} = ۰/۰۰$$



نقطه‌های گوس	مختصه‌های سطحی			مختصه‌های دکارتی در دستگاه محلی	
	L_1	L_2	L_3	x	y
a	۱/۳	۱/۳	۰/۳	(x_1+x_2)/۳	y_3/۳
b	۰/۶	۰/۲	۰/۲	۰/۶ x_1 + ۰/۲ x_2	۰/۲ y_3
c	۰/۲	۰/۶	۰/۲	۰/۲ x_1 + ۰/۶ x_2	۰/۲ y_3
d	۰/۲	۰/۲	۰/۶	۰/۲ x_1 + ۰/۲ x_2	۰/۶ y_3

شکل ۵- چهار نقطه‌ی گوس که تنش‌ها در آن‌ها حساب می‌شوند



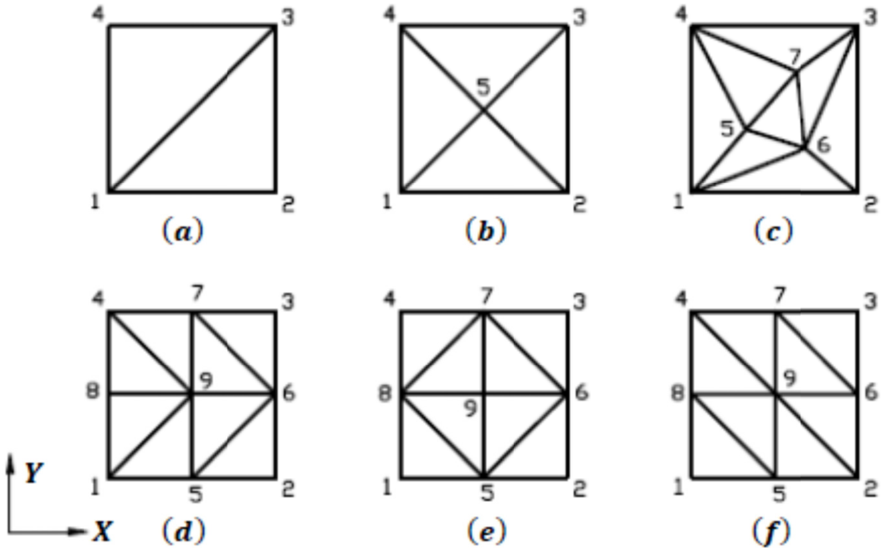
های گره‌یمختصه		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	x	−۱/۰	−۱/۰	۰/۰	۰/۵	−۶/۰
	y	۰/۰	۰/۰	۸/۰	۰/۲	۶/۰
2	x	۱/۰	۱/۰	−۱/۰	−۱/۰	۰/۰
	y	۰/۰	۰/۰	۸/۰	۰/۰	۰/۰
3	x	۰/۰	−۵/۰	۰/۰	۱/۰	−۶/۰
	y	۱/۷۳۲۱	۸/۰	۰/۰	۰/۰	۸/۰

شکل ۶- آزمون وصله‌ی یک جزئی

۸-۲- آزمون وصله با چند جزء

شکل ۷ شش شبکه‌بندی گوناگون از سازه‌ی صفحه‌ی خمش مربعی را نشان می‌دهد که در آزمون وصله‌ی چندجزئی به کار می‌روند. مقدارهای ضریب کشسانی، ضریب پواسن، ضخامت و تغییرمکان‌ها در حالت حرکت جسم سخت و کرنش ثابت، مانند آزمون وصله‌ی یک

جزئی پنداشته می‌شوند. درازای هر پهلوی صفحه‌ی مربعی a=۲ می‌باشد. جدول ۲ مقدارهای بیشینه و کمینه‌ی تغییرمکان‌ها و گشتاورهای خمشی را در این سازه‌ها نشان می‌دهد. آشکار است که تغییر مکان‌های مرکز صفحه و میان پهلوی ۲-۱ همان تغییرمکان‌های حرکت جسم سخت و کرنش ثابت هستند. گشتاورهای درون جزءها اختلاف بسیار کمی بین ۰/۰۰۵+ و ۰/۰۰۶- با مقدارهای دقیق دارند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که جزءها، آزمون وصله‌ی چند جزئی را هم برقرار می‌کنند.



شکل ۷- آزمون وصله با چند جزء

جدول ۲- نتیجه‌های آزمون وصله با چند جزء

عامل‌ها	حرکت جسم صلب			کرنش ثابت		
	مقدار دقیق	بیشینه‌ی مقدار محاسبه شده	کمینه‌ی مقدار محاسبه شده	مقدار دقیق	بیشینه‌ی مقدار محاسبه شده	کمینه‌ی مقدار محاسبه شده
تغییرمکان در مرکز صفحه‌ی مربعی	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۸۴	۰/۰۸۴	۰/۰۸۴
تغییرمکان در میان پهلوی لبه‌ی ۲-۱	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۴۲	۰/۰۴۲	۰/۰۴۲
گشتاور M_x در نقطه‌های گوس	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۳-	۱۰۰۰	۱۰۰۰/۰۰۵	۹۹۹/۹۹۷
گشتاور M_y در نقطه‌های گوس	۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱-	۱۰۰۰	۱۰۰۰/۰۲	۹۹۹/۹۹۴
گشتاور M_{xy} در نقطه‌های گوس	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱-	۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱-

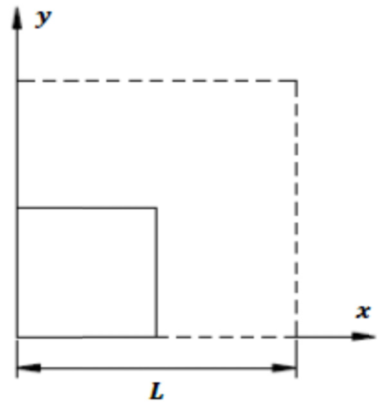
۹-نمونه‌های عددی

در این بخش، شماری نمونه‌ی عددی با شکل، شبکه‌بندی، بارگذاری و شرط‌های مرزی مختلف حل خواهد شد. این سازه‌ها، همگرایی جزءهای پیشنهادی به پاسخ درست را نشان می‌دهند. این مسأله‌های سنگ نشانه‌ی صفحه‌ی خمشی، همگی از مرجع‌های معتبر انتخاب شده‌اند. با انجام این کار، نتیجه‌های عددی دیگر پژوهشگران با جزءهای پیشنهادی مقایسه می‌شوند.

۹-۱- صفحه‌ی مربعی با تکیه گاه ساده

در آغاز، یک صفحه‌ی مربع شکل با تکیه‌گاه‌های ساده و یک بار منفرد در مرکز آن تحلیل می‌شود. درازای هر

پهلوی سازه برابر L و بار متمرکز آن P است. به‌دلیل وجود تقارن، فقط یک‌چهارم صفحه شبکه‌بندی و حل می‌گردد. شکل ۸ صفحه‌ی مربعی و یک‌چهارم آن را نشان می‌دهد.



شکل ۸- صفحه‌ی مربعی با تکیه‌گاه ساده

با توجه به تقارن سازه، شرط‌های مرزی یک‌چهارم صفحه وارد تحلیل می‌شوند. از این‌رو، در لبه‌ی موازی محور y، دوران گرد محور y صفر است و در لبه‌ی موازی محور x، دوران گرد محور x صفر خواهد بود. بر این پایه، شرط‌های مرزی برای این صفحه به قرار زیر می‌باشد:

در لبه‌ی موازی محور y: $w = 0 \;,\; \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \;,\; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

در لبه‌ی موازی محور y: $w = 0 \;,\; \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \;,\; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

در لبه‌ی موازی محور y: $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

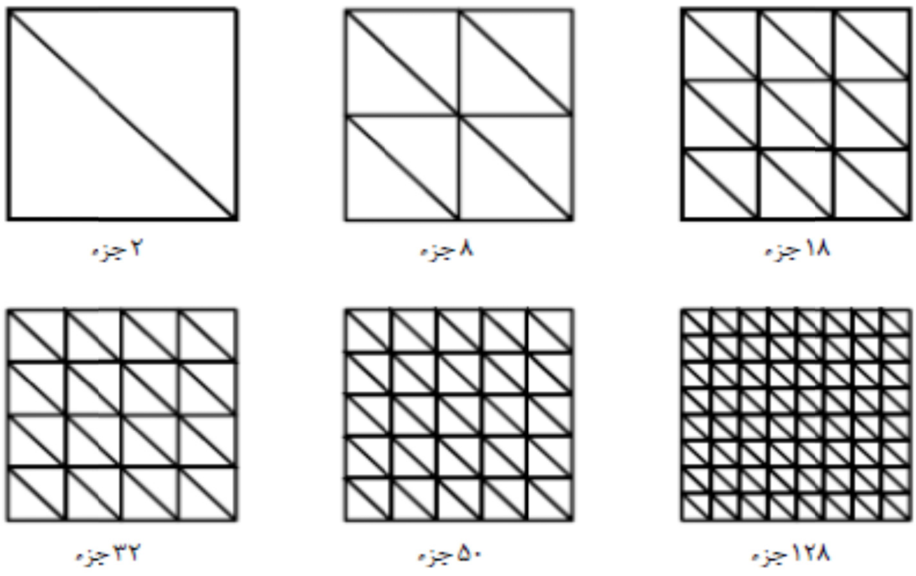
در لبه‌ی موازی محور y: $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

شکل ۹ چند گونه شبکه‌بندی برای این صفحه‌ی مربع شکل را نشان می‌دهد. یادآوری می‌کند، مقدار خیز مرکز این صفحه از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید[۱۸]:

$$w_c = 0.0116\frac{PL^2}{D}$$

در این رابطه، P نیروی متمرکز وارد بر مرکز سازه و L طول یک پهلوی صفحه است. سفتی خمشی صفحه، برابر با D است. این عامل برحسب E، ضریب کشسانی، t، ضخامت صفحه و ν، نسبت پواسن، به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$D = \frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)}$$

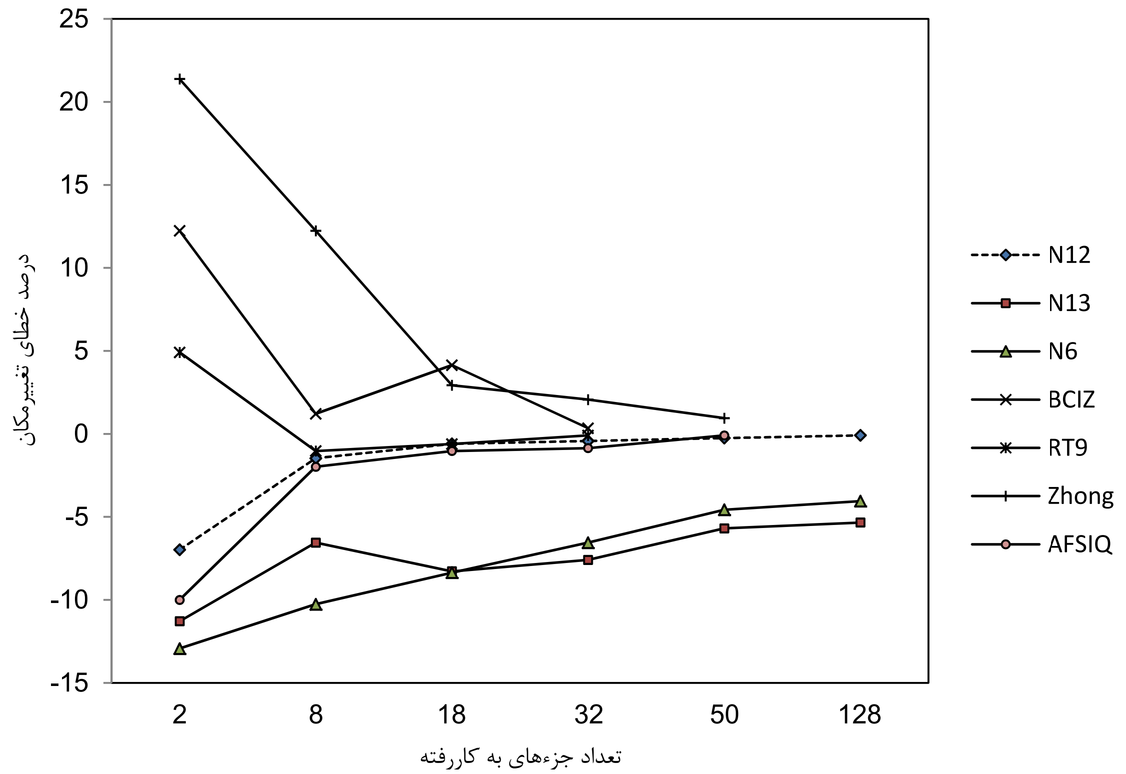


شکل ۹- شبکه‌بندی صفحه‌ی خمشی مربعی

در جدول ۳، تغییرمکان مرکز صفحه برای جزء‌های پیشنهادی و شماری از جزء‌های دیگر پژوهشگران درج گردیده است. در ستون یکم جدول، نام جزء و یا نام پژوهشگر آن می‌آید. در ستون‌های بعدی شمار جزء‌ها، و در ستون آخر، مرجع مربوط به هر جزء وارد شده‌اند. برای جزء‌هایی که در جدول ۳ درج گردیده‌اند، خم همگرایی خیز مرکز صفحه در شکل ۱۰ رسم شده است.

جدول ۳- ضریب خیز مرکز صفحه‌ی مربعی **با** تکیه‌گاه ساده و بار متمرکز

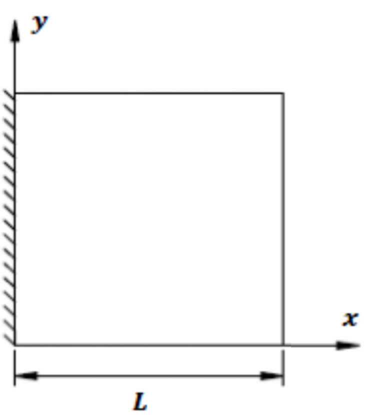
جزءها	تعداد جزءها ۲	۸	۱۸	۳۲	۵۰	۱۲۸	مرجع
N12	۰/۰۱۰۷۹	۰/۰۱۱۴۳	۰/۰۱۱۵۳	۰/۰۱۱۵۵	۰/۰۱۱۵۷	۰/۰۱۱۵۹	
N13	۰/۰۱۰۲۹	۰/۰۱۰۸۴	۰/۰۱۰۶۴	۰/۰۱۰۷۲	۰/۰۱۰۹۴	۰/۰۱۰۹۸	
N6	۰/۰۱۰۱	۰/۰۱۰۴۱	۰/۰۱۰۶۳	۰/۰۱۰۸۴	۰/۰۱۱۰۷	۰/۰۱۱۱۳	
BCIZ	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۱۷۴	۰/۰۱۲۰۸	۰/۰۱۱۶۴			[۱۹]
RT9	۰/۰۱۲۱۷	۰/۰۱۱۴۸	۰/۰۱۱۵۳	۰/۰۱۱۵۹			[۲۰]
Zhong	۰/۰۱۴۰۸	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۱۹۷	۰/۰۱۱۸۴	۰/۰۱۱۷۱		[۲۱]
AFSIQ	۰/۰۱۰۴۴	۰/۰۱۱۳۷	۰/۰۱۱۴۸	۰/۰۱۱۵۰	۰/۰۱۱۵۹		[۲۲]
Exact			۰/۰۰۱۶				[۱۸]



شکل ۱۰- مقایسه‌ی همگرایی پاسخ خیز صفحه‌ی مربعی با دیگر جزءها

۲-۹- صفحه‌ی مربعی طره‌ای

در این مسأله‌ی سنگ نشانه، یک صفحه‌ی مربعی طره‌ای تحلیل می‌شود. این سازه زیر اثر بار گسترده‌ی یکنواخت با شدت q است. درازای هر پهلوی صفحه L می‌باشد. شکل ۱۱ این صفحه‌ی مربعی طره‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱- صفحه‌ی مربعی طره‌ای

شرط‌های مرزی این سازه به قرار زیر می‌باشد:

در روی محور y $\quad w = 0 \;,\; \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \;,\; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$

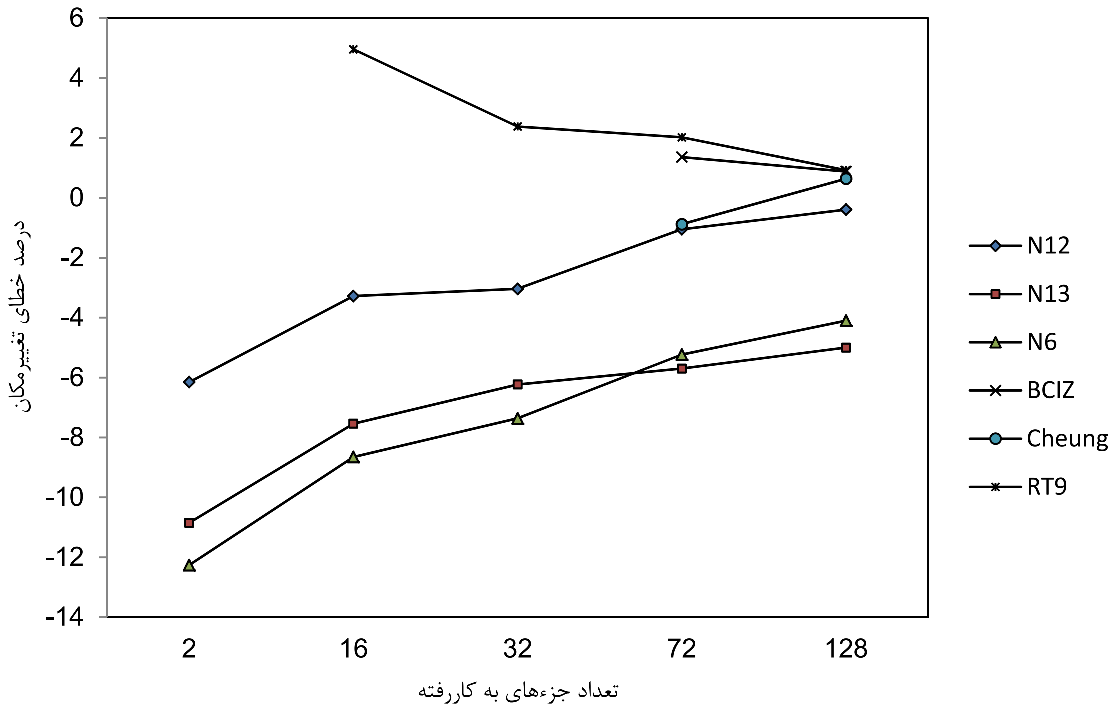
مقدار خیز سر آزاد سازه از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود [۱۸]:

$$w_c = 0.125 \frac{q\,L^4}{D}$$

جدول ۴ مقدار تغییرمکان در لبه‌ی آزاد صفحه برای سه جزء پیشنهادی و نیز سه جزء دیگر پژوهشگران را نشان می‌دهد. همگرایی تغییرمکان در لبه‌ی آزاد سازه برای جزءهایی که در جدول ۴ درج گردیده‌اند، در شکل ۱۲ رسم شده است.

جدول ۴- ضریب خیز لبه‌ی آزاد صفحه‌ی مربعی زیر بار گسترده

جزءها	تعداد جزءها					مرجع
	۸	۱۶	۳۲	۷۲	۱۲۸	
N12	۰/۱۱۷۳۱	۰/۱۲۰۹	۰/۱۲۱۱۲	۰/۱۲۳۶۹	۰/۱۲۴۵۱	
N13	۰/۱۱۱۴۴	۰/۱۱۵۵۸	۰/۱۱۷۲۱	۰/۱۱۷۸۸	۰/۱۱۸۷۵	
N6	۰/۱۰۹۶۸	۰/۱۱۴۱۹	۰/۱۱۵۸	۰/۱۱۸۴۶	۰/۱۱۹۸۸	
BCIZ				۰/۱۲۶۷	۰/۱۲۶۱	[۱۹]
Cheung				۰/۱۲۳۹	۰/۱۲۵۸	[۲۳]
RT9		۰/۱۳۱۲	۰/۱۲۷۹۸	۰/۱۲۷۵۲	۰/۱۲۶۱۵	[۲۰]
Exact			۰/۱۲۵			[۱۸]



شکل ۱۲- همگرایی خیز لبه‌ی آزاد صفحه‌ی مربعی طره‌ای

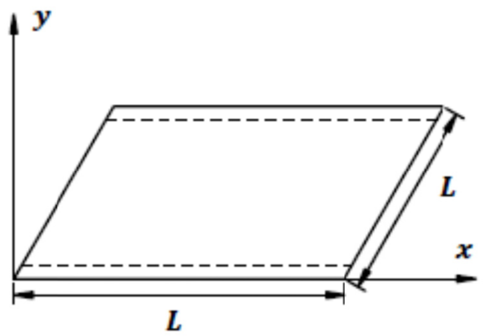
۹-۳- صفحه‌ی مورب با تکیه‌گاه ساده

شکل ۱۳، یک صفحه‌ی مورب با زاویه‌ی ۶۰ درجه را نشان می‌دهد. این سازه در دو لبه، روی محور x و موازی محور x ، دارای تکیه‌گاه ساده و در دو لبه‌ی دیگر آزاد می‌باشد. بار وارد بر این صفحه، یک بار گسترده‌ی

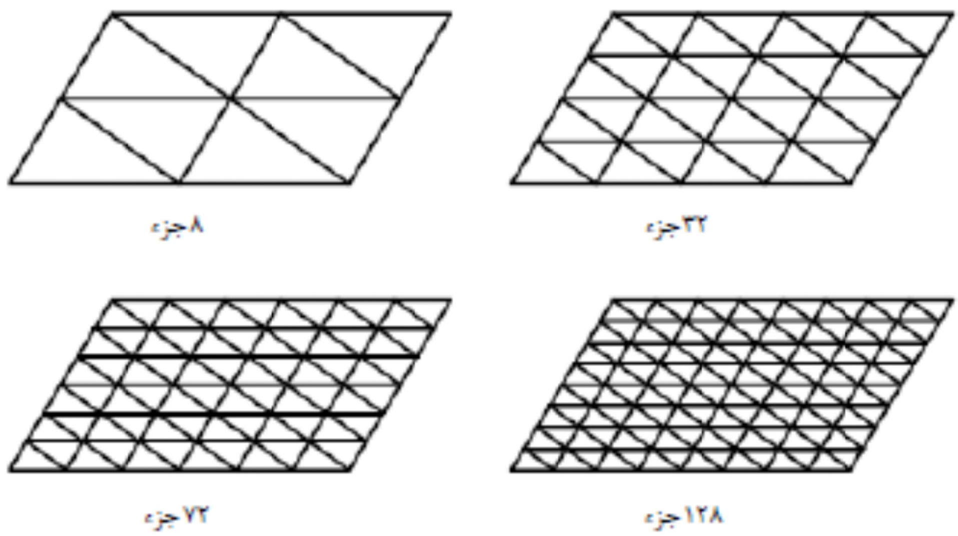
یکنواخت با شدت q خواهد بود. شرط‌های مرزی برای دو لبه‌ی دارای تکیه‌گاه به صورت زیر است:

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

شکل ۱۴، چند گونه شبکه‌بندی که در تحلیل این صفحه‌ی مورب استفاده می‌شود را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳- صفحه‌ی مورب با تکیه‌گاه ساده



شکل ۱۴- شبکه‌بندی برای صفحه‌ی مورب

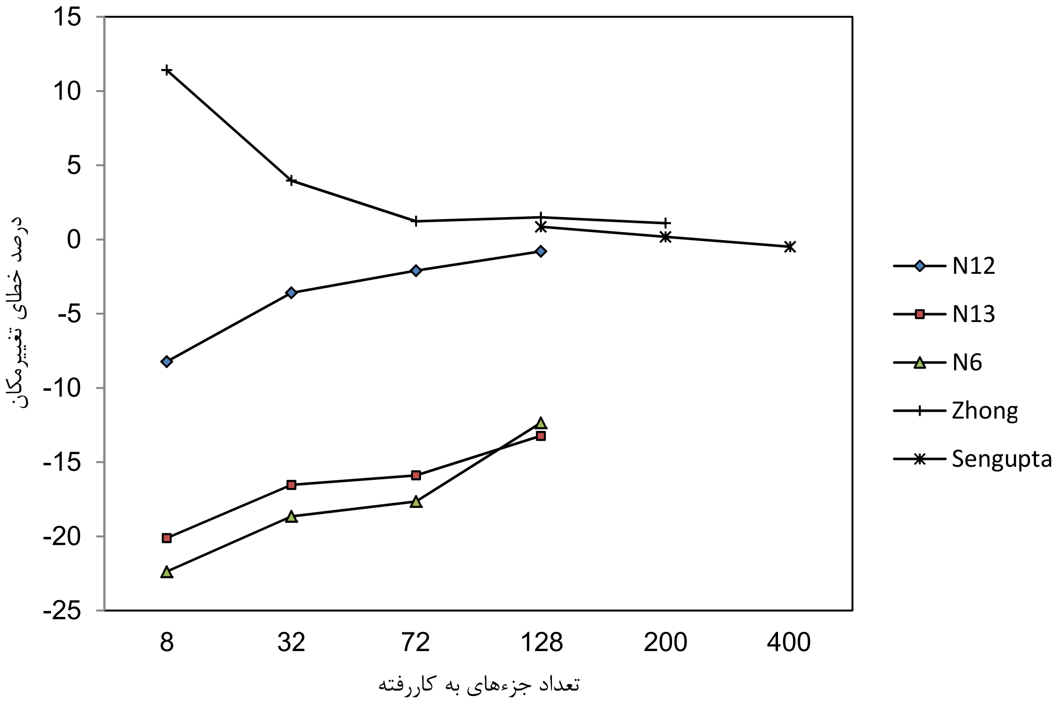
در جدول ۵ نتیجه‌های خیز مرکز صفحه برای سه جزء پیشنهادی و سه جزء از دیگر مرجع‌ها درج گردیده است. مقدار تغییرمکان در مرکز سازه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید[۲۱]:

$$w_c = 0.7945 \times 10^{-2} \frac{q\,L^4}{D}$$

همگرایی تغییرمکان برای مرکز صفحه در شکل ۱۵ رسم شده است.

جدول ۵- ضریب خیز در مرکز صفحه‌ی مورب با بار گسترده

جزءها	تعداد جزءها: ۸	۳۲	۷۲	۱۲۸	۲۰۰	۴۰۰	مرجع
N12	۰/۷۲۹۱۱	۰/۷۶۵۹۸	۰/۷۷۷۸۱	۰/۷۸۸۱۷			
N13	۰/۶۳۴۶۵	۰/۶۶۳۱۷	۰/۶۶۸۲۵	۰/۶۸۹۳۹			
N6	۰/۶۱۶۶۱	۰/۶۴۶۳۳	۰/۶۵۴۲۷	۰/۶۹۶۳۱			
Zhong	۰/۸۸۵۲	۰/۸۲۶	۰/۸۰۴۳	۰/۸۰۶۴	۰/۸۰۳۲		[۲۱]
Sengupta				۰/۸۰۱۳	۰/۷۹۵۹	۰/۷۹۰۶	[۲۴]
Exact			۰/۷۹۴۵				[۲۱]



شکل ۱۵- همگرایی خیز مرکز صفحه‌ی مورب با تکیه‌گاه ساده

۹-۴- صفحه‌ی خمشی دایره‌ای

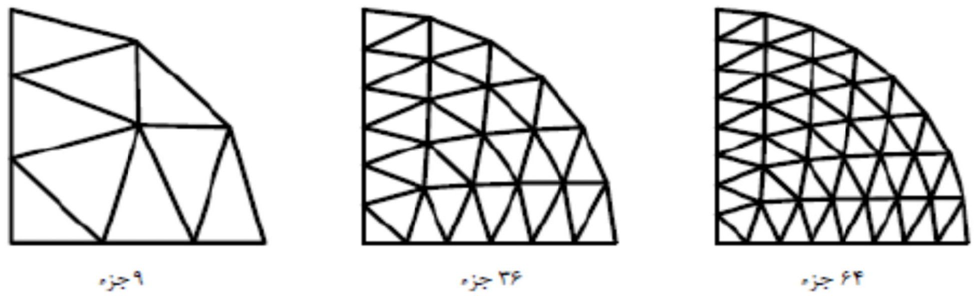
در این مثال، یک صفحه‌ی دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار و زیر اثر بار گسترده‌ی یکنواخت تحلیل می‌گردد. به دلیل وجود تقارن در سازه، فقط یک‌چهارم صفحه تحلیل خواهد شد. شعاع صفحه a و شدت بار وارد بر آن q می‌باشد.

مقدار خیز مرکز صفحه از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [۱۸]:

$$w_c = 1.00228\frac{q\,a^4}{D}$$

چند گونه شبکه‌بندی که در این مثال مورد استفاده قرار می‌گیرد، در شکل ۱۶ نمایش داده شده است.

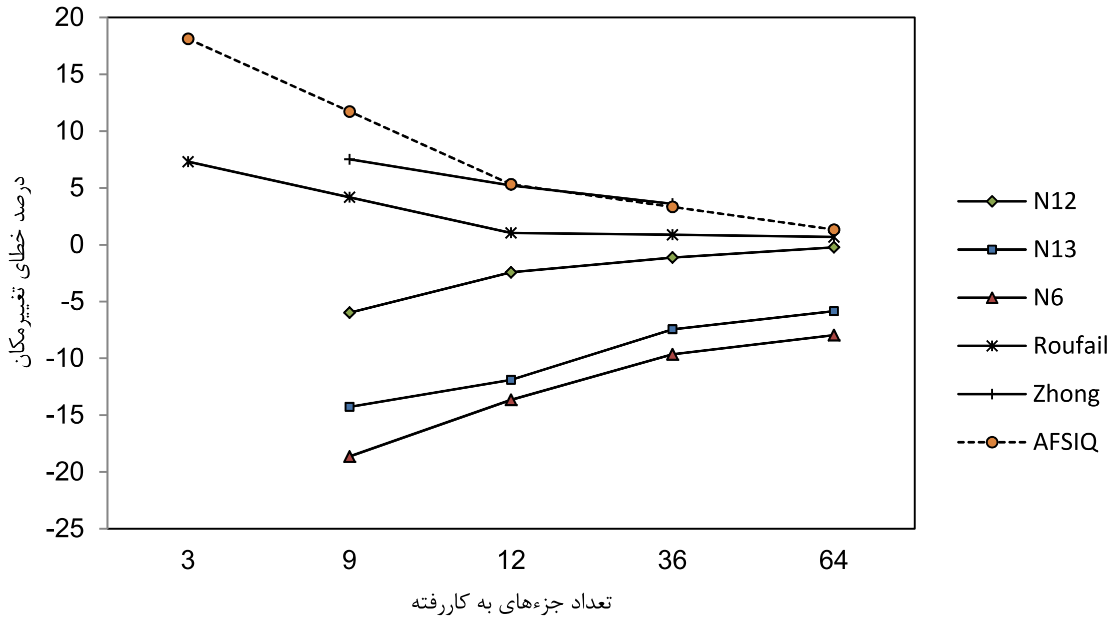
پاسخ‌های خیز مرکز صفحه در جدول ۶ و نمودارهای همگرایی تغییرمکان در شکل ۱۷ آمده‌اند.



شکل ۱۶- شبکه‌بندی برای صفحه‌ی خمشی دایره‌ای

جدول ۶- خیز مرکز صفحه‌ی خمشی دایره ای

جزءها	تعداد جزءها					مرجع
	۳	۹	۱۲	۳۶	۶۴	
N12		۰/۹۴۲۳۴	۰/۹۷۷۹۲	۰/۹۹۰۹۵	۰/۹۹۹۹۷	
N13		۰/۸۵۹۲۵	۰/۸۸۳۱۱	۰/۹۲۷۶۱	۰/۹۴۳۶۵	
N6		۰/۸۱۵۴۶	۰/۸۶۵۷	۰/۹۰۵۶۶	۰/۹۲۲۶	
Roufaeil	۱/۰۷۵۵۵	۱/۰۴۴۱۸	۱/۰۱۲۷	۱/۰۱۱۱	۱/۰۰۹۱	]۲۵[
Zhong		۱/۰۷۷۶۵	۱/۰۵۴۶	۱/۰۳۸۴۶		]۲۱[
AFSIQ	۱/۱۸۳۹۴	۱/۱۱۹۸۵	۱/۰۵۵۷	۱/۰۳۵۶۶	۱/۰۱۵۶۱	]۲۲[
Exact			۱/۰۰۲۲۸			]۱۸[



شکل ۱۷- همگرایی خیز مرکز صفحه‌ی خمشی دایره‌ای

۱۰- نتیجه‌گیری

سه جزء مثلثی برای صفحه‌های خمشی در این مقاله رابطه‌سازی شد. این جزءها از یک چندجمله‌ای درجه چهار کامل برای تابع تغییرمکان استفاده می‌کنند. افزون بر رابطه‌سازی جزءها، ارزیابی رفتار آن‌ها نیز انجام پذیرفت. نتیجه‌های آزمون وصله‌ی یک و چند جزئی آشکار کرد که جزءها آزمون وصله را به خوبی پشت سر می‌گذارند. همچنین، این جزءها برای حل چند مسأله‌ی سنگ نشانه‌ی صفحه‌ی مربعی، مورب و دایره‌ای به کار رفتند. پاسخ‌های برنامه‌ی نویسندگان نشان داد که این جزءهای نو توانایی خوبی در همگرایی به جواب دقیق دارند. خاطرنشان می‌کند که سه جزء مثلثی پیشنهادی، دارای توانایی یکسانی نیستند. از میان این رابطه‌سازی‌ها، بهترین جزء، *N12* و پس از آن، به ترتیب، جزءهای *N13* و *N6* قرار دارند. مقایسه‌ی جزء *N12* با جزءهای دیگر پژوهشگران آشکار کرد که این جزء یکی از بهترین خم‌های همگرایی را دارد. باید افزود که نویسندگان، نمونه‌های عددی بسیاری را آزموده‌اند که به‌دلیل محدودیت حجم مقاله، نمی‌توان همه‌ی آن‌ها را ارائه کرد. با این حال، همه‌ی پاسخ‌های برنامه‌ی نویسندگان، نتیجه‌های مشابهی را تأیید می‌کنند.

مراجع

[1] Zienkiewicz, O.C., Taylor, T. L., Zhu, J.Z. (2005), “The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals”. 6^{th} Ed., Elsevier Pte. Ltd., Singapore.

[2] Rezaiee-Pajand, M., Akhtary, M. (1998), “A family of thirteen–node plate bending triangular elements”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14, pp. 529-537.

[۳] رضایی‌پژند، م.، اختری، م.ر. (۱۳۷۵). مطالعه‌ی چندین جزء مثلثی ۶ گرهی برای صفحه‌ی خمشی. نشریه‌ی مهندسی، دانشکده‌ی فنی دانشگاه تبریز، شماره‌ی ۱۵، ص ۱۷ تا ۳۸.

[۴] رضایی‌پژند، م.، سرافرازی، س.ر. (۱۳۷۸). وارد کردن اثر برش در اجزای تیری و صفحه‌ای نازک. نشریه‌ی علمی- پژوهشی امیرکبیر، دوره ۱۱، شماره‌ی۴۲، ص ۱۳۰ تا ۱۴۷.

[5] Zhongxu, T., Wang, D. (2011), “A method for treating nonconforming thin plate bending problems”. Intl. J. Fin. Elem. Anal. Des., Vol. 47, pp. 200-207.

[6] Nguyen-Xuan, H., Liu, G.R., Thai-Hoang, C. (2010), “An edge-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates”. Intl. J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 199, pp. 471-489.

[7] Nguyen-Thanha, N., Rabczuka, T., Nguyen-Xuan, H. (2011), “An alternative alpha finite element method with discrete shear gap technique for analysis of isotropic Mindlin–Reissner plates”. Intl. J. Fin. Elem. Anal. Des., Vol. 47, pp. 519-535.

[8] Hrabok, M.M., Hrudey, T.M. (1994), “A review and catalogue of plate bending finite elements”. Intl. J. Comp. Struc., Vol. 19, pp. 479-495.

[۹] رضایی‌پژند، م.، محمدزاده، ح.ر. قالب جزء محدود برای صفحه‌ی خمشی کیرشهف چهار پهلویی. پذیرش برای چاپ در نشریه‌ی مهندسی دانشکده‌ی فنی دانشگاه تبریز.

[10] Dhatt, G., Touzot, G. “The Finite Element Method Displayed”, John Wiley & Sons, (1994).

[11] Liu, I.W., Lin, C.C. (2003), “A new conforming quadrilateral plate bending element”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 36, pp. 2921-2937.

[12] Turkalj, G., Brnic, J., Prpic-Orsic, J. (2004), “ESA formulation for large displacement analysis of framed structures with elastic-plasticity”. Intl. J. Comp. Struc., 82, pp. 2001-2013.

[13] Martins, R.A.F., Owen, D.R.J. (1978), “Thin plate semi-loof element for structural analysis including stability and natural vibrations”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 1667-1676.

[14] Martins, R.A.F., Sabino, J. (1997), “A simple and efficient triangular finite element for plate bending”. Intl. J. Fin. Elem. Plat. Bend., Vol. 14, pp. 883-900.

[15] Bell, K. (1969), “A refined triangular plate bending finite element”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 1, pp. 101-122.

[16] Argyris, J.H., Fried, I., Scharpf, D.W. (1968), “The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method”. Aeronaut. J. Royal Aeronaut. Soc., Vol. 72, pp. 701-709.

[17] Irons, B.M. (1969), “A conforming quadratic triangular element for plate bending”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 1, pp. 29-45.

[18] Timoshenko, S.P., Woinowsky, S. (1959), “Theory of plates and shells”, McGraw-Hill, New York.

[19] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1991), “The Finite Element Method”. 4^{th} Ed., McGraw-Hill, New York.

[20] Cheung, Y.K., Wanji, C. (1995), “Refined nine – parameter triangular thin plate bending element by using refined direct stiffness method”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 38, pp. 283-298.

[21] Zhongnian, X. (1992), “A thick – thin triangular plate element”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 33, pp. 963-973.

[22] Zhenfeng, Zh., Wanji, C. (1995), “New finite element model for analysis of Kirchhoff plate”. Intl. J. Num. Meth. Eng., Vol. 38, pp. 1201-1214.

[23] Cheung, Y.K., Chen, H.C. (1989), “A family of rectangular bending element”. Intl. J. Comp. Struc., Vol. 10, pp. 613-619.

[24] Sengupta, D. (1995), “Performance study of a simple finite element in the analysis of skew rhombic plates”. Intl. J. Comp. Struc., Vol. 54, pp. 1173-1182.

[25] Roufaeil, O. L. (1995), “A new four node quadrilateral plate bending element”. Intl. J. Comp. Struc., Vol. 54, pp. 871-879.

FORMULATING THREE TRIANGULAR ELEMENTS FOR PLATE BENDING

M. R. Pajand[1,*], S. R. Sarafrazi[2], Y. Sadeghi[3]

1. Professor, Civil Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
2. Ph.D. Student, Civil Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
3. M.Sc. Student, Civil Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*Corresponding Author: mrpajand@yahoo.com

ARTICLE INFO

Keywords:
Plate Bending,
Convergence,
Interpolation Functions,
Strain Matrix,
Stiffness Matrix,
Patch Test,
Gaussian Point.

ABSTRACT

This paper deals with the analysis of plate bending by the finite element method. Since vast findings have been achieved so far, advancing research in this area is very difficult. Nevertheless, three triangular elements for analyzing plate bending will be formulated. The patch test for one and some elements for the suggested elements will be preformed. Moreover, a variety of problems will be solved by the authors' program. In addition to these, the responses of the suggested three elements with the other investigators' results, and also accurate answers will be compared. The findings of this article reveal that the new elements have the ability to reach the precise solution. It should be added that one of three proposed elements has the best convergence rate.