

مکان یابی نقاط بهینه تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی

بهروز حسنی^۱ و احمد گنجعلی^{۲*}

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>تحلیل ایزوژئومتریکی یک روش عددی جدید در مدل سازی و آنالیز مسائل مهندسی است که انتظار می رود در آینده ای نه چندان دور بتواند جایگزین روش های عددی متداول نظیر اجزای محدود و روش های بدون المان گردد. اساس این روش فناوری نریز است که این امر باعث شده تا مدل سازی هندسه در این روش بدون تقریب صورت پذیرد، هر چند که در روش های عددی وجود خطا در تقریب تابع مجهول امری اجتناب ناپذیر است. یافتن نقاطی که در آنها تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی از خطای کمتری نسبت به سایر نقاط برخوردار باشد، موضوع این پژوهش است. در این مقاله اثبات می شود که این نقاط بهینه تنش همان نقاط انتگرال گیری به روش گوس می باشند و محل آنها با توجه به مرتبه توابع شکل نریز، منطبق بر حداقل تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال گیری به روش گوس در تحلیل ایزوژئومتریکی است. با استفاده از این نقاط برای هر مولفه تنش یک سطح بهبود یافته تشکیل می شود که جهت برآورد خطای ایزوژئومتریکی مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور بررسی کارایی این نقاط بهینه تنش به مدل سازی سه مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. نتایج به دست آمده از این پژوهش صحت وجود این نقاط بهینه تنش را در محل حداقل نقاط مورد نیاز جهت انتگرال گیری عددی به روش گوس در تحلیل ایزوژئومتریکی نشان می دهند.</p>	<p>واژگان کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریکی، نقاط بهینه تنش، تنش بهبود یافته، برآورد خطا، تکنیک نریز.</p>

۱- مقدمه^۱

رفع مشکلات روش های پیش از خود ارایه شده اند، اما هنوز هم نمی توان روشی را یافت که بتوان آن را کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسایل دارای هندسه پیچیده، ضعف در مدل سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المان ها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می شوند و یا مسائل بهینه سازی شکل سازه، اشاره نمود.

در دهه های گذشته روش های بسیاری برای تحلیل مسایل مهندسی ارایه شده است که برخی از مشهورترین آنها روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته ای از روش ها با عنوان روش های بدون شبکه می باشند. اگر چه این روش ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: ahmad.ganjali@yahoo.com

۱. استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد.

۲. استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شاهرود، گروه عمران، شاهرود، ایران

این تحقیق مکان نقاط بهینه تنش با توجه به مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل ایزوژئومتری مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، به حل سه مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است و نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی کل دامنه با چهار، نه، شانزده، بیست پنج و سی شش نقطه گوسی محاسبه شده است. تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده، تیر طره دایره‌ای شکل و صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری سه مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. مقایسه شاخص تاثیر و سطح تنش به دست آمده از روش ایزوژئومتری و سطح تنش بهبودیافته، با سطح تنش دقیق برای سه مثال حل شده در این پژوهش نشان می‌دهند که در روش ایزوژئومتری می‌توان از نقاط گوسی به عنوان نقاط فوق همگرا در تولید یک سطح تنش بهبودیافته استفاده نمود؛ همچنین مکان این نقاط، با توجه به مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل ایزوژئومتری، منطبق بر حداقل تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال‌گیری عددی به روش گوس می‌باشد.

۲- منحنی‌های بی-اسپلاین و نریز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نریز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [۸ و ۹] پیشنهاد می‌شود.

نریزها از بی-اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی-اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)^۷ تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه‌ی مدل‌سازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گره‌ی^۸ در فضای پارامتری یک‌بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود [۹]:

$$\Xi = \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1} \}, \quad \xi_{i+1} \geq \xi_i \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+p+1$$

که در آن ξ_i ، 'i' امین گره، p درجه چند جمله‌ای و n

برای غلبه بر این مشکلات و بهبود روش‌های موجود در تحلیل مسائل مهندسی، استفاده از توابع پایه اسپلاین به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کاگان^۱ و هولیگ^۲ معرفی شد [۳-۱]. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نریز (بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت)^۳ که از توسعه توابع اسپلاین به دست می‌آیند توسط هیوز^۴ تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتری نام گرفت [۴]. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه^۵ و پیشرفت‌های اخیر در زمینه گرافیک کامپیوتری تشکیل می‌دهد. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نریز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آن‌ها جهت درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتری به سرعت در زمینه‌های مختلفی همچون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. همچنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [۵].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققین در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. در حالت کلی روش‌های برآورد خطا در دو دسته روش‌های بازیافت تنش (گرادیان) و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند [۶]. استفاده از روش بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتری (SRI)^۶ اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [۷]. اساس روش SRI برگرفته از خاصیت فوق همگرایی تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است [۷]. در تحقیق حاضر به صورت ریاضی اثبات می‌شود که چرا نقاط گوس در تحلیل ایزوژئومتری دارای این ویژگی می‌باشند. همچنین در

¹ Kagan

² Höllig

³ Non-Uniform Rational B-splines(NURBS)

⁴ Hughes

⁵ CAD(Computer Aided Design)

⁶ Stress Recovery in Isogeometric analysis(SRI)

⁷ Patch

⁸ Knot Vector

به طوری که بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و \mathcal{H} دارای $s+1$ گره می‌باشد.

یک منحنی نریز از درجه‌ی p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (7)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین از درجه‌ی p هستند، که بر روی بردار گره‌ای به صورت رابطه (۲) تعریف شده‌اند.

و در نهایت، یک سطح نریز که در جهت ξ از درجه‌ی p ، و در جهت η از درجه‌ی q باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (8)$$

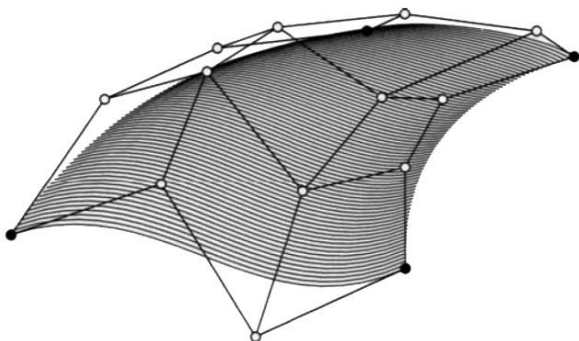
در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه‌ی نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای به صورت رابطه (۶) تعریف شده‌اند. در رابطه (۸) اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (9)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (10)$$

در شکل ۱ شبکه‌ی نقاط کنترلی و سطح نریز به دست آمده از آن با توابع پایه درجه دو مشاهده می‌شود.



شکل ۱- شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو

تعداد توابع شکل تشکیل‌دهنده بی-اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره‌ای وجود دارد، ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره‌ای به نام بردارهای گره‌ای نامتناوب^۱ (یا باز^۲) استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

در این صورت 'i' آمین تابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p (مرتبه $p+1$) که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی-اسپلاین از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (4)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای^۳ است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به صورت رابطه (۲) با فرض $b=1$ و $a=0$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آن‌گاه می‌توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آن‌ها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی-اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (5)$$

که در آن:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}; \quad (6)$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

¹ Nonperiodic knot vector

² Open

³ Piecewise polynomial curve

برای هم‌ارزسازی استاتیکی نیروهای گره‌ای با تنش‌های مرزی و بارهای گسترده و نهایتاً محاسبه ماتریس سختی می‌توان از روش تغییرمکان مجازی و یا روش حداقل کردن تابع پتانسیل استفاده نمود و با استفاده از آن به محاسبه مختصات مجهول نقاط کنترلی تغییرمکان پرداخت. براین اساس مطابق زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (12)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)، \mathbf{U} مجهولات مسئله (مختصه سوم نقاط کنترلی) و \mathbf{F} نیروهای خارجی وارد بر زیردامنه می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (13)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{R}^T \mathbf{b} dV + \int_\Gamma \mathbf{R}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (14)$$

در روابط بالا \mathbf{D} ماتریس خواص مصالح، \mathbf{b} نیروهای کالبدی^۲، \mathbf{t} نیروهای سطحی^۳، \mathbf{R} توابع پایه نریز و \mathbf{B} ماتریس مشتق توابع پایه نریز می‌باشند.

محاسبه‌ی انتگرال ماتریس سختی در مسائل دو بعدی تنش و کرنش مسطح با استفاده از المان سطحی نریز امکان‌پذیر است. بنابراین می‌توان انتگرال ماتریس سختی را برای هر زیردامنه نریز به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) d\Omega \quad (15)$$

حل عددی انتگرال فوق با استفاده از روش گوس در نهایت منجر به معادله زیر می‌شود.

$$\mathbf{K}_{patch} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^T(r, s) \mathbf{D} \mathbf{B}(r, s) \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 w_i w_j \quad (16)$$

که در آن m و n تعداد نقاط گوس در جهت r و s در هر المان، w_i, w_j وزن نقاط گوس، $\det \mathbf{J}_1$ دترمینان ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات از x و y (فضای فیزیکی مسئله) به ξ و η (فضای پارامتری نریز) و $\det \mathbf{J}_2$ دترمینان ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات از ξ و η (فضای پارامتری نریز) به r و s (فضای پارامتری انتگرال‌گیری) می‌باشد.

لازم به ذکر است که در تحلیل ایزوژئومتری حداقل

۳- فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتری در مسائل تنش و کرنش مسطح

در این بخش جهت آشنایی بیشتر با روش ایزوژئومتری به طور مختصر به تشریح روابط این روش در تحلیل مسائل تنش و کرنش مسطح پرداخته می‌شود.

به طور کلی در روش ایزوژئومتری، مقدار مجهول مسئله در حالت دوبعدی، (به طور مثال مولفه‌ی تغییرمکان جهت X) به عنوان یک سطح نریز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان‌کننده‌ی مقدار مجهول مسئله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح، اگر نقاط کنترلی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مولفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط، (P_x, P_y) ، بتوانند هندسه مسئله را در صفحه XY برآورد کنند، در این صورت مولفه‌ی سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درون‌یابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ی نریز نشان‌دهنده‌ی تغییرمکان آن نقطه باشد. در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه‌ی XY نشان‌دهنده‌ی هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه XY نشان‌دهنده‌ی تغییرمکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییرمکان در جهت X و Y را به ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییرمکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نریز (ناحیه^۱) را به صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون‌یابی کرد.

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u,i,j} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v,i,j} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

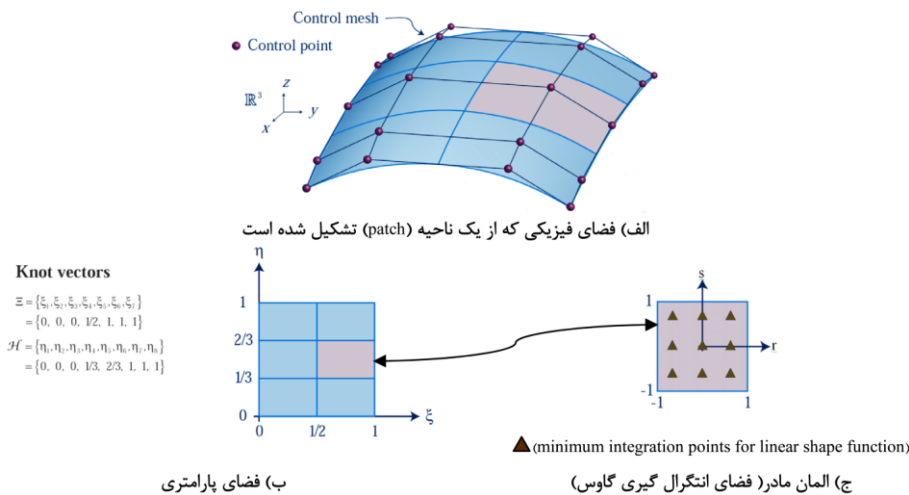
در رابطه‌ی بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ ها نمایش‌گر بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نریز (مختصات مجهول)، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ی نریز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت‌های X و Y می‌باشند.

مشابه روش اجزای محدود، در روش ایزوژئومتری نیز

² Body forces

³ Traction forces

¹ Patch



شکل ۲- نقاط انتگرال گیری گاوس در روش ایزوژئومتریك

تابع (فانکشنال) انرژی پتانسیل و حداقل کردن آن به دست می آید. این بدان معنی است که مختصات نقاط کنترلی ($\bar{\mathbf{P}}$) به نحوی محاسبه می شوند که تابع انرژی پتانسیل را حداقل سازند. تابع انرژی پتانسیل در مسائل الاستیسیته با توجه به رابطه (۱۷) در مقدار دقیق جابه جایی \mathbf{u} به صورت زیر بیان می شود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \quad (18)$$

در ادامه اثبات خواهد شد که حداقل کردن این تابع معادل است با حداقل کردن تابع Π^* که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}))^T \mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (19)$$

حداقل کردن تابع Π^* به معنی این است که فاصله بین سطوح دقیق و تقریبی تنش یعنی $(\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}})$ حداقل شود که این امر منجر به عبور بهترین سطح تنش از نقاط دقیق تنش معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به کمک روش حداقل مربعات می شود. این نقاط دقیق تنش با توجه به حل انتگرال رابطه (۱۹) به روش عددی گاوس، همان نقاط گاوسی می باشند. به نحوی دیگر می توان این طور بیان نمود که روند یافتن مولفه های جابه جایی در روش ایزوژئومتریك بدین صورت است که یک تابع حدس با درجه مشخص برای هر مولفه ی جابه جایی در نظر

تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال گیری عددی به روش گاوس با توجه به مرتبه توابع شکل از مورد مشابه آن در اجزای محدود بیشتر است [۱۰]. در شکل ۲ فضای فیزیکی و فضای پارامتری مربوط به آن و همچنین فضای انتگرال گیری عددی یک المان نریز ترسیم شده است.

۴- اثبات وجود نقاط فوق همگرای تنش در محل نقاط انتگرال گیری گاوس

فوق همگرا بودن تنش در نقاط گاوس به این دلیل است که تنش به دست آمده از حل ایزوژئومتریك در این نقاط با توجه به رابطه سازی آن (حداقل کردن تابع پتانسیل) معادل این است که به کمک روش حداقل مربعات بهترین سطح تنش را از مقدار دقیق تنش در نقاط گاوسی عبور دهیم. اثبات این موضوع به شرح زیر است. معادله دیفرانسیل مربوط به یک مسئله الاستیسیته خطی با شرایط مرزی معلوم به صورت زیر می باشد:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{b} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (17)$$

که \mathbf{L} معرف عملگر دیفرانسیل خطی، \mathbf{B} عملگر دیفرانسیل کرنش، \mathbf{D} ماتریس الاستیسیته و \mathbf{u} مقدار مجهول مسئله (جابه جایی) می باشد.

حل تقریبی به روش ایزوژئومتریك به روش حداقل کردن تابع پتانسیل، با جای گذاری مقدار $\bar{\mathbf{u}}$ از رابطه ی (۱۱) در

با توجه به این که نمو $\delta \mathbf{u}$ می‌تواند هر مقداری داشته باشد در نتیجه $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}$ در نظر می‌گیریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (22)$$

با کم کردن رابطه (۲۲) از رابطه (۱۸) و با توجه به متقارن بودن ماتریس \mathbf{D} خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}))^T \mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

در این صورت با توجه به رابطه (۲۳) و (۱۹) خواهیم داشت:

$$\Pi^* = \Pi + \text{constant} \quad (24)$$

در نتیجه حداقل کردن Π^* معادل با ایستا کردن تابع پتانسیل Π در مسائل الاستیسیته می‌باشد. بر این اساس می‌توان بیان کرد که در صورتی که p درجه چند جمله‌ای مورد استفاده برای تابع مجهول \mathbf{u} باشد درجه میدان گرادینان مسئله $p-1$ خواهد شد اما تنش به دست آمده در نقاط انتگرال‌گیری گوس هم درجه با تابع مجهول \mathbf{u} و برابر p خواهد بود که به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود.

۵- روش‌های برآورد خطا در اجزای محدود

جهت آشنایی با برخی از روش‌های تخمین خطای تحلیل‌های عددی در این بخش به معرفی تعدادی از این روش‌ها در برآورد خطای تحلیل اجزای محدود پرداخته می‌شود.

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله‌هایی است که توسط ریچاردسون در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است. روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود، معمولاً به اندازه مش‌های مورد استفاده بستگی دارد [۱۱]. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا و رینبولت آغاز شد. روش

گرفته می‌شود و ضرایب مجهول آن با استفاده از حداقل کردن تابع پتانسیل (محدودیت) محاسبه می‌شود. بدین صورت محدودیت به‌طور مستقیم بر مولفه‌های جابه‌جایی اعمال می‌شود لذا جابه‌جایی نسبت به تنش که از مشتق تابع جابه‌جایی به دست می‌آید دقیق‌تر است. دقت کم تنش ناشی از دو عامل است. یکی این که مرتبه تابع حدسی که برای تنش استفاده می‌شود به دلیل مشتق‌گیری، یک درجه از توابع حدس جابه‌جایی کمتر است؛ و دیگر این که محدودیت به‌طور مستقیم بر آن اعمال نشده است. حال حل انتگرال به روش گوس رابطه (۱۹) و حداقل کردن آن، اینطور بیان می‌کند که محدودیتی که برای یافتن ضرایب مجهول مولفه‌های جابه‌جایی طی می‌شود معادل ایجاد محدودیتی بر مولفه تنش در نقاط گوسی است. یعنی ضرایب مجهول مولفه‌های جابه‌جایی به نحوی محاسبه می‌شوند که تنش حاصل از حل تقریبی در نقاط گوسی کمترین فاصله را نسبت به حل دقیق مسئله داشته باشد. این امر برای تنش در نقاط گوسی با توجه به دو عامل باعث افزایش دقت می‌شود. یکی این که روند یافتن ضرایب مجهول مولفه‌های جابه‌جایی یک محدودیت مستقیم در یافتن تنش این نقاط ایجاد می‌کند و دوم این که مرتبه تابع حدس تنش در این نقاط با مرتبه تابع جابه‌جایی یکسان است.

در ادامه اثبات می‌شود که چگونه حداقل کردن تابع Π با حداقل کردن Π^* معادل است. بدین منظور نمودار تابع Π در مقدار مشخص $\bar{\mathbf{u}}$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\delta \mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

به دلیل متقارن بودن ماتریس الاستیسیته \mathbf{D} می‌توان رابطه (۲۰) را به صورت زیر بیان نمود.

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} (\mathbf{B}\delta \mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (21)$$

¹ Variation

نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المان‌های متصل به هر گره، میدان گرادیان بهبودیافته تعیین می‌شود. بعد از آن نیز تکنیک‌های بسیار دیگری توسط محققین ابداع شد که در هر یک به نوعی به بهبود روش SPR پرداخته می‌شود که به عنوان نمونه می‌توان به روش‌های REP [۱۵] و SPR-C [۱۶] اشاره کرد.

۶- تشریح روش بازیافت تنش

در این بخش به طور مختصر به چگونگی استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرا در تشکیل سطح تنش بهبودیافته پرداخته می‌شود. جهت آشنایی بیشتر با جزئیات این روش مراجعه به مرجع [۷] پیشنهاد می‌شود. در صورتی که سطح بازیافتی (بهینه) هر یک از مؤلفه‌های بردار تنش را با σ^* نشان دهیم، با توجه به توابع شکل نرئز می‌توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت زیر بیان نمود:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \quad (27)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، R توابع شکل نرئز و P مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش می‌باشد. در صورتی که R و P را به ترتیب بردار توابع شکل نرئز و بردار مختصات نقاط کنترلی، به صورت روابط (۲۸) و (۲۹) تعریف کنیم، رابطه (۲۷) را می‌توان به صورت (۳۰) بیان نمود.

$$\mathbf{R} = [R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,m}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,m}, \dots, R_{m,1}, \dots, R_{m,n}]^T \quad (28)$$

$$\mathbf{P} = [P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,m}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,m}, \dots, P_{m,1}, \dots, P_{m,n}]^T \quad (29)$$

$$\sigma^* = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \quad (30)$$

تنها پارامتر مجهول جهت تعیین این سطح، مختصات Z نقاط کنترلی (بردار \mathbf{P}) می‌باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار به دست آمده از

آن‌ها که روش باقیمانده‌ای نام گرفت بر این اساس بود که با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه المان‌ها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید [۱۱]. دسته دیگر از روش‌های برآورد خطا، روش‌های بازیافت تنش می‌باشد. به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه اجزای محدود داشته است. این میدان تنش بهبودیافته، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = \mathbf{N} \bar{\sigma} \quad (25)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ مقادیر گرهی این میدان و \mathbf{N} توابع شکل مورد استفاده در المان‌ها است. با استفاده از این میدان بهبودیافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{e}_\sigma^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (26)$$

که در رابطه بالا σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد [۶]. روش‌های متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از جمله ابتدایی‌ترین آن‌ها می‌توان به روش میانگین‌گیری که توسط هینتن و کمپبل در سال ۱۹۷۴ [۱۲] و روش تصویر L_2 که توسط اودن و براچلی در سال ۱۹۷۱ [۱۳] به کار برده شده است اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲ روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم گرا SPR^۱ توسط زینکویچ و زو ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد [۱۴]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و موثرترین روش‌ها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به کار می‌رود. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق همگرا است که در آن‌ها تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی

^۱ Superconvergent patch recovery

معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به دست آمده از حل تقریبی، \mathbf{D} ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به این که در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی‌باشد، پس به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| = \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

۸- ارائه مثال‌ها

در این قسمت جهت نمایش کارایی روش بازیافت تنش و کاربرد نقاط فوق همگرا در تولید سطح تنش بهبود یافته، به بیان نتایج گرفته شده از تحلیل سه مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. در انتها جهت بررسی و یافتن بهترین نقاط گوسی به عنوان نقاط بهینه تنش، به مقایسه شاخص تاثیر برآورد کننده خطا در این سه مثال با چهار، نه، شانزده، بیست پنج و سی شش نقطه گوسی پرداخته شده است.

۸-۱- تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

در این بخش به مدل‌سازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک دو سر مفصل تحت بار گسترده در شرایط تنش مسطح توسط تحلیل ایزوژئومتری و بازیابی تنش های آن پرداخته می‌شود (شکل ۳). پارامترهای به کار برده

تحلیل ایزوژئومتری و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس حداقل می‌کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{k_y} \sum_{i=1}^{k_x} (\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i,j})^2 \quad (31)$$

که در آن $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهت‌های x و y موجود در هر ناحیه می‌باشد. با جای گذاری رابطه (۳۰) در (۳۱) خواهیم داشت:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_l - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l)^2 \quad (32)$$

که در آن K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می‌باشد. در نهایت با مشتق‌گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته به دست می‌آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (33)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز به دست می‌آید. همان‌گونه که در ادامه خواهیم دید، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش به دست آمده از روش ایزوژئومتری دقیق‌تر می‌باشد و از این رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتری به کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

۷- نرم خطای انرژی

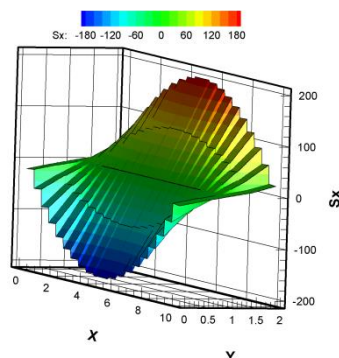
استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا،

دو در هر ناحیه استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهت ξ و η به صورت زیر می باشد.

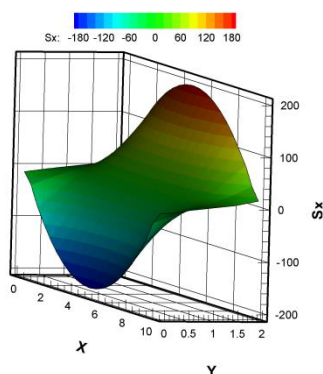
$$\xi = \{0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9, 1, 1\}, \quad (39)$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 1, 1\}$$

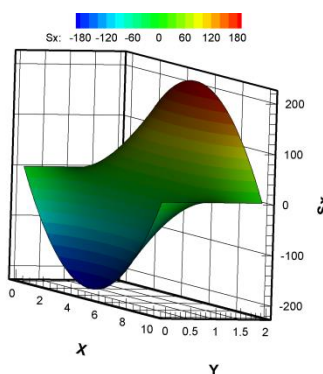
مطابق با شکل ۲ و با توجه به مرتبه توابع شکل در این مثال از نه نقطه گوس جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است.



الف) حل ایزوژئومتریک



ب) حل بهبودیافته

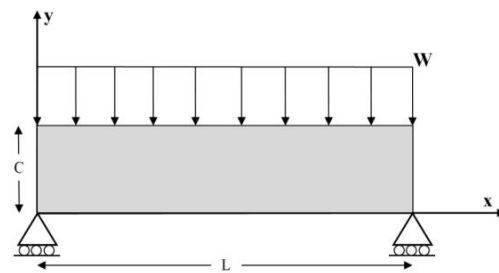


ج) حل دقیق

شکل ۶- سطح تنش σ_x تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

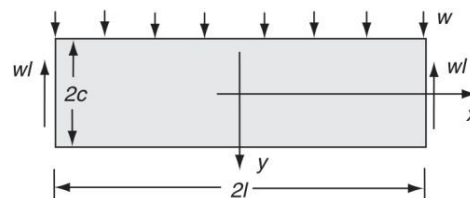
شده در مدل سازی و تحلیل این مثال به صورت زیر می باشد:

$$L = 10, \quad C = 2, \quad W = 11, \quad E = 1500, \quad \nu = 0.25$$



شکل ۳- تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده

تنش های دقیق این مسئله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل ۴ به صورت روابط (۳۶) تا (۳۸) در نظر گرفته شده است [۱۷].



شکل ۴- پارامترهای تعریف شده در حل تحلیلی تیر دوسر

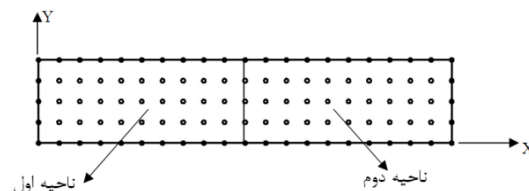
مفصل تحت بار گسترده [۱۷]

$$\sigma_x = \frac{3w}{4c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y - \frac{3w}{4c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \quad (36)$$

$$\sigma_y = -\frac{w}{2} + \frac{3w}{4c} y - \frac{w}{4c^3} y^3 \quad (37)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3w}{4c} x + \frac{3w}{4c^3} xy^2 \quad (38)$$

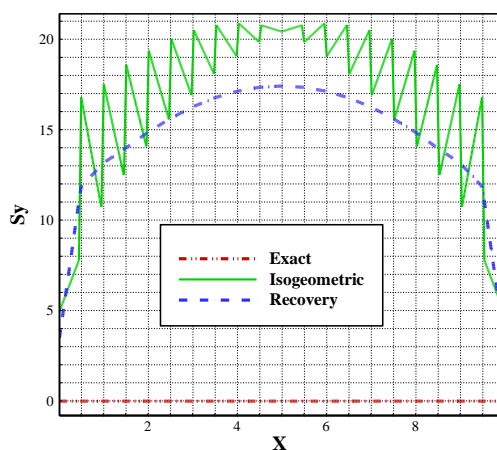
برای مدل سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از ۱۰۵ نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است (شکل ۵).



شکل ۵- نقاط کنترلی مورد استفاده در مدل سازی تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده

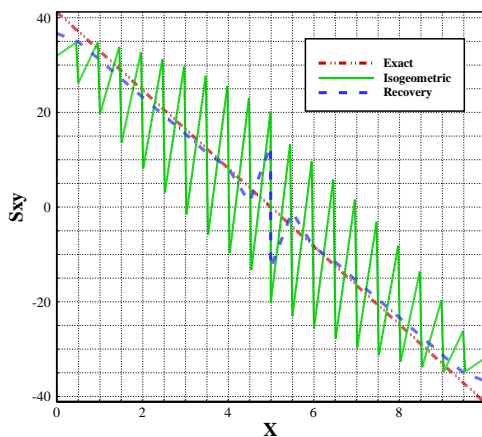
جهت نمایش بهتری از کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [۱۸] از توابع شکل نرین مرتبه

همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات حل بازیافتی نسبت به حل ایزوژئومتری به حل دقیق نزدیک تر است. در شکل ۱۰ نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی به تغییرات نرم خطای دقیق بسیار نزدیک است که نشان‌دهنده کارایی مطلوب تخمین کننده خطا و صحت فوق همگرا بودن نقاط گوسی است. همچنین شاخص تاثیر برای کل دامنه، ۰/۹۳ محاسبه شده است. شاخص تاثیر نسبت مجموع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد که نشان‌گر میزان همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا به شمار می‌رود. هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تاثیر به سمت یک میل نماید [۶].



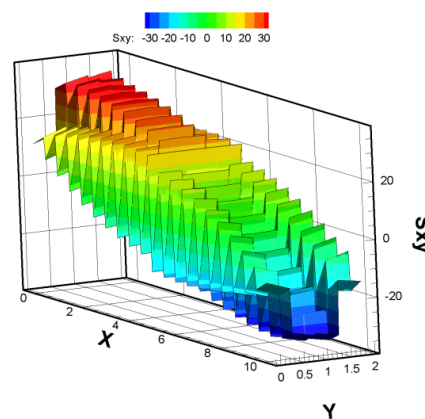
شکل ۸- نحوه تغییرات مولفه تنش σ_y تیر دو سر مفصل

تحت بار گسترده در مسیر $y=1$

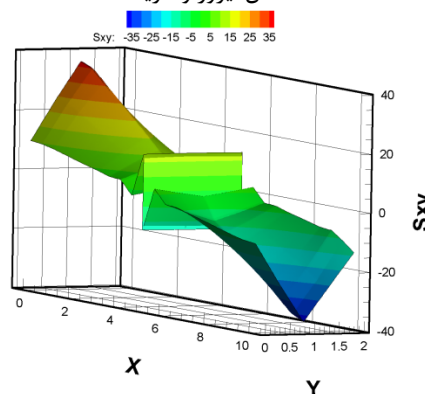


شکل ۹- نحوه تغییرات مولفه تنش τ_{xy} تیر دو سر مفصل

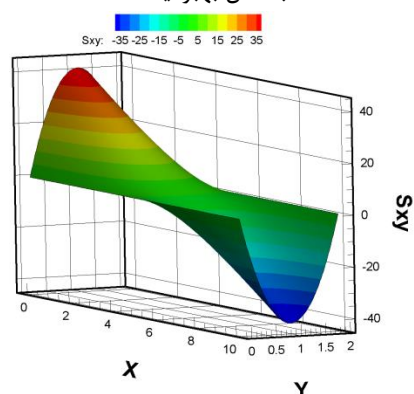
تحت بار گسترده در مسیر $y=1$



الف) حل ایزوژئومتری



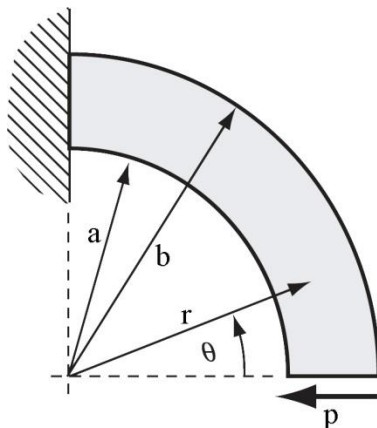
ب) حل بهبودیافته



ج) حل دقیق

شکل ۷- سطح تنش τ_{xy} تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

در شکل‌های ۶ و ۷ سطح تنش σ_x و τ_{xy} حاصل از حل ایزوژئومتری و حل دقیق به همراه سطح تنش بهبودیافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود سطح تنش بهبودیافته در مقایسه با سطح تنش ایزوژئومتری، تطابق قابل توجهی نسبت به سطح تنش دقیق دارد. همچنین در شکل‌های ۸ و ۹ نحوه تغییرات مولفه تنش σ_y و τ_{xy} حاصل از حل ایزوژئومتری، بهبودیافته (بازیافتی) و دقیق در مسیر $y=1$ ترسیم شده است.



شکل ۱۱- تیر طره دایره‌ای شکل

$$\sigma_r = \frac{P}{N} \left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \theta \quad (40)$$

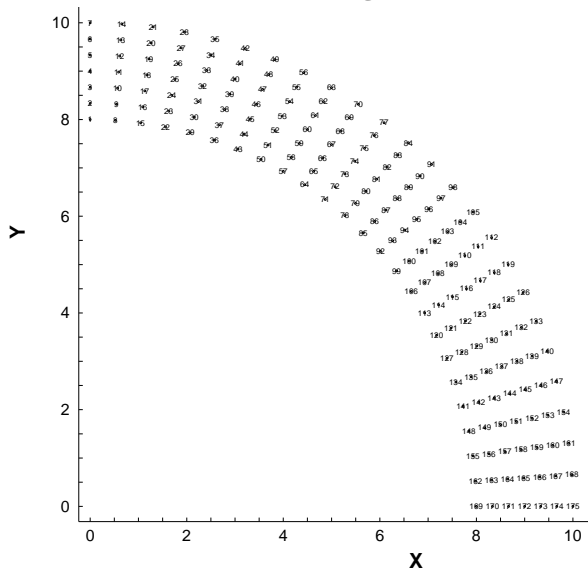
$$\sigma_\theta = \frac{P}{N} \left(3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \theta \quad (41)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \cos \theta \quad (42)$$

در روابط بالا N به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

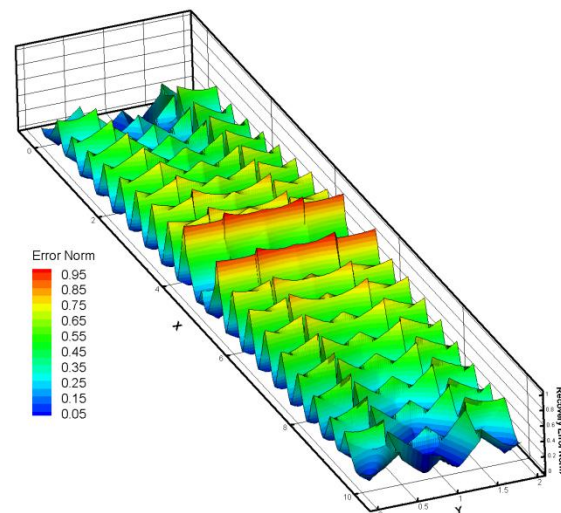
$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

برای مدل سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریکی از یک ناحیه و ۱۷۵ نقطه کنترلی استفاده شده است (شکل ۱۲).

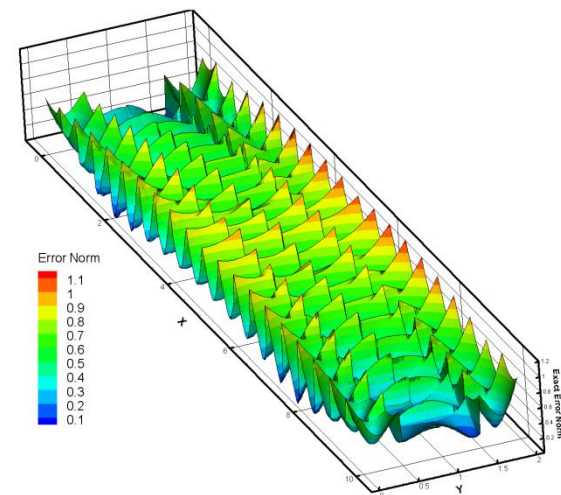


شکل ۱۲- نحوه آرایش و شماره گذاری نقاط کنترلی تیر طره دایره‌ای شکل

مشابه مثال قبل، جهت تحلیل این مسئله از توابع شکل نرئز مرتبه دو و جهت انتگرال گیری عددی از نه نقطه گوسی استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ξ و η



الف) نرم خطای تقریبی



ب) نرم خطای دقیق

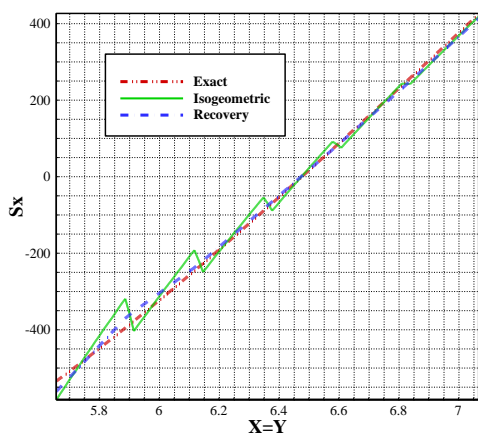
شکل ۱۰- نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

۸-۲- تیر طره دایره‌ای شکل

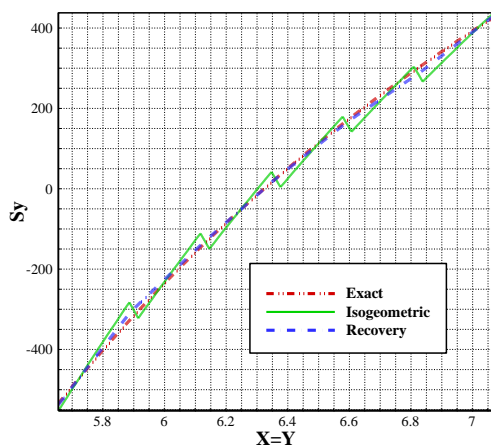
در این قسمت به مدل سازی یک تیر طره دایره‌ای شکل الاستیک در شرایط تنش مسطح توسط تحلیل ایزوژئومتریکی و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۱۱). پارامترهای به کار برده شده در مدل سازی و تحلیل این مثال به صورت زیر می‌باشد:

$a=8$, $b=10$, $P=100$, $E=2 \times 10^5$, $\nu=0.3$
تنش‌های دقیق این مسئله در دستگاه مختصات قطبی باتوجه به پارامترهای تعریف شده در شکل ۱۱ به صورت روابط (۴۰) تا (۴۲) در نظر گرفته شده است [۱۷].

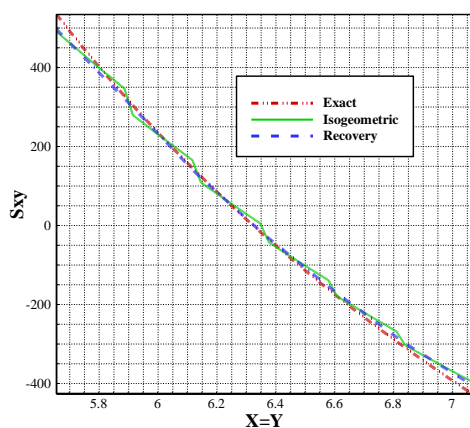
$x=y$ پرداخته شده است. همان طور که مشاهده می شود در این مثال نیز نحوه تغییرات مولفه تنش بازیافتی نسبت به حل ایزوژئومتریکی دقیق تر است.



شکل ۱۴- نحوه تغییرات مولفه تنش σ_x تیر طره دایره ای شکل در مسیر $X=Y$



شکل ۱۵- نحوه تغییرات مولفه تنش σ_y تیر طره دایره ای شکل در مسیر $X=Y$



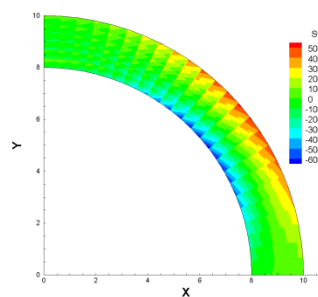
شکل ۱۶- نحوه تغییرات مولفه تنش τ_{xy} تیر طره دایره ای شکل در مسیر $X=Y$

η به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

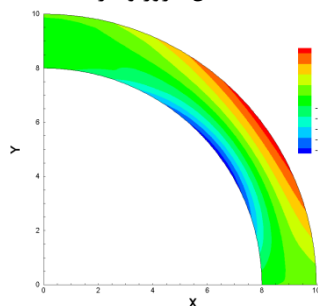
$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} 0,0,0.041,0.083,0.125,0.166,0.208,0.25, \\ 0.291,0.33,0.375,0.416,0.4583,0.5,0.5416, \\ 0.583,0.625,0.66,0.7083,0.75,0.7916, \\ 0.833,0.875,0.916,0.9583,1,1 \end{array} \right\}$$

$$\eta = \{0,0,0.1666,0.333,0.5,0.666,0.833,1,1\}$$

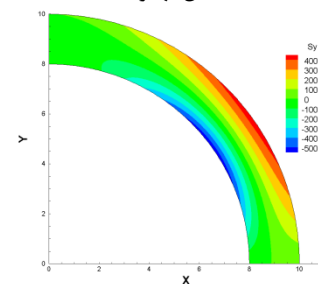
در شکل ۱۳ به عنوان نمونه کانتور تنش σ_y حاصل از حل ایزوژئومتریکی و حل دقیق به همراه کانتور تنش بهبودیافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود در این مثال نیز توزیع تنش بهبودیافته در مقایسه با توزیع تنش ایزوژئومتریکی، تطابق قابل توجهی نسبت به تنش دقیق دارد.



الف) حل ایزوژئومتریکی



ب) حل بهبودیافته



ج) حل دقیق

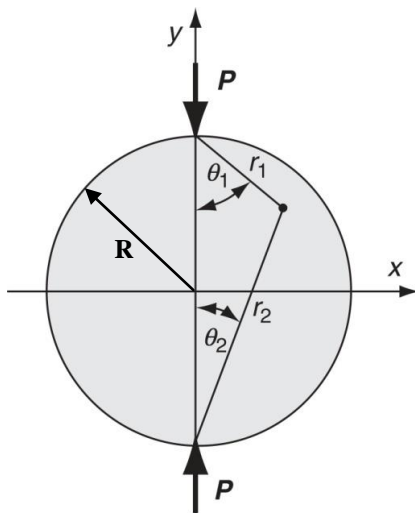
شکل ۱۳- کانتور تنش σ_y تیر طره دایره ای شکل

همچنین جهت مقایسه دیگری از نحوه تغییرات تنش بهبودیافته با حل اولیه ایزوژئومتریکی، در شکل های ۱۴ تا ۱۶ به ترسیم نحوه تغییرات مولفه های تنش در مسیر خط

دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، لذا یک تخمین کننده خطای مناسب باید به طور نسبی قادر به نمایش این توزیع خطا باشد. در صورتی که بهبود شبکه باتوجه به نتایج به دست آمده از تخمین کننده خطا مورد نظر باشد، تخمین کننده خطایی که دارای آرایشی مناسب باشد می تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در اطراف نوک ترک راهنمایی کند.

در شکل ۱۸ مشخصات صفحه دایره ای شکل تحت بار متمرکز قطری مشاهده می شود. پارامترهای به کار گرفته شده جهت تحلیل این مسئله به صورت زیر می باشد.

$$R=2, P=100, E=1000, \nu=0.3$$



شکل ۱۸- صفحه دایره ای تحت فشار متمرکز

تنش های دقیق این مسئله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل ۱۸ به صورت روابط (۴۳) تا (۴۵) می باشد [۱۷].

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{(R-y)x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y)x^2}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right] \quad (43)$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{(R-y)^3}{r_1^4} + \frac{(R+y)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right] \quad (44)$$

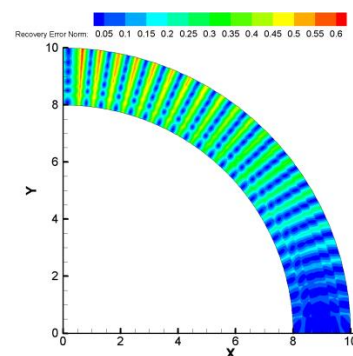
$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{(R-y)^2 x}{r_1^4} - \frac{(R+y)^2 x}{r_2^4} \right] \quad (45)$$

در روابط بالا r_1 و r_2 به صورت زیر می باشند.

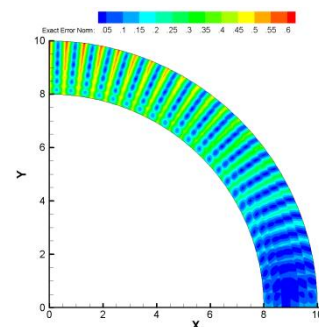
$$r_1 = \sqrt{x^2 + (R-y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (R+y)^2}$$

برای مدل سازی و تحلیل این مسئله به روش

در شکل ۱۷ نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود در این مثال نیز نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی به تغییرات نرم خطای دقیق بسیار نزدیک است که نشان دهنده کارایی مطلوب تخمین کننده خطا و صحت فوق همگرا بودن نقاط گوسی است. همچنین شاخص تاثیر برای کل دامنه، ۰/۹۵ محاسبه شده است.



الف) نرم خطای تقریبی



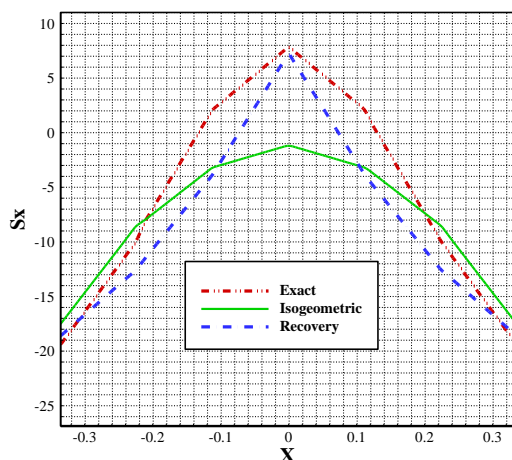
ب) نرم خطای دقیق

شکل ۱۷- نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی

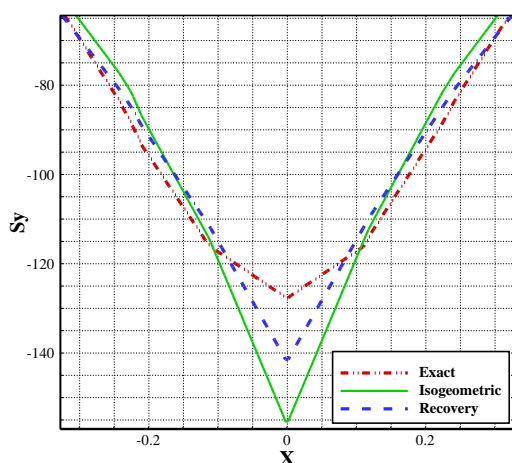
۸-۳- صفحه دایره ای تحت بار متمرکز فشاری

در این مثال به بررسی خاصیت فوق همگرایی نقاط گوسی در تولید سطح تنش بهبود یافته و برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتری یک مسئله دارای نقطه تکین می پردازیم. البته به نظر می رسد که مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین کننده های خطا به شمار نمی روند؛ اما هدف از این مثال همان طور که گفته شد، بررسی خاصیت نقاط گوسی در نحوه رفتار برآورد کننده خطای پیشنهادی می باشد. باتوجه به این که زیر بار متمرکز به عنوان یک نقطه تکین،

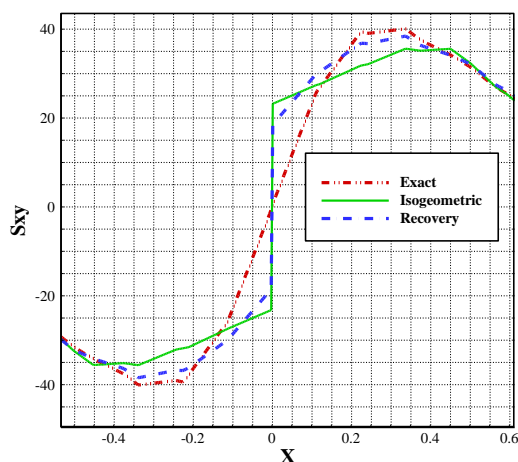
مثال شاخص تاثیر برای کل دامنه، ۰/۴۷ محاسبه شده است.



شکل ۲۰- نحوه تغییرات مولفه تنش σ_x صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری در مسیر $y=3.5$

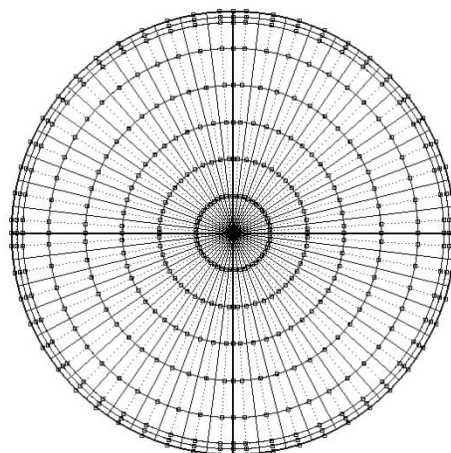


شکل ۲۱- نحوه تغییرات مولفه تنش σ_y صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری در مسیر $y=3.5$



شکل ۲۲- نحوه تغییرات مولفه تنش τ_{xy} صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری در مسیر $y=3.5$

ایزوژئومتری با فرض تنش مسطح، از ۵۱۳ نقطه کنترلی و چهار ناحیه مشابه به شکل ربع دایره استفاده شده است (شکل ۱۹).



شکل ۱۹- آرایش نقاط کنترلی و المان بندی در صفحه دایره‌ای

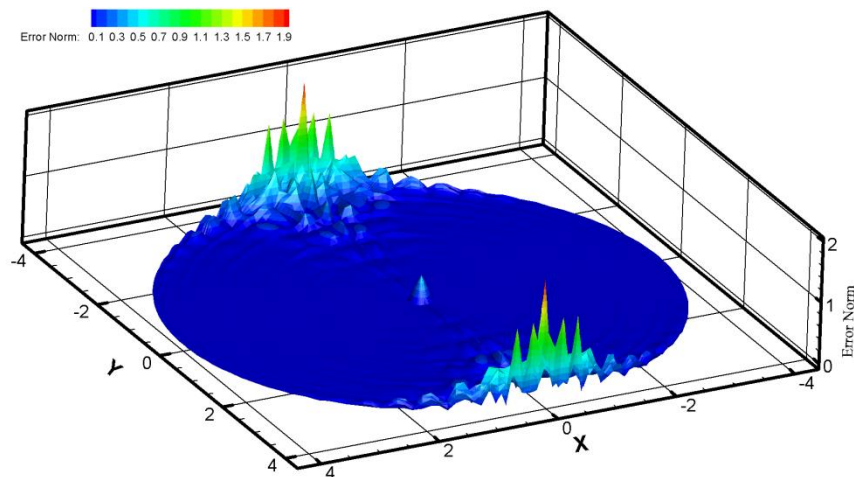
جهت تحلیل این مسئله در هر ناحیه از توابع شکل نریز مرتبه سه و جهت انتگرال گیری عددی از شانزده نقطه گوسی استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ξ و η در هر ناحیه به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\xi = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0.0769,0.1538,0.2307,0.3076, \\ 0.3846,0.4615,0.5384,0.6153,0.6923, \\ 0.7692,0.8461,0.9230,1,1,1 \end{Bmatrix},$$

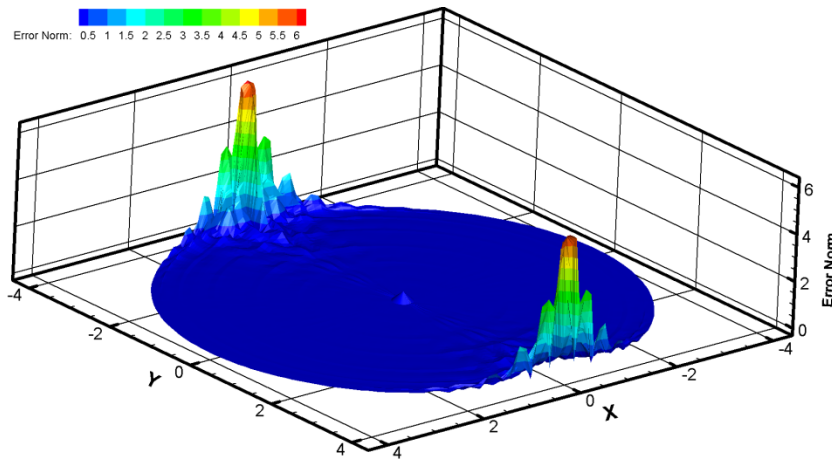
$$\eta = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0.1428,0.2857,0.4285,0.5714, \\ 0.71428,0.8571,1,1,1 \end{Bmatrix}$$

در شکل‌های ۲۰ تا ۲۲ نحوه تغییرات مولفه های تنش در مسیر $y=3.5$ و نزدیک نوک بار متمرکز نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، تنش بازیافتی دقت بیشتری نسبت به حل ایزوژئومتری در نزدیکی نوک بار متمرکز دارد.

در شکل ۲۳ نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی برای این مثال نشان داده شده است. همان طور که در توزیع نرم خطای تقریبی مشاهده می شود تطابق قابل قبول آن با توزیع نرم خطای دقیق و افزایش قابل ملاحظه میزان خطا در نوک بار متمرکز نسبت به سایر نقاط، نشان دهنده رفتار مناسب تخمین کننده خطا بویژه در شناسایی نقطه تکینگی می باشد. همچنین در این



الف) نرم خطای تقریبی



ب) نرم خطای دقیق

شکل ۲۳- نحوه توزیع نرم خطای انرژی صفحه دایره‌ای

۴-۸- بهترین محل نقاط انتگرال گیری گوس
به عنوان نقاط بهینه تنش

بود. در جدول ۱ بیشترین میزان شاخص تاثیر برای هر یک از مسائل نمونه از دیگر مقادیر متمایز شده است.

جدول ۱- مقادیر شاخص تاثیر برآورد کننده خطا برای نقاط گوسی مختلف

مسائل نمونه			تعداد نقاط انتگرال گیری به روش گوس
صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری (نواع شکل مرتبه سه)	تیر طره دایره‌ای شکل (نواع شکل مرتبه دو)	تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده (نواع شکل مرتبه دو)	
0.3834	0.9441	0.9183	چهار
0.4647	0.9456	0.9262	نه
0.4703	0.9415	0.9126	شانزده
0.4308	0.9440	0.9160	بیست و پنج
0.4170	0.9427	0.9148	سی و شش

در این بخش به بررسی و یافتن بهترین نقاط گوسی به عنوان نقاط بهینه تنش پرداخته می‌شود؛ بدین منظور به مقایسه شاخص تاثیر برآورد کننده خطا در سه مثال نمونه بیان شده در این پژوهش با چهار، نه، شانزده، بیست و پنج و سی شش نقطه گوسی پرداخته شده است. نتایج حاصل از این بررسی در جدول ۱ نشان داده شده است.

همان‌طور که بیان شد شاخص تاثیر نسبت مجموع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد و هر چه این شاخص به یک نزدیک‌تر شود نشان‌دهنده قدرت بیشتر برآورد کننده خطا در تخمین میزان خطا در مسئله خواهد

انتگرال گیری گوسی در تحلیل ایزوژئومتریکی دارای خاصیت فوق همگرا می باشند. همچنین تعداد بهینه نقاط انتگرال گیری به روش گوس به عنوان نقاط فوق همگرای تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی مورد بررسی قرار گرفت. باتوجه به نتایج به دست آمده برای شاخص تاثیر و همچنین تطابق تقریبی نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی و تشابه قابل توجه سطح تنش بهینه با سطح تنش دقیق برای مساله های نمونه ذکر شده در این پژوهش، می توان بیان کرد که با توجه به مرتبه توابع شکل، محل نقاط بهینه تنش منطبق بر حداقل تعداد نقاط انتگرال گیری به روش گوس در تحلیل ایزوژئومتریکی است و در نهایت براساس این پژوهش می توان خاصیت فوق همگرایی نقاط گوس را به عنوان راه حلی ساده و مهندسی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش به دست آمده از تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریکی معرفی نمود.

همان طور که مشاهده می شود بیشترین میزان شاخص تاثیر برای هر مثال مطابق با بیشترین نقاط انتگرال گیری به روش گوس نمی باشد. بلکه برای مسائل تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده و تیر طره دایره ای شکل که با توابع شکل مرتبه دو مورد تحلیل قرار گرفته اند، نه نقطه می باشد و برای مسئله صفحه دایره ای شکل که با توابع شکل مرتبه سه مورد تحلیل قرار گرفته است این نقاط به شانزده نقطه افزایش یافته اند. با توجه به این نتایج می توان بیان نمود که تعداد نقاط بهینه تنش وابسته به مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل مسئله می باشد به طوری که با توجه به مرتبه توابع شکل، محل نقاط بهینه تنش منطبق بر حداقل تعداد نقاط انتگرال گیری به روش گوس در تحلیل ایزوژئومتریکی است.

۹- نتیجه گیری

در این مقاله به صورت ریاضی اثبات شد که چرا نقاط

مراجع

- [1] Kagan, P., Fischer, A., Bar-Yoseph, P.Z. (1998). "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 41 435-458.
- [2] Hollig, K., Reif, U., Wipperfurth, J. (2001). "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems". *SIAM J. Numer. Anal.* 39, 2, 442-462.
- [3] Kagan, P., Fischer, A., Bar-Yoseph, P.Z. (2003). "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 57 1145-1175.
- [4] Hughes, T.G.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005). "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194, 4135-4195.
- [5] Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y. (2009). "Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA" / Wiley.
- [6] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., and Zhu, J.Z. (2005). "The Finite Element Method". 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [7] Hassani, B, Ganjali, A, Tavakkoli, M. (2012). "An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery". *European Journal of Mechanics A/Solids*, 31, 101-109.
- [8] Rogers, D.F. (2001). "An Introduction to NURBS". Morgan Kaufmann Publishers.
- [9] Piegl, L., and Tiller, W. (1997). "The NURBS Book, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [10] Hughes, T.J.R., Reali, A., Sangalli, G., (2010). Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199 (5-8), 301-313.
- [11] Zienkiewicz, O.C., (2006). "The background of error estimation and adaptivity in finite element computations". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195 207-213.
- [12] Hinton, E., Campbell, J., (1974). "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 8, pp.461-480.

- [13] Oden, T.J., Brauchli, J. (1971). "On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 3, pp. 317-325.
- [14] Zienkiewicz, O.C., Zhu, Z. (1992). "The super convergent patch recovery and a posteriori error estimates". Part 1: The recovery technique, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 1331-1364.
- [15] Boroomand, B., Zienkiewicz, O.C. (1997). "Recovery by equilibrium in patches (REP)". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 137-164.
- [16] Ródenas, J.J., Tur, M., Fuenmayor, F.J., Vercher, A. (2007). "Improvement of the super convergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 70:705–727, (2007).
- [17] Sadd, M.H. (2005). "ELASTICITY: Theory, Applications, and Numerics". Elsevier Butterworth–Heinemann.
- [18] Gratsch, T., Bathe, KJ. (2005). "A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis". *Computers and Structures*, Vol, 83, p.p. 235–265.