ارتعاشات آزاد تیر پس‌کمانه‌شده ترک‌دار با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی

پیمان جمشیدی مقدم[۱]، شاپور مرادی[۲*]

اطلاعات مقاله

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد تیر کمانه‌شده ترک‌دار به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی بررسی شده است. ترک بصورت باز درنظر گرفته شده و با استفاده از فنر خطی بدون جرم مدل‌سازی می‌گردد. تیر به دو بخش تقسیم شده و معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات تیر کمانه‌شده در مختصات مماسی به‌دست می‌آیند. این معادلات یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. به‌منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته‌شده، سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل می‌شوند. همچنین باتوجه به کوچکتر بودن دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر نسبت به دامنه حرکت استاتیکی، معادلات ارتعاشی خطی می‌گردند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده، این معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته‌شده و مقادیر به دست آمده از حل استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده دینامیکی جای گذاری می‌شوند. در پایان با حل مسئله مقدار ویژه استاندارد فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر کمانه‌شده ترک‌دار به‌دست می‌آیند. جهت بررسی صحت روش عددی ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج روش اجزاء محدود مقایسه می‌گردند. نتایج به‌دست آمده دقت بسیار خوب و کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی:
ترک،
ارتعاشات تیر،
پس‌کمانش،
روش کوادراتور دیفرانسیلی.

۱- مقدمه

وجود ترک باعث کاهش استحکام سازه‌ها و رشد آن ممکن است به انهدام سازه و خسارات جبران‌ناپذیر منجر گردد. از این رو محققین بسیاری در زمینه‌های متفاوت سازه‌های ترک‌دار را بررسی نموده‌اند. یکی از این زمینه‌ها بررسی ارتعاشات سازه‌های ترک‌دار تحت بار می‌باشد. باتوجه به ماهیت مسئله، حل تحلیلی آن دشوار بوده به‌همین دلیل برای حل از روش‌های عددی استفاده شده است.

نایفه و همکاران [۱] مودهای ارتعاشی تیر کمانه‌شده را به‌صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کردند. آن‌ها با درنظرگرفتن شکل استاتیکی تیر کمانه‌شده متناظر با nامین مود کمانشی، حل دقیقی برای مودها و فرکانس‌های تیر کمانه‌شده دو سر گیردار، دو سر مفصل و یک سرگیردار-یک سر مفصل به‌دست آورند. آدسی و همکاران [۲] ارتعاش نامیرای تیری که جرم متمرکزی در وسط آن قرار داشت را حول وضعیت پس‌کمانش آن با

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: moradis@scu.ac.ir
۱.کارشناس ارشد مهندسی مکانیک
۲. دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

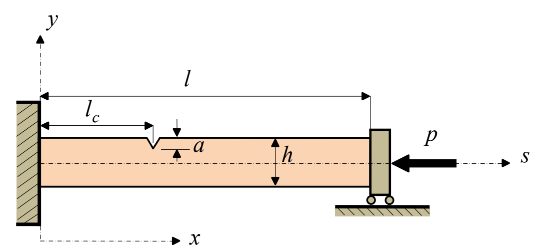
صرف‌نظر از اثر اینرسی دورانی بررسی نمودند. آن‌ها در تحلیل پس‌کمانش باتوجه به حرکت تکیه‌گاه غلطکی به سوی تکیه‌گاه مفصلی، تیر را به‌صورت قابل کشش مدل کردند. در تحلیل ارتعاشات آزاد، آن‌ها تیر را به‌صورت غیرقابل کشش درنظر گرفته، و در نهایت مسئله را با دو روش نیمه تحلیلی بر اساس گسسته‌سازی گالرکین و اجزاء محدود حل نمودند. سانتیلان و همکاران [۳] مسئله پس‌کمانش و ارتعاشات تیر سنگین (Heavy beam) با دامنه نوسان کم حول وضعیت تعادل پس‌کمانش را به‌صورت تئوری و آزمایشگاهی بررسی نمودند. آن‌ها تیر دو سرگیردار را به‌صورت الاستیک غیرقابل کشش، بر روی فوندانسیون صلب افقی و یا شیب‌دار درنظر گرفته و روش شوتینگ را برای حل معادلات خود به‌کار بردند. نئوکریچ و همکاران [۴] ارتعاشات با دامنه کوچک حول وضعیت پس‌کمانش میله دو سر گیردار را بررسی نمودند. آن‌ها مدل قابل کشش و غیرقابل کشش را به دو صورت تحلیلی و عددی حل نمودند. سیلوا و گومز [۵] با انجام تحلیل مودال تجربی بر روی شانزده تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه آزاد، فرکانس‌های تجربی اول تا چهارم را استخراج کرده، تاثیر محل و عمق ترک را بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی نمودند. یانگ و چن [۶] رفتار ارتعاشی و کمانشی تیرهای با جنس متغیر در ضخامت با ترک لبه‌ای را بررسی نمودند. آن‌ها در تحلیل رفتار تیر از تئوری اولر- برنولی و برای مدل‌سازی ترک از فنر چرخشی استفاده نمودند. در ادامه، حل تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی، بار بحرانی کمانشی و شکل مودهای متناظر را برای شرایط مرزی تیر یک سرگیردار، دو سر مفصل و دو سر گیردار ارائه نمودند. کاراگاس و همکاران [۷] با استفاده از روش تجربی و روش اجزاء محدود اثر عمق و محل ترک را بر فرکانس طبیعی اول و بار کمانشی تیر یک‌سر گیردار بررسی نمودند.

از بررسی‌های انجام‌گرفته مشخص است که تاکنون تحلیل رفتار ارتعاشی تیر کمانه‌شده ترک‌دار مورد بررسی قرار نگرفته است. هدف از این پژوهش بررسی رفتار ارتعاشی تیر کمانه‌شده ترک‌دار است. برای این منظور با استفاده از مکانیک شکست ترک به‌صورت فنر خطی چرخشی بدون جرم مدل‌سازی می‌گردد. همچنین، ترک به‌صورت لبه‌ای و باز درنظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات تیر کمانه‌شده در مختصات مماسی به‌دست آمده، که این معادلات در واقع یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. باتوجه به این‌که دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر بسیار کوچک‌تر از دامنه حرکت استاتیکی (حالت تعادل) است، پاسخ کلی سیستم به‌صورت مجموع پاسخ حرکت استاتیکی و ارتعاشی درنظر گرفته شده و معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی می‌گردند. پاسخ حرکت تعادلی و ارتعاشی به‌ترتیب با حل معادلات استاتیکی و دینامیکی به‌دست می‌آیند. به‌منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته می‌شوند. سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل می‌شوند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده همانند حالت استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته‌شده، سپس مقادیر به‌دست آمده از حل معادلات استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته‌شده جای‌گذاری می‌گردند. دستگاه معادلات به‌دست آمده یک مسئله مقدار ویژه غیر استاندارد می‌باشد که پس از تبدیل آن به یک مسئله مقدار ویژه استاندارد و حل آن، فرکانس‌های تیر کمانه‌شده ترک‌دار و شکل مودهای متناظر با آن به‌دست می‌آیند.

۲- تئوری

۲-۱- مدل‌سازی ترک

برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر کمانه‌شده ترک‌دار، تیری دو سر گیردار مشابه شکل ۱ به طول l، ضخامت h، که دارای ترکی به عمق a و محل l_c می‌باشد، و تحت نیروی محوری فشاری p است درنظر گرفته می‌شود.



شکل۱- تیر ترک‌دار دو سر گیردار تحت نیروی محوری

برای مدل‌سازی ترک، تیر به دو قسمت به طول‌های lc و $l\text{-}lc$ که با یک فنر چرخشی بدون جرم به یکدیگر متصل شده‌اند تقسیم می‌گردد. برای محاسبه نرمی ایجاد شده در تیر به علت وجود ترک، از روابط مکانیک شکست و تعریف ضریب شدت تنش برای مود اول ترک (بازشدگی) استفاده شده سختی فنر چرخشی محاسبه می‌شود. ترک به‌صورت لبه‌ای و باز درنظر گرفته شده است. ضریب نرمی کلی به‌صورت رابطه (۱) می‌باشد [۷ و ۸].

$$c=\frac{72\pi(1-\upsilon^2)}{E\ h^2\ b}\int_0^{\bar{a}}\bar{\alpha}F^2\left(\bar{\alpha}\right)d\,\bar{\alpha}$$
$$\bar{a}=\frac{a}{h}\ ,\ \bar{\alpha}=\frac{\alpha}{h} \qquad (۱)$$

E مدول یانگ، υ ضریب پواسون، b عرض تیر و α متغیری در امتداد عمق ترک می‌باشند. F تابع تصحیح بی‌بعدی است که با رابطه (۲) تعریف می‌گردد.

$$F=\frac{\sqrt{\dfrac{2}{\pi\bar{\alpha}}\tan\dfrac{\pi\bar{\alpha}}{2}}\left[0.923+0.199\left(1-\sin\dfrac{\pi\bar{\alpha}}{2}\right)^4\right]}{\cos\left(\dfrac{\pi\bar{\alpha}}{2}\right)} \qquad (۲)$$

۲-۲- معادلات حاکم

روابط (۳) معادلات حاکم بر مسئله پس کمانش تیر را نشان می‌دهد [۹ و ۱۰].

s متغیری در امتداد محور تیر، u^j و w^j به‌ترتیب جابه‌جایی‌های اولیه و نهایی تیر jام در راستاهای x و y هستند. θ^j زاویه بین خط مماس بر منحنی تغییرشکل تیر و محور y و θ_0 زاویه چرخش اولیه المانی از تیر قبل از بارگذاری می‌باشد که با آن نقص هندسی در تیر مدل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w^j}{\partial s}=\left(1+\frac{n^j}{EA}\right)\cos\theta^j-\cos\theta_0^j\\
&\frac{\partial u^j}{\partial s}=\left(1+\frac{n^j}{EA}\right)\sin\theta^j-\sin\theta_0^j\\
&\frac{\partial m^j}{\partial s}-q^j=0 \qquad ,\ j=1,2\\
&EI\left[\frac{\partial\theta^j}{\partial s}-\frac{\partial\theta_0^j}{\partial s}\right]-m^j=0\\
&\frac{\partial}{\partial s}\left(n^j\cos\theta^j\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(q^j\sin\theta^j\right)=\rho\ddot{w}^j\\
&\frac{\partial}{\partial s}\left(n^j\sin\theta^j\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(q^j\cos\theta^j\right)=\rho\ddot{u}^j
\end{aligned} \qquad (۳)$$

n و q به‌ترتیب نیروهای محوری و برشی و m ممان خمشی می‌باشند. A سطح مقطع تیر، I ممان اینرسی سطح و ρ جرم بر واحد طول هستند. در صورتی که متغیرها با روابط (۴) بی‌بعد گردند [۳ و ۱۰].

$$\begin{aligned}
&S=\frac{s}{l},\ L=\frac{l}{l}=1,\ L^j=\frac{l^j}{l},\ U^j=\frac{u^j}{l},\\
&W^j=\frac{w^j}{l},\ K=\frac{Al^2}{I},\ N^j=\frac{n^jl^2}{EI},\\
&Q^j=\frac{q^jl^2}{EI},\ M^j=\frac{m^jl}{EI},\ P=\frac{pl^2}{EI},\\
&T=\frac{t}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}},\ \Omega=\omega l^2\sqrt{\frac{\rho}{EI}}.
\end{aligned} \qquad (۴)$$

که ω فرکانس طبیعی سیستم و t زمان می‌باشند، روابط (۳) به‌صورت روابط (۵) در می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W^j}{\partial S}=\left(1+\frac{N^j}{K}\right)\cos\theta^j-\cos\theta_0^j\\
&\frac{\partial U^j}{\partial S}=\left(1+\frac{N^j}{K}\right)\sin\theta^j-\sin\theta_0^j\\
&\frac{\partial M^j}{\partial S}-Q^j=0 \qquad ,\ j=1,2\\
&\frac{\partial\theta^j}{\partial S}+\frac{\partial\theta_0^j}{\partial S}-M^j=0\\
&\frac{\partial}{\partial S}\left(N^j\cos\theta^j\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(Q^j\sin\theta^j\right)=\ddot{W}^j\\
&\frac{\partial}{\partial S}\left(N^j\sin\theta^j\right)-\frac{\partial}{\partial S}\left(Q^j\cos\theta^j\right)=\ddot{U}^j
\end{aligned} \qquad (۵)$$

باتوجه به آن‌که دامنه حرکت ارتعاشی تیر کمانه‌شده بسیار کوچک‌تر از دامنه حرکت استاتیکی می‌باشد، لذا می‌توان متغیرها را به‌صورت روابط (۶) تعریف نمود [۳].

$$
\begin{aligned}
&U^{j}(S,T)=U_e^{j}(S)+U_d^{j}(S)\sin\Omega T\\
&W^{j}(S,T)=W_e^{j}(S)+W_d^{j}(S)\sin\Omega T\\
&\theta^{j}(S,T)=\theta_e^{j}(S)+\theta_d^{j}(S)\sin\Omega T\\
&N^{j}(S,T)=N_e^{j}(S)+N_d^{j}(S)\sin\Omega T\\
&Q^{j}(S,T)=Q_e^{j}(S)+Q_d^{j}(S)\sin\Omega T\\
&M^{j}(S,T)=M_e^{j}(S)+M_d^{j}(S)\sin\Omega T
\end{aligned}
\quad (۶)
$$

که اندیس e نشان‌دهنده حالت تعادل و اندیس d بیان‌گر حالت دینامیکی می‌باشد. باتوجه به روابط (۶) برای حل مسئله ارتعاشی تیر کمانه‌شده نیاز است که یک‌بار معادلات (۵) به‌صورت استاتیکی حل گشته تا مقادیر مربوط به حالت تعادل به‌دست آیند. با حذف جمله‌های زمانی از معادلات (۵) معادلات تعادل به‌صورت رابطه (۷) به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W_e^{j}}{\partial S}=\left(1+\frac{N_e^{j}}{K}\right)\cos\theta_e^{j}-\cos\theta_0^{j}\\
&\frac{\partial U_e^{j}}{\partial S}=\left(1+\frac{N_e^{j}}{K}\right)\sin\theta_e^{j}-\sin\theta_0^{j}\\
&\frac{\partial M_e^{j}}{\partial S}-Q_e^{j}=0 \qquad , \quad j=1,2\\
&\frac{\partial \theta_e^{j}}{\partial S}+\frac{\partial \theta_0^{j}}{\partial S}-M_e^{j}=0\\
&\frac{\partial}{\partial S}\left(N_e^{j}\cos\theta_e^{j}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(Q_e^{j}\sin\theta_e^{j}\right)=0\\
&\frac{\partial}{\partial S}\left(N_e^{j}\sin\theta_e^{j}\right)-\frac{\partial}{\partial S}\left(Q_e^{j}\cos\theta_e^{j}\right)=0
\end{aligned}
\quad (۷)
$$

با به‌دست آمدن معادلات حالت استاتیکی، جای‌گذاری روابط (۶) در روابط (۵)، بسط روابط به‌دست آمده، استفاده از فرضیات ساده‌کننده و با حذف ترم‌های غیرخطی، معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات آزاد تیر کمانه‌شده به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W_d^{j}}{\partial S}=-\left(1+\frac{N_e^{j}}{K}\right)\theta_d^{j}\sin\theta_e^{j}+\frac{N_d^{j}}{K}\cos\theta_e^{j}\\
&\frac{\partial U_d^{j}}{\partial S}=\left(1+\frac{N_e^{j}}{K}\right)\theta_d^{j}\cos\theta_e^{j}+\frac{N_d^{j}}{K}\sin\theta_e^{j}\\
&\frac{\partial M_d^{j}}{\partial S}-Q_d^{j}=0 \qquad , \quad j=1,2\\
&\frac{\partial \theta_d^{j}}{\partial S}-M_d^{j}=0\\
&\frac{\partial}{\partial S}\left[N_d^{j}\cos\theta_e^{j}-N_e^{j}\theta_d^{j}\sin\theta_e^{j}\right]\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial S}\left[Q_d^{j}\sin\theta_e^{j}+Q_e^{j}\theta_d^{j}\cos\theta_e^{j}\right]=-\Omega^2 W_d^{j}\\
&\frac{\partial}{\partial S}\left[N_d^{j}\sin\theta_e^{j}+N_e^{j}\theta_d^{j}\cos\theta_e^{j}\right]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial S}\left[Q_d^{j}\cos\theta_e^{j}-Q_e^{j}\theta_d^{j}\sin\theta_e^{j}\right]=-\Omega^2 U_d^{j}
\end{aligned}
\quad (۸)
$$

در ادامه روابط استاتیکی و دینامیکی مربوط به معادلات پیوستگی، معادلات ترک و شرایط مرزی نیز مشابه روش استخراج معادلات حاکم، به‌دست خواهند آمد.

۲-۳-معادلات پیوستگی

باتوجه به نحوه مدل‌سازی ترک، روابط پیوستگی استاتیکی و دینامیکی مربوط به آن به‌ترتیب به‌صورت روابط (۹) و (۱۰) در خواهند آمد.

$$
\begin{aligned}
&U_e^{1}(L_C)=U_e^{2}(L_C),\; W_e^{1}(L_C)=W_e^{2}(L_C)\\
&F_{ex}^{1}(L_C)=F_{ex}^{2}(L_C),\; F_{ey}^{1}(L_C)=F_{ey}^{2}(L_C)\\
&M_e^{1}(L_C)=M_e^{1}(L_C) \qquad , \; L_C=\frac{l_c}{l}\\
&F_{ex}^{j}=N_e^{j}\sin\theta_e^{j}-Q_e^{j}\cos\theta_e^{j}\\
&F_{ey}^{j}=N_e^{j}\cos\theta_e^{j}+Q_e^{j}\sin\theta_e^{j}
\end{aligned}
\quad (۹)
$$

$$
\begin{aligned}
&U_d^{1}(L_C)=U_d^{2}(L_C), W_d^{1}(L_C)=W_d^{2}(L_C)\\
&F_{dx}^{1}(L_C)=F_{dx}^{2}(L_C), F_{dy}^{1}(L_C)=F_{dy}^{2}(L_C)\\
&M_d^{1}(L_C)=M_d^{2}(L_C)\\
&F_{dx}^{j}=N_d^{j}\sin\theta_e^{j}+N_e^{j}\theta_d^{j}\cos\theta_e^{j}\\
&\qquad -Q_d^{j}\cos\theta_e^{j}+Q_e^{j}\theta_d^{j}\sin\theta_e^{j}\\
&F_{dy}^{j}=N_d^{j}\cos\theta_e^{j}-N_e^{j}\theta_d^{j}\sin\theta_e^{j}\\
&\qquad +Q_d^{j}\sin\theta_e^{j}+Q_e^{j}\theta_d^{j}\cos\theta_e^{j}
\end{aligned}
\quad (۱۰)
$$

در روابط (۹) و (۱۰)، معادلات اول و دوم مربوط به پیوستگی جابه‌جایی و معادلات سوم و چهارم مربوط به

پیوستگی نیرویی در راستاهای x و y هستند. معادله پنجم پیوستگی ممان خمشی را بیان می‌نماید.

۲-۴- معادلات ترک

باتوجه به نحوه مدل‌سازی ترک، روابط ناپیوستگی استاتیکی و دینامیکی مربوط به آن به‌ترتیب به‌صورت روابط (۱۱) و (۱۲) در خواهند آمد.

$$\theta_e^2\left(L_C\right)=\theta_e^1\left(L_C\right)+\frac{EI}{l}c\ M_e^1\left(L_C\right) \quad (۱۱)$$

$$\theta_d^2\left(L_C\right)=\theta_d^1\left(L_C\right)+\frac{EI}{l}c\ M_d^1\left(L_C\right) \quad (۱۲)$$

۲-۵- شرایط مرزی

شرایط مرزی استاتیکی تیر دو سرگیردار تحت نیروی محوری P به‌صورت روابط (۱۳) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &W_e^1(0)=0, \quad U_e^1(0)=0, \quad \theta_e^1(0)=\frac{\pi}{2}, \\ &W_e^2(1)=0, \quad \theta_e^2(1)=\frac{\pi}{2}, \quad N_e^2(1)=P. \end{aligned} \quad (۱۳)$$

رابطه (۱۳) بیان‌گر آن است که ابتدا و انتهای تیر اجازه حرکت در راستای محور y را نداشته و زوایای آن‌ها برابر با $\frac{\pi}{2}$ است (θ نسبت به محور y محاسبه می‌گردد). همچنین ابتدای تیر ($S=0$) اجازه حرکت در راستای محور x را ندارد. انتهای تیر ($S=1$) اجازه حرکت در راستای محور x را دارا بوده و نیروی محوری وارد بر آن برابر با P می‌باشد. شرایط مرزی دینامیکی به‌صورت روابط (۱۴) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} &W_d^1(0)=0, \quad U_d^1(0)=0, \quad \theta_d^1(0)=0, \\ &W_d^2(1)=0, \quad U_d^2(1)=0, \quad \theta_d^2(1)=0. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

رابطه (۱۴) مشابه رابطه (۱۳) می‌باشد، با این تفاوت که در این رابطه انتهای تیر نیز اجازه حرکت در راستای محور x را ندارد.

۳- حل معادلات استاتیکی

برای گسسته‌سازی معادلات از روش کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می‌گردد.

۳-۱- روش کوادراتور دیفرانسیلی

در روش کوادراتور دیفرانسیلی مشتق مرتبه اول تابع $\psi(x)$ در یک نقطه درون دامنه آن به‌صورت تقریبی خطی از مجموع مقادیر وزنی تابع در تمام دامنه نوشته می‌شود [۱۱].

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x=x_i}=\sum_{k=1}^{n_p}C_{ik}\psi(x_k) \quad i=1,2,....,n_p \qquad (۱۵)$$

در رابطه (۱۵) n_p تعداد نقاط دقت، x_i نقطه‌ی دقت iام از دامنه تابع و C_{ik} ضرایب وزنی برای به‌دست آوردن مشتق مرتبه اول تابع در نقطه دقت iام می‌باشند. برای محاسبه ضرایب وزنی روش کوادراتور دیفرانسیلی کوان و چانگ [۱۲]، از رابطه جبری زیر استفاده نمودند که مستقل از مختصات نقاط دقت می‌باشد.

$$\begin{aligned} &C_{ik}=\frac{1}{\left(x_i-x_k\right)}\prod_{\substack{j\neq i,k\\ i\neq k}}^{n_p}\frac{\left(x_i-x_j\right)}{\left(x_k-x_j\right)} \\ &C_{ii}=-\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n_p}C_{ik} \quad , \ i,k=1,2,3,...,n_p \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

انواع نقاط دقتی که در این پژوهش استفاده شده عبارتند از [۱۳]:

۱- نقاط دقت با استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف:

$$\begin{aligned} &x_i=\phi_0+\frac{(\phi_1-\phi_0)}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2i-1}{2n_p}\pi\right)\right] \\ &x_1=\phi_0\ , x_{n_p}=\phi_1 \quad , \quad i=2,3,...,n_p-1 \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

۲- نقاط دقت با استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای لژاندر:

$$\begin{aligned} &x_i=\phi_0+\frac{(\phi_1-\phi_0)}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2i-3}{2n_p-4}\pi\right)\right] \\ &x_1=\phi_0\ , x_{n_p}=\phi_1 \qquad , \quad i=2,3,...,n_p-1 \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

۳- نقاط دقت با استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای‌های گوس- لوباتو- چبیشف:

$$x_i = \phi_0 + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{n_p - 1}\pi\right)\right] \qquad (۱۹)$$

$$i = 1,2,3,\dots,n_p$$

در رابطه (۱۹) ϕ_0 و ϕ_1 به‌ترتیب ابتدا و انتهای بازه‌ای است که باید با استفاده از نقاط دقت گسسته شود. این مقادیر با استفاده از رابطه (۲۰) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = L_C \quad j=1 \\ &\phi_0 = L_C\,,\ \phi_1 = 1 \quad j=2 \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی می‌توان معادلات (۷) را به‌صورت روابط (۲۱) بیان نمود.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} W_{ek}^{j} = \left(1 + \frac{N_{ei}^{j}}{K}\right)\cos\theta_{ei}^{j} - \cos\theta_{0i}^{j} \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} U_{ek}^{j} = \left(1 + \frac{N_{ei}^{j}}{K}\right)\sin\theta_{ei}^{j} - \sin\theta_{0i}^{j} \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} M_{ek}^{j} - Q_{ei}^{j} = 0 \qquad ,\begin{cases} j = 1,2 \\ i = 1,2,3,\cdots,n_p - 1 \end{cases} \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik}\,\theta_{ek}^{j} + \left(\frac{\partial\theta_0^{j}}{\partial S}\right)_i - M_{ei}^{j} = 0 \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} N_{ek}^{j}\cos\theta_{ek}^{j} + \sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} Q_{ek}^{j}\sin\theta_{ek}^{j} = 0 \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} N_{ek}^{j}\sin\theta_{ek}^{j} - \sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} Q_{ek}^{j}\cos\theta_{ek}^{j} = 0
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با فرض آن که هر تیر با n_p نقطه دقت گسسته گردد، تعداد تمامی مجهولات برابر با $12n_p$ می‌باشد. باتوجه به ۶ شرط مرزی، ۵ معادله پیوستگی و معادله ترک، تعداد تمامی معادلات حاکمی که باید نوشته شود تا تناقض ریاضی بوجود نیامده و تعداد مجهولات مسئله با تعداد معادلات برابر شوند $12n_p$-12 می‌باشد. بنابراین باید برای یکی از نقاط مرزی هر یک از تیرها نیز، معادله حاکم نوشته شود. پس از گسسته‌سازی معادلات با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی، این معادلات با استفاده از روش طول قوس حل می‌گردند [۱۴ و ۱۵].

۴- حل معادلات دینامیکی

برای به‌دست آوردن پاسخ ارتعاشی تیر نیز همانند حل استاتیکی مسئله، از روش کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می‌گردد. با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی روابط (۸) گسسته‌شده و به‌صورت روابط (۲۲) در خواهند آمد.

مشابه حل استاتیکی برای آنکه در حل معادلات دینامیکی تناقض ریاضی بوجود نیامده و تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر باشد، برای معادلات اول، پنجم و ششم روابط (۲۲) $2 \le i \le n_p - 1$ و برای سایر معادلات $1 \le i \le n_p$ می‌باشد. در واقع در حل ارتعاشی مسئله معادلات اول، پنجم و ششم روابط (۲۲)، فقط برای نقاط داخلی نوشته می‌شوند و باقی معادلات برای تمامی نقاط دقت نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} W_{dk}^{j} = -\left(1 + \frac{N_{ei}^{j}}{K}\right)\theta_{di}^{j}\sin\theta_{ei}^{j} \\
&\qquad\qquad + \frac{N_{di}^{j}}{K}\cos\theta_{ei}^{j} \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} U_{dk}^{j} = \left(1 + \frac{N_{ei}^{j}}{K}\right)\theta_{di}^{j}\cos\theta_{ei}^{j} \\
&\qquad\qquad + \frac{N_{di}^{j}}{K}\sin\theta_{ei}^{j} \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik} M_{dk}^{j} - Q_{di}^{j} = 0 \qquad , \quad j = 1,2 \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik}\,\theta_{dk}^{j} - M_{di}^{j} = 0 \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik}\left(N_{dk}^{j}\cos\theta_{ek}^{j} - N_{ek}^{j}\theta_{dk}^{j}\sin\theta_{ek}^{j}\right. \\
&\qquad \left. + Q_{dk}^{j}\sin\theta_{ek}^{j} + Q_{ek}^{j}\theta_{dk}^{j}\cos\theta_{ek}^{j}\right) = -\Omega^2 W_{di}^{j} \\
&\sum_{k=1}^{n_p} C_{ik}\left(N_{dk}^{j}\sin\theta_{ek}^{j} + N_{ek}^{j}\theta_{dk}^{j}\cos\theta_{ek}^{j}\right. \\
&\qquad \left. - Q_{dk}^{j}\cos\theta_{ek}^{j} + Q_{ek}^{j}\theta_{dk}^{j}\sin\theta_{ek}^{j}\right) = -\Omega^2 U_{di}^{j}
\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

پس از گسسته‌سازی معادلات دینامیکی حاکم، مقادیر به‌دست آمده از حالت تعادل در معادلات گسسته‌شده دینامیکی جای‌گذاری می‌گردند. معادلات حاکم دینامیکی گسسته‌شده به همراه شرایط مرزی، معادلات پیوستگی و

معادله ترک یک دستگاه معادلات با مقادیر ویژه به‌صورت رابطه (۲۳) را تشکیل می‌دهند که یک مسئله مقدار ویژه غیراستاندارد می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \qquad (۲۳)$$

در این رابطه O ماتریس صفر و I ماتریس واحد می‌باشند. بردار X_1 شامل مقادیر جابه‌جایی‌های نقاط دقت مرزی هر تیر در راستاهای x و y و همچنین مقادیر زوایای چرخش، نیروهای محوری و برشی و ممان خمشی تمامی نقاط دقت می‌باشد. بردار جابه‌جایی X_2 شامل مقادیر جابه‌جایی‌های نقاط دقت داخلی هر تیر در راستاهای x و y می‌باشد. ماتریس‌های A_{11} و A_{12} شامل ضرایب معادلات اول تا چهارم روابط (۲۲)، معادلات پیوستگی، معادله ترک و معادلات شرایط مرزی و ماتریس‌های A_{21} و A_{22} شامل ضرایب معادلات پنجم و ششم روابط (۲۲) می‌شوند. در ادامه مسئله مقدار ویژه استاندارد را می‌توان به‌صورت رابطه (۲۴) به‌دست آورد.

$$\left[A_{22} - A_{21} \times A_{11}^{-1} \times A_{12} \right] X_2 = -\Omega^2 X_2 \qquad (۲۴)$$

که با حل این رابطه، فرکانس‌های بی‌بعد تیر کمانه‌شده ترک‌دار و شکل مودهای متناظر آن‌ها به‌دست خواهند آمد.

۵-نتایج

در این پژوهش فرض شده است که تیر دارای مقداری نقص هندسی می‌باشد. مقدار نقص هندسی به‌صورت ضریبی از شکل مود کمانشی تیر درنظر گرفته شده است. برای اعمال نقص هندسی در مسئله از رابطه (۲۵) استفاده شده است [۱۶].

$$\bar{\mathrm{W}} = \frac{1}{2} W_0 \left(1 - \cos\left(2\pi s / l\right)\right) \qquad (۲۵)$$

که در آن W_0 دامنه نقص هندسی است. برای وارد نمودن نقص هندسی در معادلات استاتیکی و باتوجه به این‌که قبل از تغییرشکل بزرگ تیر، فرض خطی بودن روابط صادق است از معادلات (۲۶) و (۲۷) استفاده شده است.

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\partial \bar{\mathrm{W}}}{\partial s} \qquad (۲۶)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial s} = -\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{W}}}{\partial s^2} \qquad (۲۷)$$

۵-۱- بررسی دقت فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار

برای اطمینان از درستی فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار به‌دست آمده از روش عددی پژوهش حاضر، چهار فرکانس طبیعی اول با نتایج حاصل از نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS مقایسه می‌شوند. برای مقایسه از تیری با مشخصات مکانیکی جدول ۱ استفاده شده است.

جدول ۱- ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر

طول (mm)	عرض (mm)	ضخامت (mm)	چگالی ($\mathrm{Kg/m^3}$)	مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون
۱۰۰۰	۲۵	۱۰	۷۸۰۰	۲۰۰	۰/۳

ترک به عمق بی‌بعد ۰/۲۵ در وسط تیر درنظر گرفته شده است. دامنه نقص هندسی نیز ۰/۰۰۱ می‌باشد. برای مدل‌سازی تیر ترک‌دار در نرم‌افزار ANSYS از ۵۰۰ المان BEAM189 استفاده شده است. همچنین، ترک به‌صورت کاهش ارتفاع تیر در محل ترک، مدل شده است. جدول ۲ نتایج این مقایسه را برای مقادیر متفاوت ضرایب بار بحرانی نشان می‌دهد. باتوجه به این جدول مشاهده می‌گردد که نتایج پژوهش حاضر نسبت به نتایج ANSYS دارای دقت قابل قبولی می‌باشند.

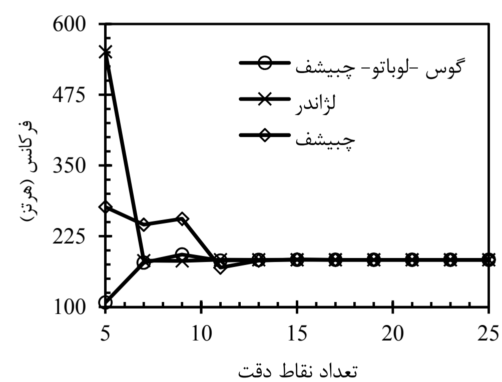
۲-۵- تاثیر نقاط دقت گوناگون بر همگرایی فرکانس‌های طبیعی

تعداد و نوع نقاط دقت بر همگرایی فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار تاثیر می‌گذارد. شکل‌های ۲ و ۳ تاثیر نقاط دقت چبیشف، لژاندر و گوس- لوباتو- چبیشف را بر همگرایی فرکانس‌های طبیعی اول و دوم نشان می‌دهند. ترک در وسط تیر و با عمق نسبی ۰/۲۵ درنظرگرفته شده است. تیر تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی تیر سالم می‌باشد. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، همگرایی نقاط دقت گوس- لوباتو- چبیشف از سایر نقاط دقت دیگر بهتر است.

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار

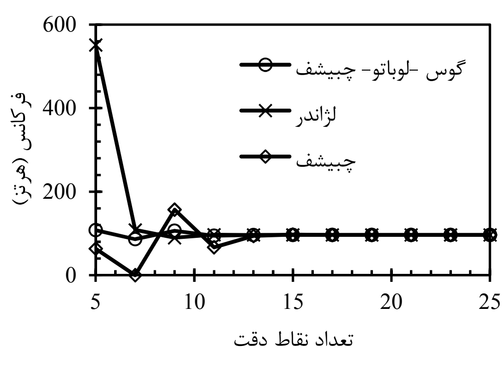
	ضریب بار بحرانی	۱/۲	۱/۴	۱/۶
فرکانس اول (هرتز)	پژوهش حاضر	۱۸۳/۳۷۴	۱۹۳/۸۷۹	۲۰۰/۲۴۵
	ANSYS	۱۸۳/۳۲۰	۱۹۳/۸۴۰	۲۰۰/۶۸۰
	درصد خطای نسبی	۰/۰۲۹	۰/۰۲۰	۰/۲۱۶
فرکانس دوم (هرتز)	پژوهش حاضر	۹۶/۴۲۴	۸۱/۹۰۴	۶۳/۷۵۹
	ANSYS	۹۶/۲۴۰	۸۲/۱۶۴	۶۴/۵۹۹
	درصد خطای نسبی	۰/۱۹۱	۰/۳۱۶	۱/۳۰۰
فرکانس سوم (هرتز)	پژوهش حاضر	۴۵۰/۱۱۳	۳۸۶/۸۹۴	۳۴۸/۱۱۶
	ANSYS	۴۵۱/۷۸۰	۳۸۷/۷۴۰	۳۴۸/۵۸۰
	درصد خطای نسبی	۰/۳۶۸	۰/۲۱۸	۰/۱۳۳
فرکانس چهارم (هرتز)	پژوهش حاضر	۲۵۷/۳۱۵	۲۱۴/۷۶۰	۲۰۳/۵۶۶
	ANSYS	۲۵۹/۴۸۰	۲۱۵/۸۷۰	۲۰۳/۳۳۰
	درصد خطای نسبی	۰/۸۳۴	۰/۵۱۴	۰/۱۱۶

این نتایج برای فرکانس‌های طبیعی سوم و چهارم نیز به‌دست آمده‌اند. بنابراین در ادامه از این نقاط دقت استفاده می‌گردد.



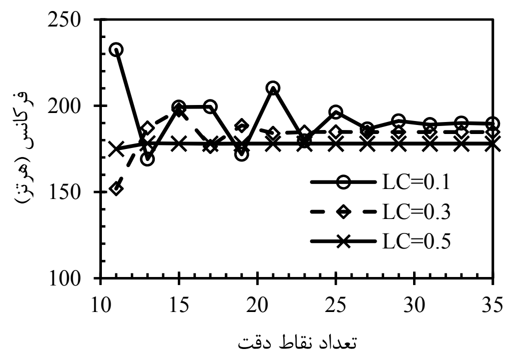
شکل ۲- تاثیر نقاط دقت در همگرایی فرکانس طبیعی اول

در ادامه تاثیر تعداد نقاط دقت بر همگرایی فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده برای مکان‌های نسبی متفاوت ترک بررسی می‌شود. شکل‌های ۴ و ۵ تاثیر تعداد نقاط دقت را بر همگرایی فرکانس‌های طبیعی اول و دوم تیر کمانه‌شده ترک‌دار نشان می‌دهند. عمق نسبی ترک ۰/۵ می‌باشد. تیر تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی تیر سالم می‌باشد.

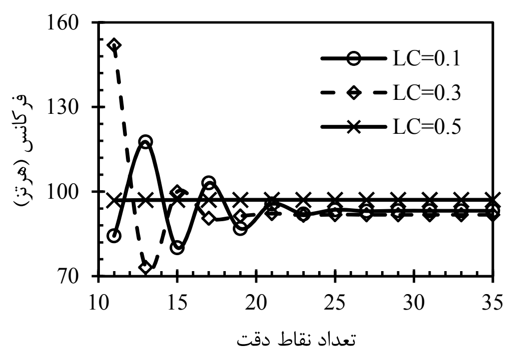


شکل ۳- تاثیر نقاط دقت در همگرایی فرکانس طبیعی دوم

از شکل ۴ مشخص است که فرکانس اول برای مکان‌های نسبی ترک $L_C = 0.1$ ، $L_C = 0.3$ و $L_C = 0.5$ به‌ترتیب بعد از ۳۱، ۲۱ و ۱۵ نقطه دقت همگرا شده است. باتوجه به شکل ۵ فرکانس طبیعی دوم برای همین مکان‌های نسبی ترک به‌ترتیب با ۲۵، ۲۱ و ۱۱ نقطه دقت همگرا شده است. مشابه این نتایج برای فرکانس‌های طبیعی سوم و چهارم نیز به‌دست آمده‌اند. بنابراین در این پژوهش از ۳۱ نقطه دقت استفاده می‌گردد. باتوجه به این شکل‌ها مشخص است که هر چه محل ترک به وسط تیر نزدیک‌تر می‌شود همگرایی مسئله با تعداد نقاط کمتری به‌دست می‌آید.



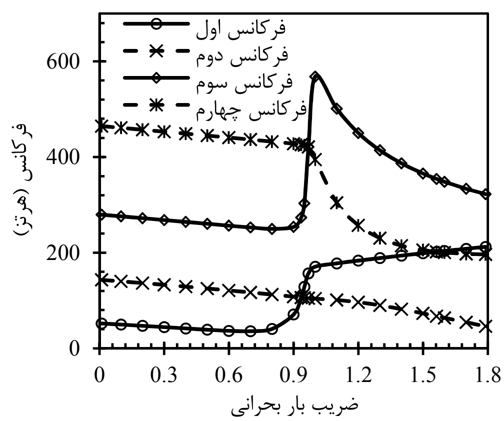
شکل ۴- تاثیر تعداد نقاط دقت در همگرایی فرکانس اول



شکل ۵- تاثیر تعداد نقاط دقت در همگرایی فرکانس دوم

۵-۳-تغییرات فرکانس‌های طبیعی با افزایش بار

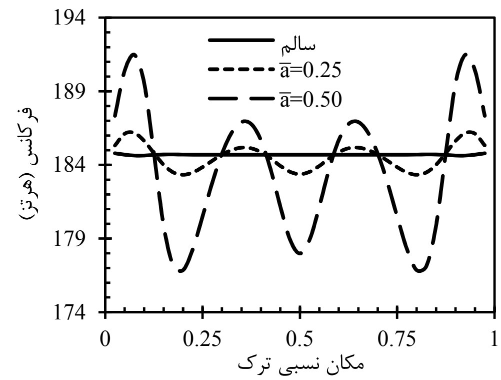
شکل ۶ تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار را با افزایش بار نشان می‌دهد. ترک در وسط و عمق نسبی آن ۰/۲۵ درنظرگرفته شده است. باتوجه به شکل مشخص است که قبل از ایجاد تغییرشکل بزرگ در تیر، فرکانس‌های طبیعی به‌دلیل کاهش استحکام سازه با افزایش بار کاهش می‌یابند. پس از کمانش و با ایجاد تغییرشکل بزرگ در تیر، فرکانس‌های متناظر با شکل مودهای فرد افزایش یافته و فرکانس‌های متناظر با شکل مودهای زوج کاهش می‌یابند. بعد از وقوع تغییرشکل بزرگ با افزایش بار به‌دلیل افزوده شدن انرژی پتانسیل تیر و ناپایدار شدن آن، فرکانس‌های طبیعی دوم تا چهارم کاهش یافته و فرکانس اول که به میزان خمیدگی تیر حساس می‌باشد با اضافه شدن بار (افزایش خمیدگی) افزایش می‌یابد. همچنین در بارهای ۰/۹۳۵۶، ۰/۹۶۸۷ و ۱/۵۶۳۰ برابر بار بحرانی تیر سالم به‌ترتیب بین فرکانس‌های طبیعی اول و دوم، سوم و چهارم و اول و چهارم تشدید اتفاق می‌افتد.



شکل ۶- تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول با افزایش بار

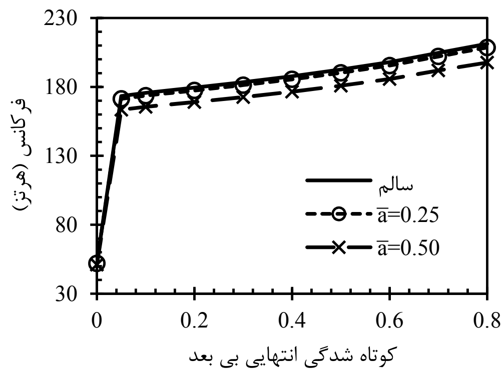
۵-۴- تغییرات فرکانس طبیعی در اثر تغییر مکان و عمق نسبی ترک

در این بخش تاثیر تغییر مکان و عمق نسبی ترک بر چهار فرکانس طبیعی اول تیر کمانه‌شده ترک‌دار بررسی می‌گردد. در شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی اول تیر کمانه‌شده با تغییرات مکان نسبی ترک برای عمق‌های نسبی متفاوت بررسی شده است.



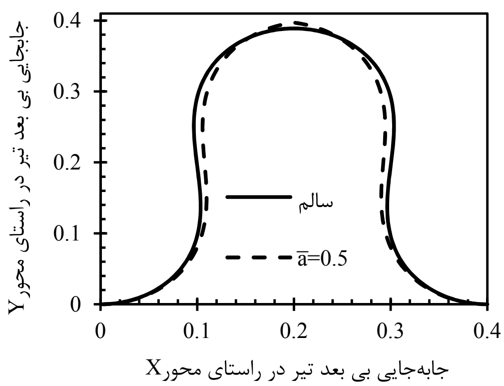
شکل ۷- تغییرات فرکانس اول برحسب مکان نسبی

تیر تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی تیر سالم می‌باشد. همانگونه که از شکل مشخص است با افزایش عمق ترک میزان سختی تیر کاهش بیشتری یافته و فرکانس طبیعی کم می‌شود. به‌دلیل تغییرات گشتاور خمشی تیر بین مقدار بیشینه خود در دو انتها و وسط تیر اثر ترک در محل‌های مختلف متفاوت است. از آن‌جا که نیروی محوری وارد بر تیر ثابت می‌باشد، با افزایش عمق نسبی ترک سختی آن کاهش یافته، بر کوتاه‌شدگی انتهایی آن افزوده شده و بیشتر خمیده می‌شود. بنابراین، با قرار گرفتن محل ترک در نقاطی از تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه شده ترک دار نسبت به حالت سالم آن افزایش می یابد. این اثر در شکل ۸ بررسی شده است. در این شکل تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب تغییرات کوتاه‌شدگی انتهایی بی‌بعد برای عمق‌های متفاوت ترک رسم شده است. باتوجه به شکل مشخص است که برای یک کوتاه‌شدگی مشخص، با افزایش عمق ترک مقدار فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار نسبت به فرکانس طبیعی تیر سالم کاهش می‌یابد. دلیل این امر کاهش استحکام سازه بدلیل افزایش نرمی تیر به خاطر وجود ترک است. علاوه بر این، همان‌گونه که از شکل دیده می‌شود افزایش کوتاه‌شدگی انتهایی تیر سبب ازدیاد فرکانس طبیعی می‌گردد.



شکل ۸- تغییرات فرکانس اول برحسب کوتاه‌شدگی انتهایی

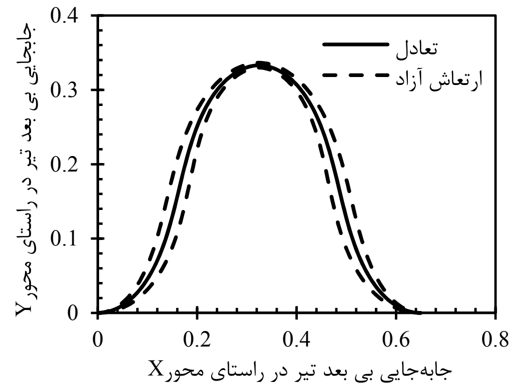
شکل ۹ پس‌کمانش تیر دو سرگیردار سالم و ترک‌داری را نشان می‌دهد که ترک در وسط آن می‌باشد.



شکل ۹- پس‌کمانش تیر دوسر گیردار سالم و ترک‌دار

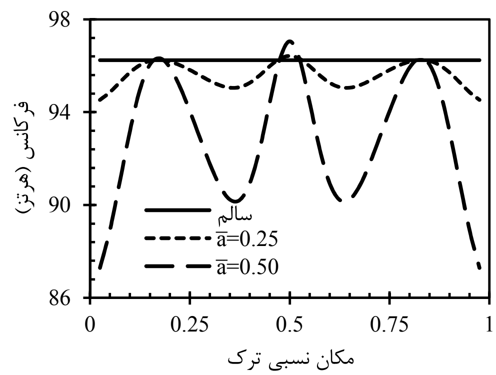
همان‌طورکه مشاهده می‌شود برای دو تیر با کوتاه‌شدگی انتهایی یکسان، خمیدگی تیر ترک‌دار بیشتر است که این امر سبب افزایش فرکانس طبیعی اول تیر می‌گردد (شکل ۶). اما همان‌طور که در شکل ۸ مشخص است این افزایش فرکانس قادر به جبران کاهش فرکانس طبیعی به‌دلیل وجود ترک در تیر نمی‌باشد. به بیان دیگر در اینجا اثر ترک نسبت به خمیدگی تیر بیشتر است و به همین دلیل مقدار فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار نسبت به فرکانس اول تیر سالم کاهش می‌یابد.

حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به شکل مود اول تیر کمانه‌شده با ترکی در وسط و به عمق ۰/۲۵ در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



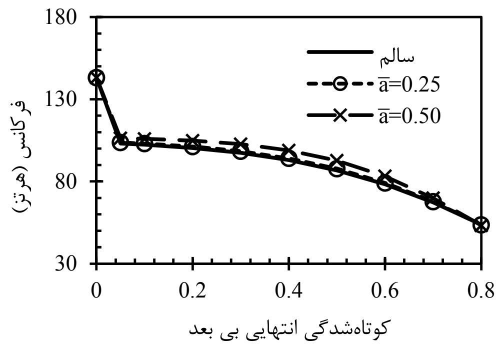
شکل ۱۰- حالت تعادل و ارتعاش آزاد برای فرکانس طبیعی اول

شکل ۱۱ تغییرات فرکانس دوم تیر کمانه‌شده ترک‌دار را برحسب تغییرات مکان نسبی ترک نشان می‌دهد.



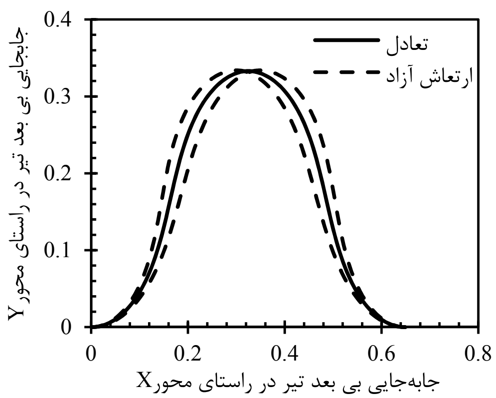
شکل ۱۱- تغییرات فرکانس دوم برحسب مکان نسبی

تغییرات فرکانس طبیعی دوم تیر کمانه‌شده با افزایش کوتاه‌شدگی انتهایی در شکل ۱۲ نشان داده شده است. باتوجه به شکل مشخص است که برای یک کوتاه‌شدگی مشخص، فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار نسبت به فرکانس طبیعی تیر سالم افزایش می‌یابد که این امر بدان خاطر است که بار وارده بر تیر ترک‌دار کمتر از بار وارده بر تیر سالم بوده و در نتیجه تیر ترک‌دار نسبت به تیر سالم پایدارتر می‌گردد (شکل ۶). اما مشاهده می‌گردد که با افزایش کوتاه‌شدگی، اثر ترک غالب گشته و مقدار فرکانس طبیعی دوم تیر ترک‌دار نزدیک به مقدار فرکانس طبیعی تیر سالم می‌گردد.



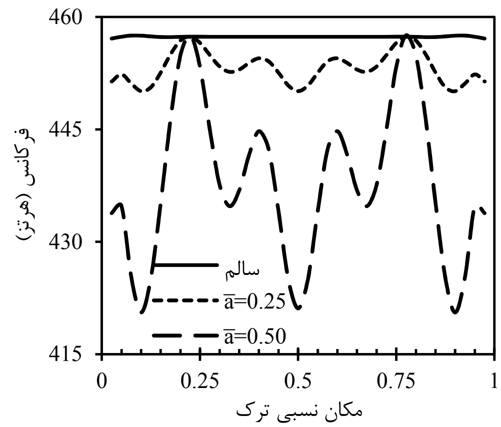
شکل ۱۲- تغییرات فرکانس دوم برحسب کوتاه‌شدگی انتهایی

شکل ۱۳ حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به فرکانس طبیعی دوم تیر کمانه‌شده با ترکی در وسط و به عمق ۰/۲۵ را نشان می‌دهد. باتوجه به شکل مشخص است که شکل مود دوم، یک گره دارد.

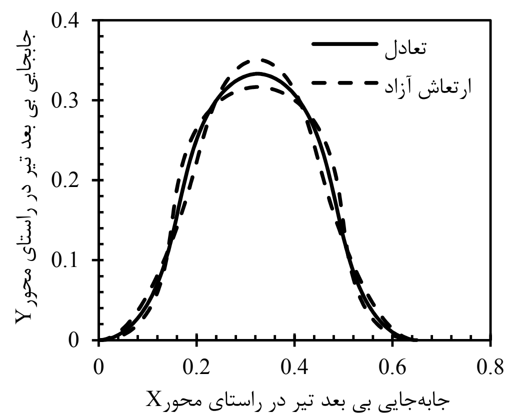


شکل ۱۳- حالت تعادل و ارتعاش آزاد در فرکانس طبیعی دوم

شکل ۱۴ تغییرات فرکانس سوم تیر کمانه‌شده ترک‌دار را برحسب تغییرات مکان نسبی ترک نشان می‌دهند. حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به فرکانس طبیعی سوم تیر کمانه‌شده با ترکی در وسط و به عمق ۰/۲۵ در شکل ۱۵ نشان داده شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود، شکل مود سوم دارای چهار گره است.

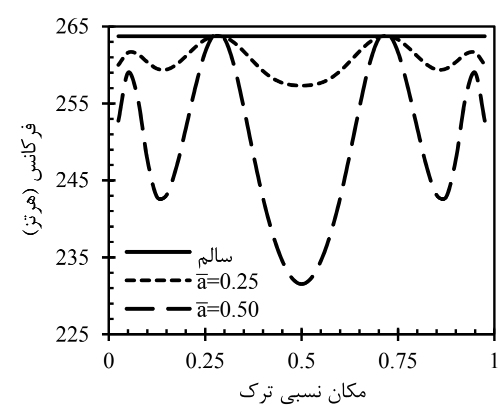


شکل ۱۴- تغییرات فرکانس سوم برحسب مکان نسبی



شکل ۱۵- حالت تعادل و ارتعاش آزاد در فرکانس طبیعی سوم

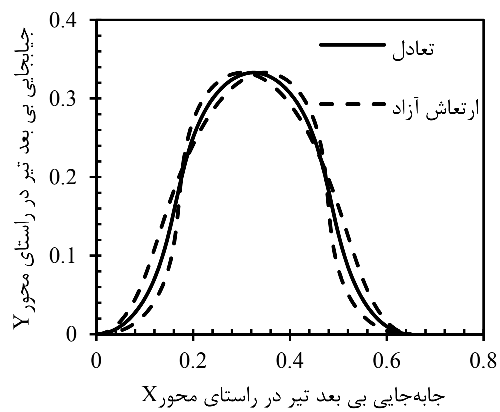
شکل ۱۶ تغییرات فرکانس چهارم تیر کمانه‌شده ترک‌دار را برحسب تغییرات مکان نسبی ترک نشان می‌دهد.



شکل ۱۶- تغییرات فرکانس چهارم برحسب مکان نسبی

شکل ۱۷ حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به فرکانس طبیعی چهارم تیر کمانه‌شده با ترکی در وسط و به عمق ۰/۲۵ را نشان می‌دهد. باتوجه به شکل ۱۷ مشخص است که شکل مود چهارم، سه گره دارد. در ادامه تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر کمانه‌شده ترک‌دار برحسب تغییرات عمق نسبی برای مکان‌های نسبی متفاوت ترک بررسی می‌شوند.

شکل ۱۸ این تغییرات را برای چهار فرکانس اول تیر، در حالتی که تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی تیر سالم می‌باشد، نشان می‌دهد.



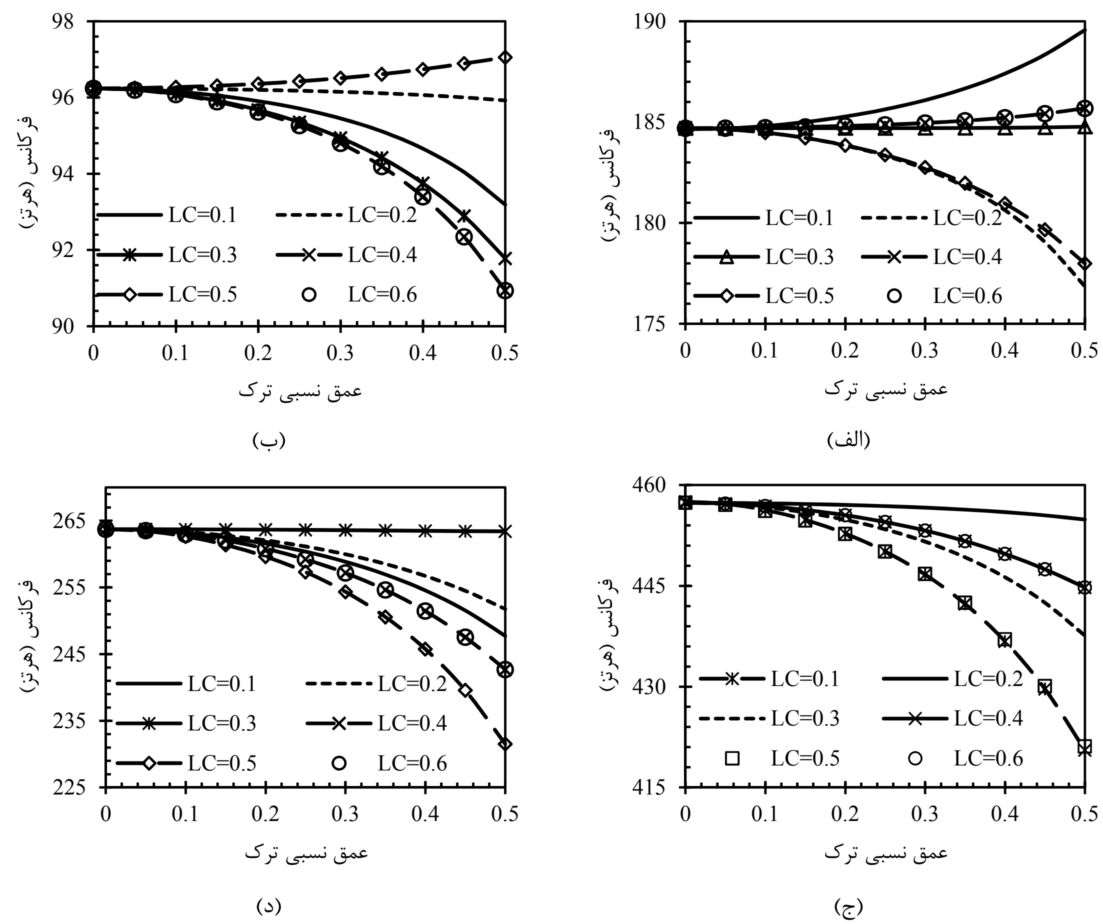
شکل ۱۷- حالت تعادل و ارتعاش آزاد در فرکانس طبیعی چهارم

از شکل ۱۸- الف دیده می‌شود که به‌دلیل وجود تقارن، منحنی مربوط به مکان‌های ترک $L_C = 0.4$ و $L_C = 0.6$ بر یکدیگر منطبق هستند. همچنین مشاهده می‌گردد که فرکانس طبیعی با افزوده شدن عمق ترک برای مکان‌های ترک $L_C = 0.1$، $L_C = 0.4$ و $L_C = 0.6$ افزایش و برای مکان‌های $L_C = 0.2$ و $L_C = 0.5$ کاهش می‌یابد. برای مکان نسبی ترک $L_C = 0.3$ افزایش عمق نسبی آن بر تغییرات فرکانس طبیعی تقریبا بی‌اثر می‌باشد. مشابه این تغییرات را می‌توان برای سه فرکانس دیگر در شکل‌های ۱۸- ب، ۱۸- ج و ۱۸- د مشاهده نمود.

۶-نتیجه گیری

ارتعاشات آزاد تیر کمانه‌شده ترک‌دار بررسی گردید. برای مدل‌سازی ترک از فنر خطی بدون جرم استفاده و ترک به‌صورت باز و لبه‌ای درنظرگرفته شد. به‌منظور بررسی ارتعاشات آزاد تیر کمانه‌شده، تیر به دو قسمت تقسیم شده و از معادلات دیفرانسیل در مختصات مماسی استفاده گردید. با توجه به کوچک بودن دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر نسبت به دامنه حرکت استاتیکی، معادلات ارتعاشی خطی شدند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی، این معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته‌شده، سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل شد. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده، معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته‌شده و سپس مقادیر به‌دست آمده از حل معادلات استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده دینامیکی جای گذاری شد. با حل مسئله مقدار ویژه به‌دست آمده فرکانس‌های تیر کمانه شده ترک‌دار و شکل مودهای متناظر با آن به‌دست آمدند. مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج روش اجزا محدود نشان دهنده دقت بسیار خوب روش ارائه شده می باشد. از دیگر مزایای روش ارائه شده همگرایی با تعداد نقاط دقت کم و زمان محاسباتی کم می‌باشد.

همچنین، اثر افزایش بار و افزایش عمق نسبی ترک و تغییر محل آن بر فرکانس‌های طبیعی بررسی گشته و مشاهده گردید که در پس کمانش بین فرکانس‌های طبیعی سیستم پدیده تشدید اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۸- تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار برحسب عمق نسبی. الف) فرکانس اول، ب) فرکانس دوم، ج) فرکانس سوم، د) فرکانس چهارم

۷- مراجع

[1] Nayfeh, A.H., Kreider, W., Anderson, T.J. (1995). "Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams". AIAA Journal, Vol. 33, No. 6, pp. 1121-1126.

[2] Addessi, D., Lacarbonara, W., Paolone, A. (2005). "Free in-plane vibrations of highly buckled beams carrying a lumped mass". J. of acta mechanica, Vol. 180, pp. 133-156.

[3] Santillan, S.T., Virgin, L.N., Plaut, R.H. (2006). "Post-buckling and vibration of heavy Beam on horizontal or inclined rigid foundation". J. of applied mechanics, Vol. 73, pp. 664-671.

[4] Neukirch, S., Frelat, J., Goriely, A., Maurini, C. (2012). "Vibrations of post-buckled rods: The singular inextensible limit". J. of Sound and Vibrations, Vol. 331, pp. 704-720.

[5] Silva, J.M., Gomes, A.J. (1988). ''Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams''. J. of Experimental Mechanics, Vol. 30, No. 1, pp. 20-25.

[6] Yang, J., Chen, Y., Sabuncu, M. (2008). "Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks". J. of Composite Structures, Vol. 83, pp. 48-60.

[7] Karaagac, C., Ozturk, H., Sabuncu, M. (2009). "Free vibration and lateral buckling of a cantilever slender beam with an edge crack: experimental and numerical studies". J. of Sound and Vibration, Vol. 326, pp. 235-250.

[8] Saavedra, P.N., Cuitino, L.A. (2001). "Crack detection and vibration behavior of cracked beams". J. of Computers and Structures, Vol. 79, pp. 1451-1459.

[9] Reissner, E. (1972). "On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem". J. of Applied Mathematics and Physics, Vol. 23, pp. 795-804.

[10] Hua, Y.J., Zhu, Y.Y., Cheng, C.J. (2008). "DQEM for large deformation analysis of structures with discontinuity conditions and initial displacements". J. of Engineering Structures, Vol. 30, pp. 1473-1487.

[11] Shu, C. (2000). "Differential quadrature and its application in engineering". 1st edition, Verlage London, Springer.

[12] Quan, J.R., Chang, C.T. (1989). "New insights in solving distributed system of equations by quadrature-method". J. of Compute Chem. Engng., Vol. 13, pp.1017-1024.

[13] Tornabene, F., Viola, E. (2008). "2-D solution for free vibrations of parabolic shells using generalized differential quadrature method". European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 27, pp. 1001-1025.

[14] Forde, B.W.R., Stiemer, S.F. (1987). "Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis". J. Of Computers & Structures, Vol. 27, No. 5, pp. 625-630.

[15] Al-rasby, S.N. (1991). "Solution techniques in nonlinear structural analysis". J. of Computers & Structures, Vol. 40, No. 4, pp. 985-993.

[16] Moradi, S., Taheri, F. (1999). "Postbuckling analysis of delaminated composite beams by differential quadrature method". J. of Composite Structures, Vol. 46, pp. 33-39.