قیمت‌گذاری و بازاریابی در یک زنجیره تامین دوسطحی تحت چهار رویکرد نظریه بازی‌ها

عطا الله طالعی زاده[1*] و زاهده چراغی[2]

اطلاعات مقاله

واژگان کلیدی:
قیمت‌گذاری،
بازاریابی،
نش،
استکلبرگ،
همکاری.

چکیده

همکاری در تبلیغات یک استراتژی بازاریابی است که در آن خرده فروش، تبلیغات محلی را اجرا می‌کند و تولیدکننده بخشی از کل هزینه‌های آن را پرداخت می‌کند. در این تحقیق همکاری در تبلیغات و تصمیمات قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌ی تامین دو سطحی بررسی می‌شود، که شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش است. تقاضا در این مدل تابعی از قیمت و تبلیغات است. به‌منظور مطالعه‌ی تصمیم‌گیری بهینه‌ی اعضای زنجیره تحت فرضیات مختلف، چهار استراتژی توسعه داده شده است. استراتژی‌ها شامل سه بازی غیرهمکاری شامل بازی‌های نش، تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش رهبر و یک بازی همکاری هستند. محدب بودن توابع هدف در هر یک از حالت‌ها اثبات شده‌است. در پایان برای هر حالت یک مثال عددی ارائه و آنالیز حساسیت انجام شده است.

۱- مقدمه

اهمیت و تاکید بر رقابت و همکاری در زنجیره‌های تامین باعث تجدید حیات نظریه بازی‌ها به عنوان یک ابزار مناسب برای تحلیل فعل و انفعلات در یک زنجیره‌ی تامین شده است.هر یک از اعضای زنجیره می‌تواند به صورت جداگانه برای خود برنامه‌های تبلیغاتی داشته باشد، اما رابطه تعاملی یعنی حالت برد- برد زمانی اتفاق می‌افتد که هر یک از آنها قادر باشند برای خود شریک انتخاب کنند تا بخشی از هزینه‌های تبلیغات را پوشش دهند. توسعه‌ی حجم تجارت و پیچیدگی روزافزون خرده‌فروشی، تغییر رویکرد در تبلیغات را می‌طلبد. امروزه خرده‌فروشان قدرت بسیاری یافته و به دلیل افزایش و پیچیدگی رقابت، نقش فعال‌تری را در زمینه‌ی ارتباط با مشتریان ایفا می‌کنند. تبلیغات مشارکتی یکی از راه‌هایی است که تولیدکنندگان و توزیع‌کنندگان می‌توانند در برنامه‌های تبلیغاتی به صورت مشترک مشارکت کنند. این عمل نه تنها باعث کاهش در هزینه‌های تبلیغاتی شده بلکه موجب ایجاد پیوندی مهم با خرده فروشان محلی می‌شود و آثار بهتری از نام تجاری برای آنها به دنبال دارد. همکاری در تبلیغات یک توافق است، که در آن یک تولیدکننده با پرداخت یک بخش یا کل هزینه‌های تبلیغات محلی انجام‌شده توسط یک خرده‌فروش موافقت می‌کند. بنابراین متغیری به نام نرخ مشارکت تعریف می‌شود که عبارت است از درصدی از هزینه‌های تبلیغات محلی که تولیدکننده با پرداخت آن موافق است. نظریه بازی‌های بدون همکاری و باهمکاری که تصمیم‌گیری متوالی یا

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: taleizadeh@ut.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران

۲. دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب

همزمان چند بازیگر را درنظر می‌گیرد، ابزاری است که برای حل این مسئله به کار برده می‌شود. اگر بین بازیکنان مذاکره‌ای صورت گیرد و توافقی هم به وجود آید و اجرا شود، به آن «بازی با همکاری» می‌گویند. اما اگر بین بازیکنان مذاکره‌ای وجود نداشته باشد و یا به یک توافق قابل اجرا منجر نشود، آن را «بازی بدون همکاری» گویند.

۲- ادبیات تحقیق

هماهنگی در زنجیره تامین، یکی از موضوعاتی است که بسیاری از تحقیقات، بدون درنظر گرفتن حداکثرسازی سودِ هریک از اعضای کانال، بر روی آن تمرکز کرده‌اند [۱]. برگر[1][۲] اولین کسی بود که به بررسی مسئله‌ی تبلیغات با همکاری، با ارائه‌ی یک مدل ریاضی پرداخت. او نشان داد که تجزیه و تحلیل کمیِ پیشنهادی، می‌تواند در تعیین تصمیم‌گیری‌های بهینه به‌کار برده شود. یک رویکرد مشترک در ادبیات، برای تجزیه و تحلیل نقش تبلیغات با همکاری در هماهنگی زنجیره‌ی تامین، استفاده از مدل‌های نظریه‌ی بازی‌هاست. این مدل‌ها در دو دسته‌ی ایستا و پویا توسعه یافته‌اند. دانت و برگر[2][۳]، برگن وجان[3][۴]، کیم و استیلین[4][۵]، کری و زاکور[5][۶،۷]، هوآنگ و لی[6][۸]، هوآنگ و همکاران [۹] و لی و همکاران [۱۰] مدل‌های ایستا را بررسی کرده‌اند که در این مدل‌ها فعل و انفعالات بین اعضای زنجیره‌ی تامین در یک دوره، مورد بحث قرار می‌گیرند. جورجن‌سن و زاکور[7][۱۱] و جورجن‌سن و همکاران [۱۳،۱۲] مدل‌های پویا را مورد بررسی قرار داده‌اند اما در بسیاری از این مطالعات انجام شده با وجود نقش اساسی نرخ مشارکت، از آن چشم پوشی کرده‌اند. برگر و همکاران [۱۴] این موضوع را در مسئله تبلیغات با همکاری درنظر گرفته‌اند. تعیین قیمت خرده فروش و عمده فروش در بسیاری از مطالعات، به عنوان یک وظیفه‌ی بنیادین در مدیریت زنجیره‌ی تامین، مورد توجه قرار گرفته‌است. جولاند و شوگان[8][۱۶،۱۵]، ام‌سی‌گور و استیلین[9][۱۷]، مورسی[10][۱۸]، اینجن و پاری[11][۲۰،۱۹،۲۲،۲۱] و چوی[12][۲۴،۲۳] هماهنگی کانال در زنجیره‌ی تامین دو سطحی را مورد بحث قرار داده‌اند. آنها این کار را با مکانیسم قیمت‌گذاری مشترک، و همچنین تعرفه‌ی دوبخشی و مقدار تخفیف انجام داده‌اند. تعدادی از مطالعات وجود دارند که تصمیمات قیمت-گذاری و تبلیغات را به طور همزمان در یک هماهنگی زنجیره‌ی تامین درنظر گرفته‌اند. جورجن‌سن و زاکور [۲۵] یک مدل بازی تفاضلی[13] را پیشنهاد کرده‌اند که در آن تصمیمات قیمت‌گذاری و تبلیغات را در یک زنجیره‌ی تامین دوسطحی، تحت دو حالت همکاری و غیرهمکاری درنظر گرفته‌اند. جورجن‌سن و همکاران [۱۳] نقش رهبر را در یک کانال بازاریابی با یک تولیدکننده و یک خرده فروش درنظر گرفته‌اند، به نحوی که هر بازیکن، تبلیغات و سود حاشیه‌ای خود را کنترل می‌کند. در مدل آنها، تقاضای مصرف‌کننده متاثر از حسن نیت تبلیغات و قیمت خرده‌فروش است. جورجن‌سن و زاکور [۲۶] تقاضای مصرف‌کننده را که وابسته به قیمت خرده‌فروش و تبلیغات است، در یک مجموعه‌ی پویا مدل‌سازی کرده‌اند، و سپس نتایج استراتژی‌های هماهنگی را با همه‌ی آنهایی که ناهماهنگ هستند، مقایسه کرده‌اند. یو[14] و همکاران [۲۷]، مدل ایستای هوآنگ و همکاران [۹] را که به تجزیه و تحلیل نقش تبلیغات با همکاری در هماهنگی زنجیره‌ی تامین با استفاده از مدل‌های نظریه‌ی بازی‌ها پرداخته‌اند، توسعه داده است. آنها این کار را با توجه به تقاضای حساس به قیمت انجام داده‌اند، و تاثیر تخفیف مستقیم از سوی تولیدکننده به مشتری را، که ممکن است در یک کانال هماهنگ اتفاق بیفتد، مورد مطالعه قرار داده‌اند.

[1]Berger
[2]Dant and Berger
[3]Bergen and John
[4] Kim and Staelin
[5]Karray and Zaccour
[6]Huang and Li
[7]Jørgensen and Zaccour
[8]Jeuland and Shugan
[9] McGuire and Staelin
[10]Moorthy
[11]Ingene and Parry
[12] Choi
[13] Differential game
[14]Yue

ونگ[1] و همکارانش [۲۸] بررسی کرده‌اند که سیاست‌های همکاری تبلیغات و سودهای اعضا چگونه تحت تاثیر رفتارهای مختلف رقابتی قرار می‌گیرند و سپس تعیین کرده‌اند که آیا شرکا انگیزه‌ای برای تغییر ساختار دارند یا نه. هی[2] و همکاران [۲۹] یک زنجیره تامین را با یک خرده‌فروش و یک تولیدکننده به عنوان یک بازی تفاضلیِ استاکلبرگ مدلسازی کرده است. در این بازی، تقاضا تابعی از قیمت خرده‌فروش و تبلیغات است. به گفته‌ی چوی[3][۲۳] توابع تقاضای متفاوت، منجر به نتایج متفاوت قابل ملاحظه‌ای می‌شوند. اس‌مرکوواس‌کای و ژانگ[4][۳۰] قیمت‌گذاری و تبلیغات را در یک زنجیره‌ی تامین دو عضوی در نظر گرفتند، که در آن تقاضای مشتری بستگی به قیمت خرده فروش و تبلیغات دارد. آنها با درنظر گرفتن تولیدکننده به عنوان رهبر، به تصمیم‌گیری‌های بهینه‌ی خرده‌فروش و تولیدکننده رسیده‌اند. زی و نی‌رت[5][۳۱] و زی و وی[6][۳۲] و سیداصفهانی و همکارانش [۱] یک رویکرد مشابه را با توابع تقاضای متفاوت دنبال کرده‌اند. آنها نتایج بهینه‌ی بازی همکاری را با بازی‌های غیرهمکاری مقایسه کرده‌اند. سیداصفهانی و همکاران [۱] و زی و نی‌رت [۳۱] چهار مدل بازی را بررسی کرده‌اند، که سه بازی غیرهمکاری و یک بازی همکاری است. در حالی که خی و وی [۳۲] فقط دو مدل بازی، شامل بازی همکاری و بازی تولیدکننده به عنوان رهبر را بررسی کرده‌اند. آئوست و بوسچر[7][۳۳] با توسعه‌ی مدل سیداصفهانی و همکاران [۱] به تصمیمات قیمت‌گذاری و همکاری تبلیغات در یک زنجیره تامین دوسطحی با یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش پرداخته اند. آنها با استفاده از تئوری بازی‌ها چهار استراتژی را بررسی کرده‌اند و سیاست‌های همکاری و غیر همکاری را با هم مقایسه کرده‌اند. در این تحقیق با بهره گرفتن از مطالعه‌ی زی و وی [۳۲] با استفاده از دو رویکرد همکاری و غیرهمکاری تئوری بازی‌ها، چهار سناریو را شامل (۱) بازی نش (۲) بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر (۳) بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر (۴) بازی همکاری، در نظر می‌گیریم. در حالی‌که زی و وی [۳۲] فقط دو استراتژی را تحت بررسی قرار داده‌اند. همچنین برای هر حالت یک مثال عددی ارائه می‌شود و مجموع حداقل سودهایی که اعضای زنجیره در بازی‌های غیرهمکاری ادعا می‌کنند با سود همکاری مقایسه می‌شود. در نهایت تحلیل حساسیتی برای هر یک از متغیرهای تصمیم نسبت به پارامترها ارائه می‌شود.

۳- تعریف مسئله

زنجیره‌ی تامینی شامل یک تولیدکننده و یک خرده-فروش را درنظر بگیرید. در این زنجیره تولیدکننده محصولاتش را به یک خرده‌فروش می‌فروشد، و خرده-فروش تنها محصول تولیدکننده را به مشتریان می‌فروشد. تولیدکننده روی قیمت عمده‌فروشی w، هزینه‌ی تبلیغات ملی A و نرخ مشارکت t تصمیم‌گیری می‌کند. از طرف دیگر خرده‌فروش در مورد قیمت خرده‌فروشی p و هزینه-ی تبلیغات محلی a تصمیم می‌گیرد. فرض می‌کنیم تقاضای مشتری به شکل زیر است:

$$D(p,a,A)=D_0.n(x).g(p).h(a,A) \qquad (۱)$$

که در آنها D_0 تقاضای اولیه‌ی مشتری، $g(p)$ تاثیرات قیمت خرده‌فروش و $h(a,A)$ تاثیرات هزینه‌های تبلیغات را نشان می‌دهد. به منظور مدلسازی مسئله، پارامترها و متغیرهای تصمیم زیر استفاده شده‌اند.

متغیرهای تصمیم

p: قیمت واحد خرده‌فروش
w: قیمت واحد عمده‌فروش
A: هزینه‌ی تبلیغات ملی
a: هزینه‌ی تبلیغات محلی
t: نرخ مشارکت
Π: سود

[1]Wang
[2]He
[3]Choi
[4]Szmerekovsky and Zhang
[5]Xie and Neyret
[6]Xie and Wei
[7]Aust and Buscher

پارامترها

D_0: تقاضای اولیه‌ی مشتری

α_1: حداکثر تقاضای محصول به ازای قیمت صفر

β_1: حساسیت قیمت

k_1: تاثیر تبلیغات محلی

k_2: تاثیر تبلیغات ملی

c: هزینه‌ی تولیدکننده برای تولید یک واحد

d: هزینه‌ی خرده‌فروش برای دسترسی به یک واحد

۳-۱- ساختار مدل

با توجه به مقاله‌ی خی و وی [۳۲] تاثیرات قیمت خرده‌فروش و تاثیرات هزینه‌ی تبلیغات، به ترتیب به شکل زیر هستند:

$$g(p)=\alpha_1-\beta_1 p \;\; ; \alpha_1,\beta_1>0 \qquad (۲)$$

$$h(a,A)=k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A} \;\; ; k_1,k_2>0 \qquad (۳)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۳) تابع تقاضای مدل به شکل زیر است:

$$D(p,a,A)=D_0(\alpha_1-\beta_1 P)(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A}) \qquad (۴)$$

بنابراین توابع سود تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره در مدل به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}\Pi_m(w,A,t)&=D_0(w-c)(\alpha_1-\beta_1 p)\\ &\times(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-A-ta\end{aligned} \qquad (۵)$$

$$\begin{aligned}\Pi_r(p,a)&=D_0(p-w-d)(\alpha_1-\beta_1 p)\\ &\times(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-(1-t)a\end{aligned} \qquad (۶)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{sc}(p,a,A)&=D_0(p-c-d)(\alpha_1-\beta_1 p)\\ &\times(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-A-a\end{aligned} \qquad (۷)$$

که اندیس های r، m و sc به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تولیدکننده، خرده‌فروش و کل زنجیره است. حال توابع سود فوق تحت چهار رویکرد تئوری بازی‌ها، مدلسازی، حل و مقایسه می‌شوند. در این مدل برای ساده شدن محاسبات مطابق با مقاله‌ی زی و نی‌رت [۳۱] و زی و وی [۳۲] از نرمالسازی استفاده می‌کنیم. بنابراین از آنجایی که تابع تقاضا مثبت است شرایط $p<\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ باید برقرار باشد. همچنین برای جلوگیری از نامنفی شدن تابع سود زنجیره شرایط $\Pi_{sc}>0 \Rightarrow p>c+d$ باید برقرار باشد. در نتیجه رابطه‌ی $c+d<\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Rightarrow \alpha_1-\beta_1(c+d)>0$ را خواهیم داشت. بنابراین برای ساده سازی از تغییر متغیرهای

$$\alpha_1'=\alpha_1-\beta_1(c+d)،\qquad p'=\frac{\beta_1}{\alpha_1'}(p-(c+d))،$$

$$w'=\frac{\beta_1}{\alpha_1'}(w-c)،\quad k_1'=D_0\frac{\alpha_1'^2}{\beta_1}k_1 \;\text{و}\; k_2'=D_0\frac{\alpha_1'^2}{\beta_1}k_2$$

استفاده می‌کنیم. پس توابع سود در رابطه‌ی (۵)، (۶) و (۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\Pi_m'(w',A,t)&=w'(1-p')\\ &\times(k_1'\sqrt{a}+k_2'\sqrt{A})-A-ta\end{aligned} \qquad (۸)$$

$$\begin{aligned}\Pi_r'(a,p)&=(p'-w')(1-p')\\ &\times(k_1'\sqrt{a}+k_2'\sqrt{A})-(1-t)a\end{aligned} \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{sc}'(p',a,A)&=p'(1-p')\\ &\times(k_1'\sqrt{a}+k_2'\sqrt{A})-a-A\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که برای ساده شدن، علامت (') را در محاسبات برمی‌داریم.

۳-۲- بازی نش

در این بازی، تولیدکننده و خرده‌فروش قدرت تصمیم‌گیری یکسانی دارند و استراتژی‌های خود را به‌طور مستقل و همزمان انتخاب می‌کنند. ازین رو مسائل تصمیم‌گیری تولیدکننده و خرده‌فروش به طور جداگانه حل می‌شود. بنابراین مسائل تولیدکننده و خرده‌فروش به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned}&Max\,\Pi_m(w,A,t)\\ &\quad=w(1-p)(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-A-ta\\ &s.t.\;\; 0\le w\le 1,\; 0\le A \;\; and\, 0\le t\le 1\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}&Max\,\Pi_r=(p-w)(1-p)\\ &\quad\times(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-(1-t)a\\ &s.t.\;\; w\le p\le 1 \;\; and\, 0\le a\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

واضح است که مقدار بهینه‌ی t از نقطه‌نظر تولیدکننده برابر با صفر است، چون در تابع هدف تولیدکننده ضریب منفی دارد. همچنین تابع سود تولیدکننده نسبت به w صعودی است. اما w نمی‌تواند برابر با یک باشد، زیرا در این صورت سود تولیدکننده و خرده‌فروش هر دو صفر می‌شوند چون اگر $p\ge w=1$ آنگاه $p=1\Rightarrow \Pi_r=\Pi_m=0$. بنابراین برای حل مسئله، مطابق با مقاله‌ی جورجن‌سن و زاکور [۲۵]، زی و نی‌رت

[۳۱] و سیداصفهانی و همکاران [۱] فرض می‌کنیم خرده‌فروش تا زمانی که حداقل سود حاشیه‌ای واحد را نداشته باشد، اقدام به فروش محصول نمی‌کند. بنابراین سود حاشیه‌ای واحد تولیدکننده را به عنوان حداقل سطح درنظر می‌گیریم و محدودیت قیمت عمده‌فروشی را به صورت $p-w \geq w \Rightarrow w \leq \frac{p}{2}$ می‌نویسیم. که در آن $p-w$ و w به ترتیب سود حاشیه‌ای واحد خرده‌فروش و تولیدکننده هستند. بنابراین مقدار بهینه‌ی w برابر با $\frac{p}{2}$ است.

قضیه ۱. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم تحت سیاست نش عبارتند از:

$$p^N = \frac{2}{3} \quad (۱۳)$$

$$w^N = \frac{1}{3} \quad (۱۴)$$

$$t^N = 0 \quad (۱۵)$$

$$A^N = \frac{1}{324} k_2^2 \quad (۱۶)$$

$$a^N = \frac{1}{324} k_1^2 \quad (۱۷)$$

اثبات. به پیوست الف مراجعه کنید.

۳-۳- بازی تولیدکننده رهبر

در این بازی رابطه‌ی بین تولیدکننده و خرده‌فروش به عنوان یک بازی غیر همکاری متوالی مدل می‌شود، که تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش پیرو است. به‌منظور بدست آوردن این تعادل ابتدا باید بهترین پاسخ پیرو که در مرحله‌ی دوم توالی است تعیین شود و سپس مسئله‌ی تصمیم‌گیری رهبر بر پایه‌ی پاسخ پیرو حل شود. بنابراین بهترین پاسخ خرده‌فروش با توجه به حل مسئله‌ی خرده‌فروش در سیاست نش به شکل زیر خواهد بود:

$$p = \frac{1+w}{2} \quad (۱۸)$$

$$a = \left(\frac{k_1(1-w)^2}{8(1-t)}\right)^2 \quad (۱۹)$$

بنابراین در این قسمت جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری تولیدکننده با قرار دادن مقادیر بهینه‌ی p,a در تابع سود تولیدکننده محاسبه می‌شود.

قضیه ۲. مقادیر بهینه بازی تولیدکننده رهبر، خرده‌فروش پیرو که در آن $k = \frac{k_2^2}{k_1^2}$ است، عبارتند از:

$$w^{SM} = \frac{1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k} \quad (۲۰)$$

$$p^{SM} = \frac{\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)+1}{2\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)} \quad (۲۱)$$

$$t^{SM} = \frac{5+4k-\sqrt{16k^2+16k+9}}{3-4k+\sqrt{16k^2+16k+9}} \quad (۲۲)$$

$$A^{SM} = \left(\frac{k_2}{4}\right)^2 \times \left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)^2}\right)^2 \quad (۲۳)$$

$$a^{SM} = \left(\frac{k_1}{16}\right)^2 \left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2 \times \left(\frac{3+(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2 \quad (۲۴)$$

اثبات. به پیوست ب مراجعه کنید.

۳-۴- بازی خرده‌فروش رهبر

حال رابطه‌ی خرده‌فروش و تولیدکننده را در یک بازی متوالی غیر همکاری که در آن خرده‌فروش رهبر است، مدلسازی می‌کنیم. اولین قدم برای تعیین آن پیدا کردن بهترین پاسخ تولیدکننده است. با توجه به حل مسئله‌ی تولیدکننده در بازی نش بهترین پاسخ تولیدکننده که در مرحله‌ی دوم توالی است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$t = 0 \quad (۲۵)$$

$$w = \frac{p}{2} \quad (۲۶)$$

$$A = \left(\frac{1}{2} k_2 w (1-p)\right)^2 \quad (۲۷)$$

پس بهترین جواب تولیدکننده را در تابع سود خرده-فروش در رابطه‌ی (۱۲) قرار می‌دهیم تا ببینیم خرده-فروش به عنوان رهبر چه تصمیمی می‌گیرد. بنابراین جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری خرده‌فروش با قرار دادن مقادیر بهینه t، w و A در تابع سود خرده‌فروش محاسبه می‌شود.

قضیه ۳. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم زمانی‌که خرده‌فروش رهبر است عبارتند از:

$$p^{SR} = \frac{1}{2} \quad (۲۸)$$

$$w^{SR} = \frac{1}{4} \quad (۲۹)$$

$$a^{SR} = \left(\frac{k_1}{8}\right)^2 \quad (۳۰)$$

$$t^{SR} = 0 \quad (۳۱)$$

$$A^{SR} = \left(\frac{k_2}{16}\right)^2 \quad (۳۲)$$

اثبات. به پیوست پ مراجعه کنید.

۳-۵- بازی همکاری

در سه قسمت قبل سه بازی غیرهمکاری را مورد بررسی قرار دادیم. در این قسمت رابطه‌ی تولیدکننده و خرده‌فروش را به عنوان یک بازی همکاری بررسی می-کنیم که در آن اعضای زنجیره توافق بر همکاری و افزایش سود کل سیستم دارند. بنابراین تابع سود کل زنجیره را در نظر می‌گیریم و با توجه به آن مقادیر بهینه را بدست می-آوریم. بنابراین تابع هدف به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} &\underset{p,a,A}{Max} \ \Pi_{sc} = p(1-p)(k_1\sqrt{a} + k_2\sqrt{A}) - a - A \\ &s.t. \ 0 \le p \le 1, \ 0 \le a, A \end{aligned} \quad (۳۳)$$

همانطور که از تابع هدف مشخص است، زمانی‌که تولیدکننده و خرده‌فروش همکاری می‌کنند فقط p، A و a متغیرهای تصمیم‌گیری هستند، و متغیرهای w و t بر روی سود کل تاثیرگذار نیستند و تنها در تقسیم سود بین اعضا تاثیرگذارند.

قضیه۴. مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم بازی همکاری به صورت زیر است.

$$p^{co} = \frac{1}{2} \quad (۳۴)$$

$$A^{co} = \left(\frac{1}{8}k_2\right)^2 \quad (۳۵)$$

$$a^{co} = \left(\frac{1}{8}k_1\right)^2 \quad (۳۶)$$

اثبات. به پیوست ت مراجعه شود.

مطابق با مقاله‌ی زی و نی‌رت [۳۱]، سیداصفهانی و همکاران [۱] و آئوست و بوسچر [۳۳]فرض می‌کنیم دو بازیکن زمانی توافق به همکاری می‌کنند که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد. به این صورت که:

$$\Delta\Pi_m = \Pi_m^c - \Pi_m^{\max} \ge 0 \quad (۳۷)$$

$$\Delta\Pi_r = \Pi_r^c - \Pi_r^{\max} \ge 0 \quad (۳۸)$$

که Π_m^c و Π_r^c به ترتیب سود تولیدکننده و خرده-فروش در بازی همکاری را نشان می‌دهند و $\Pi_m^{\max}$ و $\Pi_r^{\max}$ به ترتیب بیشترین سود تولیدکننده و خرده‌فروش را در هر بازی غیرهمکاری دیگر نشان می‌دهند. زمانی‌که این نابرابری برقرار باشد، همکاری امکان‌پذیر است. اما این یک فرض بسیار محدود است. زیرا درواقع اگر هیچ شانسی برای بدست آوردن ساختار مورد نظر بازیکنان وجود نداشته باشد، ممکن است راضی به سود کمتر باشند و توافق بر همکاری کنند. علاوه بر این تغییرات در کانالی با رهبر و پیرو، ممکن است در کوتاه مدت امکان‌پذیر نباشد [۳۳]. بنابراین برای سود کل زنجیره داریم:

$$\Delta\Pi_{m+r} = \Delta\Pi_m + \Pi_r = \Pi_{m+r}^c - \Pi_m^{\max} - \Pi_r^{\max} \ge 0 \quad (۳۹)$$

سود کل همکاری با قرار دادن مقادیر بهینه‌ای که در قضیه ۴ آمده‌اند در تابع سود رابطه‌ی (۳۳) می‌تواند محاسبه شود. در حالی‌که برای پیدا کردن $\Pi_m^{\max}$ و $\Pi_r^{\max}$، لازم است نتایج بازی‌های دیگر را در بخش‌های ۳-۴، ۳-۳ و ۳-۲ با هم مقایسه کنیم. خلاصه‌ی مقادیر بهینه چهار استراتژی در جدول (۱) ارائه شده است.

۴- مثال عددی

در بخش قبل مقادیر بهینه‌ی چهار بازی نش، استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر و همکاری را بدست آوردیم، که مقادیر بهینه متغیر های تصمیم در هر بازی در جدول (۱) خلاصه شده‌اند. در این قسمت به یک مثال عددی می‌پردازیم. فرض می‌کنیم پارامترهای مدل، $D_0=5$، $c=1$، $d=1$، $k_1=2$ و $k_2=3$ هستند. در جدول (۲) مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم در هر چهار حالت ارائه شده‌اند.

جدول ۱. خلاصه‌ی مقادیر بهینه‌ی چهار استراتژی

متغیر	نش	استکلبرگ ۱	استکلبرگ ۲	همکاری
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)+1}{2\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}$	$\frac{1}{4}$	-
A	$\frac{1}{324}k_2^2$	$\left(\frac{k_2}{4}\right)^2\left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)^2}\right)^2$	$\left(\frac{k_2}{16}\right)^2$	$\left(\frac{1}{8}k_2\right)^2$
a	$\frac{1}{324}k_1^2$	$\left(\frac{k_1}{16}\right)^2\left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2\left(\frac{3+(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2$	$\left(\frac{k_1}{8}\right)^2$	$\left(\frac{1}{8}k_1\right)^2$
t	0	$\frac{5+4k-\sqrt{16k^2+16k+9}}{3-4k+\sqrt{16k^2+16k+9}}$	0	-

جدول ۲. نتایج مثال عددی

	نش	استکلبرگ ۱	استکلبرگ ۲	همکاری
p	۰/۶۶۷	۰/۷۱۶۸	۰/۵	۰/۵
w	۰/۳۳۴	۰/۴۳۳۵	۰/۲۵	-
A	۰/۰۲۷۸	۰/۰۳۳۹	۰/۰۳۵۲	۰/۱۴۰۶
a	۰/۰۱۲۳	۰/۰۰۱۶	۰/۰۶۲۵	۰/۰۶۲۵
t	۰	۰/۵۰۷۵	۰	-
Π_m	۰/۰۵۲۴	۰/۰۴۲۹	۰/۰۶۵۹	-
Π_r	۰/۰۶۷۹	۰/۰۴۹۹	۰/۰۷۰۴	-
Π_{sc}	۰/۱۲۰۳	۰/۰۹۲۹	/۱۶۸۰	۰/۲۰۳۱

همانطور که در قسمت قبل گفته شد، دو بازیکن زمانی توافق بر همکاری دارند، که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد (روابط ۳۷ و ۳۸). در اینجا دو بازیکن زمانی به حداکثر سود می‌رسند که تولیدکننده رهبر باشد. پس با توجه به فرض ما هر دو بازیکن در فرایند چانه زنی حداقل به سودهای $\Pi_m=0.0659$ و $\Pi_r=0.0704$ پافشاری می‌کنند، در غیر این صورت انگیزه‌ای برای عدم همکاری نخواهند داشت. حال اگر حداقل سودهایی را که هر دو طرف ادعا می‌کنند با هم جمع کنیم داریم $\Pi_m^{SR}+\Pi_r^{SR}=0.1363<\Pi_{m+r}^{c}=0.2031$ مشاهده می‌شود که در اینجا حداقل سودهایی را که هر دو طرف ادعا می‌کنند کوچکتر از سود کل همکاری که بین دو بازیکن تقسیم می‌شود، است. بنابراین همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت. در صورت عدم همکاری سود هر دو بازیکن کمتر خواهد بود و عدم همکاری به نفع هیچ یک از بازیکنان نیست.

۴-۱- تحلیل حساسیت

در این قسمت، آنالیز حساسیتی به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای مربوط به تبلیغات به‌منظور بررسی تغییرات و تاثیر آنها روی متغیرهای تصمیم ارائه می‌شود. در جدول (۳) تحلیل حساسیت مربوط به بازی نش، در جدول (۴) تحلیل حساسیت مربوط به بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، در جدول (۵) تحلیل حساسیت مربوط به بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر و در جدول (۶) تحلیل حساسیت مربوط به بازی همکاری نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش k_1، باعث افزایش مقدار a در هر چهار بازی و کاهش مقدار p، w، A و t در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر خواهد شد. همچنین افزایش k_2، باعث افزایش مقدار A در هر چهار بازی می‌شود. در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، افزایش k_2 موجب کاهش مقدار a و افزایش مقدار p، w، A و tخواهد شد. همانطور که مشاهده می‌شود متغیرهای تصمیم در سایر حالت‌ها نسبت به تغییر k_1 و k_2 ثابت هستند و درصد تغییراتشان صفر است. در بازی‌های غیرهمکاری سود تولیدکننده، خرده‌فروش و در نتیجه کل زنجیره با افزایش k_1 و k_2 افزایش پیدا می‌کند. همچنین در بازی همکاری با افزایش این پارامترها سود کل سیستم افزایش می‌یابد.

بر اساس جدول ۳، در بازی نش، p، w و t نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 حساس نیستند. A نسبت به k_1 حساس نیست اما با افزایش و کاهش k_2 خیلی حساس می‌شود و مقدار آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 حساس نیست اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به‌ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. سود تولیدکننده با افزایش k_1 و k_2 حساس می‌شود. سود خرده‌فروش نسبت به k_1 حساس و نسبت به افزایش و کاهش k_2 خیلی حساس است. در نتیجه سود کل زنجیره نسبت به k_1 حساس است و نسبت به k_2 نسبتا حساس است.

بر اساس جدول ۴، در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر، p، w و t نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 نسبتا حساس هستند. A نسبت به k_1 نسبتا حساس است اما نسبت به k_2 نیز خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن مقدار آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 نسبتا حساس است اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به‌ترتیب شدیدا افزایش و کاهش می‌یابد. سود تولیدکننده، خرده‌فروش و درنتیجه کل زنجیره مطابق نتایج نسبت به k_1 حساس و نسبت به افزایش و کاهش k_2 خیلی حساس هستند.

بر اساس جدول ۵، در بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر، p، w و t نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 حساس نیستند. A نسبت به k_1 حساس نیست اما نسبت به k_2 حساس است و با افزایش و کاهش آن مقدارش به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 حساس نیست اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به‌ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. سود تولیدکننده نسبت به k_1 و k_2 خیلی حساس است. سود خرده‌فروش نسبت به k_1 حساسیت بسیار کمی دارد و نسبت به k_2خیلی حساس است. در نتیجه سود کل زنجیره نیز نسبت به k_1 و k_2 خیلی حساس است.

بر اساس جدول ۶، در بازی همکاری، p نسبت به پارامترهای k_1 و k_2 حساس نیست. A نسبت به k_1 حساس نیست اما نسبت به k_2 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش k_2 مقدار آن به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. a نسبت به k_2 حساس نیست اما نسبت به k_1 خیلی حساس است و با افزایش و کاهش آن به‌ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. سود کل زنجیره نسبت به k_1 حساس و نسبت به k_2 نسبتا حساس است. مطابق با فرضیات در نظر گرفته شده، دو بازیکن زمانی توافق بر همکاری دارند، که سود آنها بیشتر از سود بازی‌های غیرهمکاری باشد.

جدول۳. نتایج تحلیل حساسیت در بازی نش

بازی نش									
	٪ تغییرات	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
K_1=۲	+۵۰	۰	۰	۰	۱۲۶	۰	۵۹	۲۲/۸	۳۸/۶
	+۲۵	۰	۰	۰	۵۷	۰	۲۶/۵	۱۰/۳	۱۷/۴
	-۲۵	۰	۰	۰	-۴۴	۰	-۲۰/۶	-۸	-۱۳/۵
	-۵۰	۰	۰	۰	-۷۴/۸	۰	-۳۵/۱	-۱۳/۵	-۲۳
K_2=۳	+۵۰	۰	۰	۷۷/۷	۰	۰	۴۱/۲	۶۳/۶	۵۳/۹
	+۲۵	۰	۰	۳۶	۰	۰	۱۹/۱	۲۹/۶	۲۵
	-۲۵	۰	۰	-۳۰/۶	۰	۰	-۱۶/۲	-۲۵	-۲۱/۱
	-۵۰	۰	۰	-۵۵/۸	۰	۰	-۲۹/۴	-۴۵/۵	-۳۸/۵

جدول۴. نتایج تحلیل حساسیت در بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر

بازی استکلبرگ- تولیدکننده رهبر									
	٪ تغییرات	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
K_1=۲	+۵۰	-۱/۲	-۴	-۲/۱	۱۷۵	-۵/۳	۲۸/۷	۲۲/۸	۲۵/۴
	+۲۵	-۰/۷	-۲/۲	-۰/۹	۷۵	-۲/۹	۱۲/۶	۱۰/۴	۱۱/۴
	-۲۵	۰/۸	۲/۷	۱/۲	-۵۲/۹	۳/۴	-۹/۱	-۸/۶	-۸/۹
	-۵۰	۱/۸	۶	۲/۴	-۸۲/۷	۷/۴	-۱۴/۷	-۱۶	-۱۵/۴
K_2=۳	+۵۰	۰/۸	۲/۷	۷۹/۹	-۱۸/۸	۳/۴	۶۱/۳	۶۲/۳	۶۱/۷
	+۲۵	۰/۴	۱/۵	۳۷/۲	-۱۲/۵	۱/۹	۲۸/۲	۲۹/۱	۲۸/۵
	-۲۵	-۰/۵	-۱/۸	-۳۱	۶/۳	-۲/۳	-۲۴	-۲۴/۹	-۲۴/۵
	-۵۰	-۱/۲	-۴	-۵۶/۳	۲۵	-۵/۳	-۴۲/۴	-۴۵/۳	-۴۴

جدول۵. نتایج تحلیل حساسیت در بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر

بازی استکلبرگ- خرده‌فروش رهبر									
	٪ تغییرات	p	w	A	a	t	Π_m	Π_r	Π_{sc}
K_1=۲	+۵۰	۰	۰	۰	۱۲۵	۰	۱۶۶/۸	۰	۴۶/۵
	+۲۵	۰	۰	۰	۵۶/۳	۰	۱۰۱/۵	-۰/۱۴	۲۱
	-۲۵	۰	۰	۰	-۴۳/۷	۰	۶/۷	-۰/۱۴	-۱۶/۳
	-۵۰	۰	۰	۰	-۷۵	۰	-۲۲/۹	۰	-۲۷/۹
K_2=۳	+۵۰	۰	۰	۷۷/۶	۰	۰	۸۹/۷	۷۷/۶	۴۸/۸
	+۲۵	۰	۰	۳۶/۱	۰	۰	۶۷/۵	۳۶/۱	۲۲/۷
	-۲۵	۰	۰	-۳۰/۷	۰	۰	۳۱/۹	-۳۰/۷	-۱۹/۲
	-۵۰	۰	۰	-۵۵/۷	۰	۰	۱۸/۵	-۵۵/۷	-۳۴/۹

جدول۶. نتایج تحلیل حساسیت در بازی همکاری

بازی همکاری					
	درصد تغییرات	p	A	a	Π_{sc}
K۱=۲	+۱	۰	۰	۱۲۵	۳۸/۵
	+۰/۵	۰	۰	۵۶/۳	۱۷/۳
	−۰/۵	۰	۰	−۴۳/۷	−۱۳/۴
	−۱	۰	۰	−۷۵	−۲۳/۱
K۲=۳	+۱	۰	۷۷/۸	۰	۵۳/۹
	+۰/۵	۰	۳۶/۱	۰	۲۵
	−۰/۵	۰	−۳۰/۵	۰	−۲۱/۱
	−۱	۰	−۵۵/۵	۰	−۳۸/۵

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق همکاری در تبلیغات را همراه با تصمیمات قیمت‌گذاری در یک زنجیره‌ی تامین دو سطحی شامل یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش بررسی کردیم. تقاضا در این مدل تابعی از قیمت و تبلیغات است. چهار نظریه‌ی بازی، به‌منظور مطالعه‌ی اثر توازن قدرت زنجیره‌ی تامین بر تصمیم‌گیری بهینه‌ی اعضای زنجیره توسعه داده شد، که سه بازی غیرهمکاری شامل بازی‌های نش، تولیدکننده رهبر و خرده‌فروش رهبر و یک بازی همکاری در نظر گرفته شد. مشاهده شد که مجموع حداقل سودهایی که هر دو طرف ادعا می‌کنند کوچکتر از سود کل همکاری است، بنابراین همکاری بین دو بازیکن وجود خواهد داشت. از طرفی مشاهده شد که در چهار استراتژی تاثیر تبلیغات محلی و ملی (k_1 و k_2) بر روی قیمت‌ها و نرخ مشارکت بسیار کم بود و همچنین به این نتیجه رسیدیم که در هر چهار استراتژی، تبلیغات ملی بر سود تولیدکننده، خرده‌فروش و در نتیجه کل زنجیره تاثیرگذارتر از تبلیغات محلی است. در این تحقیق پیشنهاد می‌شود که استراتژی‌های همکاری و غیرهمکاری با توابع مختلف تقاضا توسعه داده شود و علاوه بر قیمت-گذاری و تبلیغات، عوامل دیگری نیز در نظر گرفته شوند.

۶- پیوست‌ها

پیوست الف. اثبات قضیه ۱.

تابع سود تولیدکننده نسبت به A مقعر است، چون مشتق دوم تابع، نسبت به A منفی است.

$$\frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial A^2} = -\frac{1}{4} k_2 w\,(1-p) A^{-\frac{3}{2}} < 0 \qquad \text{(الف۱)}$$

بنابراین مقدار بهینه‌ی A از رابطه‌ی $\frac{\partial E[\Pi_m]}{\partial A} = \frac{1}{2} k_2 w\,(1-p) A^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$ بدست خواهد آمد. بنابراین مقادیر بهینه متغیر های تصمیم مسئله‌ی تولیدکننده به صورت زیر هستند:

$$t^* = 0 \qquad \text{(الف۲)}$$

$$w^* = \frac{p}{2} \qquad \text{(الف۳)}$$

$$A^* = \left(\frac{1}{2} k_2 w\,(1-p)\right)^2 \qquad \text{(الف۴)}$$

برای حل مسئله‌ی خرده‌فروش متغیر z را به صورت $(p-w)(1-p)$ تعریف می‌کنیم. با این محدودیت که $w \le p \le 1$ است. حال مشتق جزئی z نسبت به p برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial p} = (1-p) - (p-w) = 0 \qquad \text{(الف۵)}$$

از معادله‌ی (الف۵) مقدار $p=p_1$ برابر با $\frac{1+w}{2}$ است.دامنه‌ی zرا با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می‌کنیم به نحوی که اگر $p=1$ باشد آنگاه $z=0$ و همچنین $p=p_1 \Rightarrow z=(\frac{1-w}{2})^2>0$. پس بیشترین مقدار z در $p=p_1$ بدست می‌آید و کمترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0\le z\le(\frac{1-w}{2})^2$ است. در نتیجه مسئله‌ی خرده‌فروش را در رابطه‌ی (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\max \Pi_r = z\,(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-(1-t)a$$
$$s.t.\ 0\le z\le(\frac{1-w}{2})^2,\ 0\le a \qquad \text{(الف۶)}$$

Π_r نسبت به z یک تابع صعودی است، چون $\frac{\partial \Pi_r}{\partial z}=(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})$ است که یک مقدار مثبت و بزرگتر از صفر است. بنابراین مقدار بهینه‌ی z برابر با $(\frac{1-w}{2})^2$ است. همچنین تابع سود تولیدکننده نسبت به a مقعر است، چون مشتق دوم تابع، نسبت به a برابر با $\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial a^2}=-\frac{1}{4}k_1 z a^{-\frac{3}{2}}<0$ است، که یک مقدار منفی است. بنابراین مقدار بهینه‌ی a از رابطه‌ی $\frac{\partial \Pi_r}{\partial a}=\frac{1}{2}k_1 z a^{-\frac{1}{2}}-(1-t)=0$ بدست خواهد آمد. در نتیجه مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مسئله‌ی خرده-فروش به صورت زیر هستند:

$$p^*=\frac{1+w}{2} \qquad \text{(الف۷)}$$

$$z^*=(\frac{1-w}{2})^2 \qquad \text{(الف۸)}$$

$$a^*=\left(\frac{1}{2(1-t)}k_1 z\right)^2 \qquad \text{(الف۹)}$$

بنابراین با حل معادلات (الف۲) تا (الف۴) و (الف۷) تا (الف۹) به تعادل $p^N=\frac{2}{3}$، $w^N=\frac{1}{3}$، $t^N=0$، $A^N=\frac{1}{324}k_2^2$ و $a^N=\frac{1}{324}k_1^2$ خواهیم رسید.

پیوست ب. اثبات قضیه ۲.

با جایگزینی عبارت (۱۸) و (۱۹) در تابع سود تولیدکننده، تابع سود تولیدکننده به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\max \Pi_m = w(\frac{1-w}{2})\left(\left(\frac{k_1^2(1-w)^2}{8(1-t)}\right)+k_2\sqrt{A}\right)$$
$$-\frac{k_1^2 t}{4(1-t)^2}(\frac{1-w}{2})^4-A \qquad \text{(ب۱)}$$
$$s.t.\ 0\le A,\ 0\le w\le 1,\ and\ 0\le t\le 1$$

مقدار بهینه‌ی A و t از مشتق جزئی Π_m نسبت به A و t بدست می‌آید.

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial A}=\frac{k_2}{2\sqrt{A}}(\frac{1-w}{2})w-1=0$$
$$\Rightarrow A=\frac{k_2^2}{16}w^2(1-w)^2 \qquad \text{(ب۲)}$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial t}=(\frac{wk_1^2}{2(1-t)^2})(\frac{1-w}{2})^3$$
$$-\frac{k_1^2}{4}(\frac{t+1}{(1-t)^3})(\frac{1-w}{2})^4 \qquad \text{(ب۳)}$$
$$=\frac{(\frac{1-w}{2})^3k_1^2}{2(1-t)^2}\left[w-\frac{t+1}{4(1-t)}(1-w)\right]=0$$

در رابطه‌ی (الف۱۲) همواره $\frac{(\frac{1-w}{2})^3k_1^2}{2(1-t)^2}>0$ است. بنابراین مقدار t از رابطه‌ی $w-\frac{t+1}{4(1-t)}(1-w)=0$ بدست خواهد آمد. پس،

$$t=\frac{5w-1}{3w+1} \qquad \text{(ب۴)}$$

برای بدست آوردن قیمت عمده‌فروشی w باید از تابع سود تولیدکننده نسبت به w مشتق بگیریم. بنابراین معادله‌ی (ب۱) را ساده‌سازی کرده و به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\max \Pi_m=\frac{k_1^2}{16(1-t)}w(1-w)^3$$
$$+\frac{k_2\sqrt{A}}{2}w(1-w) \qquad \text{(ب۵)}$$
$$-A-\frac{k_1^2 t}{64(1-t)^2}(1-w)^4$$

از Π_m در رابطه‌ی (ب۵) نسبت به w مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial w} = 8k_2(1-2w)(1-t)^2\sqrt{A} + k_1^2(1-w)^3 t + k_1^2(1-4w)(1-w)^2(1-t) = 0 \qquad (\text{ب}۶)$$

مقدار بهینه‌ی A و t را در رابطه‌ی (ب۶) جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial w} = 32(1-2w)\left[\frac{(1-w)}{3w+1}\right]^2\left(\frac{k_2^2}{4}w(1-w)\right) + k_1^2(1-4w)(1-w)^2\left(\frac{2(1-w)}{3w+1}\right) + k_1^2(1-w)^3\frac{5w-1}{3w+1} = 0 \qquad (\text{ب}۷)$$

معادله‌ی بدست آمده از رابطه (ب۷) را به صورت یک معادله‌ی درجه دو بر حسب w نوشته و مقدار بهینه‌ی w را بدست می‌آوریم.

$$w^2(16k_2^2+9k_1^2) - w(8k_2^2) - k_1^2 = 0 \qquad (\text{ب}۸)$$

از آنجایی‌که $0<w<1$ است و با استفاده از رابطه‌ی $k=\frac{k_2^2}{k_1^2}$ مقدار بهینه‌ی w به صورت زیر است:

$$w = \frac{4k+\sqrt{16k^2+16k+9}}{9+16k} \qquad (\text{ب}۹)$$

مقدار بهینه‌ی w را در روابط بدست‌آمده‌ی (۱۸)، (۱۹)، (ب۲) و (ب۴) قرار می‌دهیم. بنابراین مقادیر بهینه‌ی زیر بدست خواهند آمد.

$$w^{SM} = \frac{1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}$$

$$p^{SM} = \frac{\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)+1}{2\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)}$$

$$t^{SM} = \frac{5+4k-\sqrt{16k^2+16k+9}}{3-4k+\sqrt{16k^2+16k+9}}$$

$$A^{SM} = \left(\frac{k_2}{4}\right)^2 \times \left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\left(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k\right)^2}\right)^2$$

$$a^{SM} = \left(\frac{k_1}{16}\right)^2\left(\frac{(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)-1}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2 \times \left(\frac{3+(\sqrt{16k^2+16k+9}-4k)}{\sqrt{16k^2+16k+9}-4k}\right)^2$$

پیوست پ. اثبات قضیه ۳

با جایگزینی عبارت (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) در تابع سود خرده‌فروش، مسئله‌ی تصمیم‌گیری خرده‌فروش به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\Pi_r = \frac{p}{2}(1-p)\left(k_1\sqrt{a}+\frac{1}{4}D_0k_2{}^2p(1-p)\right)-a \qquad (\text{پ}۱)$$
$$s.t.\ 0\le p\le 1 \ and\ 0\le a,$$

برای حل این مسئله y را به صورت $y=\frac{p}{2}(1-p)$ تعریف می‌کنیم. برای تعیین دامنه‌ی y مشتق اول آن را نسبت به p حساب می‌کنیم و با مقادیر حدی مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{(1-p)}{2} - \frac{p}{2} = 0 \qquad (\text{پ}۲)$$

از رابطه‌ی (پ۲) مقدار $p=p_1$ برابر با $\frac{1}{2}$ بدست خواهد آمد. دامنه‌ی y را با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می‌کنیم. اگر $p=0$ باشد، آنگاه $y=0$ و همچنین $p=p_1 \Rightarrow y=\frac{1}{8}>0$ و $p=1\Rightarrow y=0$. پس بیشترین مقدار y در $p=p_1$ بدست می‌آید و کمترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0\le y\le\frac{1}{8}$ است. در نتیجه مسئله‌ی خرده‌فروش را در رابطه‌ی (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Max\ \Pi_r = y\left(k_1\sqrt{a}+\frac{1}{2}D_0k_2{}^2y\right)-a \qquad (\text{پ}۳)$$
$$s.t.\ 0\le y\le\frac{1}{8}\ and\ 0\le a$$

چون Π_r یک تابع صعودی نسبت به y است، بنابراین مقدار بهینه‌ی y در $\frac{1}{8}$ است.

$$y^* = y_{\max} = \frac{1}{8} \qquad (\text{پ}۴)$$

برای بدست آوردن مقدار a، ابتدا مشتق جزئی دوم تابع سود خرده‌فروش را نسبت به a بدست می‌آوریم.

$$\frac{\partial^2 \Pi_r}{\partial a^2} = -\frac{1}{4}k_1 y a^{-\frac{3}{2}} < 0 \qquad (\text{پ}۵)$$

بنابراین مقدار بهینه از مشتق اول بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial a}=\frac{1}{2}k_1 y a^{-\frac{1}{2}}-1=0 \quad \Rightarrow a=(\frac{1}{2}k_1 y)^2 \qquad (پ۶)$$

بنابراین مقادیر بهینه از بازی استکابرگ- خرده‌فروش رهبر به صورت $p^{SR}=\frac{1}{2}$، $w^{SR}=\frac{1}{4}$، $t^{SR}=0$، $a^{SR}=\left(\frac{k_1}{8}\right)^2$ و $A^{SR}=\left(\frac{k_2}{16}\right)^2$ هستند.

پیوست ت. اثبات قضیه ۴

برای حل این مسئله، z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و دامنه‌ی آن را با توجه به مشتق اول و مقادیر حدی تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &z=p(1-p) \\ &s.t.\ 0\le p\le 1 \end{aligned} \qquad (ت۱)$$

مشتق اول (ت۱) نسبت به p به صورت زیر بدست می-آید:

$$\frac{\partial z}{\partial p}=(1-p)-p=0 \qquad (ت۲)$$

از معادله‌ی (پ۲) مقدار $p=p_1$ برابر با 0.5است. دامنه‌ی z را با توجه به مقادیر مختلف p تعیین می-کنیم. اگر $p=0$ باشد، آنگاه $z=0$ و همچنین $p=p_1 \Rightarrow z=\frac{1}{4}>0$ و $p=1 \Rightarrow z=0$. پس بیشترین مقدار y در $p=p_1$ بدست می‌آید و کمترین مقدار آن برابر با صفر است. بنابراین $0\le z\le\frac{1}{4}$ است. در نتیجه مسئله‌ی را در رابطه‌ی (۲۱پ) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &Max\ \Pi_{sc}=z\,(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})-a-A \\ &s.t.\ 0\le z\le\frac{1}{4},\ 0\le a,A \end{aligned} \qquad (ت۳)$$

Π_{sc} نسبت به z یک تابع صعودی است، چون مشتق جزئی Π_{sc} نسبت به z یک مقدار مثبت است $\left(\frac{\partial \Pi_{sc}}{\partial z}=(k_1\sqrt{a}+k_2\sqrt{A})>0\right)$. بنابراین مقدار بهینه z برابر زیر است.

$$z^*=z_{\max}=\frac{1}{4} \qquad (ت۴)$$

برای بدست آوردن مقادیر a و A ابتدا ماتریس هشین آن را بدست می‌آوریم.

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Pi_{sc}}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\Pi_{sc}}{\partial a\partial A} \\ \frac{\partial^2\Pi_{sc}}{\partial a\partial A} & \frac{\partial^2\Pi_{sc}}{\partial A^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-k_1 z}{4a\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \frac{-k_1 z}{4A\sqrt{A}} \end{bmatrix} \qquad (ت۵)$$

چون ماتریس هشین در رابطه‌ی (ت۵) معین منفی است، مقادیر بهینه‌ی a و A از مشتق اول بدست می‌آیند. پس،

$$\frac{\partial \Pi_{sc}}{\partial a}=\frac{1}{2}k_1 z a^{-\frac{1}{2}}-1=0 \quad \Rightarrow a=\left(\frac{1}{2}k_1 z\right)^2 \qquad (ت۶)$$

$$\frac{\partial \Pi_{sc}}{\partial A}=\frac{1}{2}k_2 z A^{-\frac{1}{2}}-1=0 \quad \Rightarrow A=\left(\frac{1}{2}k_2 z\right)^2 \qquad (ت۷)$$

با توجه به معادلات (ت۲)، (ت۴)، (ت۶) و (ت۷) مقادیر بهینه‌ی P، a و A در بازی همکاری به صورت زیر بدست خواهند آمد.

$$p^{co}=\frac{1}{2} \qquad (ت۸)$$

$$A^{co}=\left(\frac{1}{8}k_2\right)^2 \qquad (ت۹)$$

$$a^{co}=\left(\frac{1}{8}k_1\right)^2 \qquad (ت۱۰)$$

۷- مراجع

[1] SeyedEsfahani, M.M., Biazaran, M., Gharakhani, M., 2011. "A game theoretic approach to coordinate pricing and vertical co-op advertising in manufacturer–retailer supply chains." European Journal of Operational Research 211 (2), 263–273.

[2] Berger, P.D., 1972. Vertical cooperative advertising ventures. Journal of Marketing Research 9 (3), 309–312.

[3] Dant, R., Berger, P., 1996. Modelling cooperative advertising decisions infranchising. Journal of the Operational Research Society 47 (9), 1120–1136.

[4] Bergen, M., John, G., 1997. Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels. Journal of Marketing Research 34 (3), 357–369.

[5] Kim, S.Y., Staelin, R., 1999. Manufacturer allowances and retailer pass-through rates in a competitive environment. Marketing Science 18 (1), 59–76.

[6] Karray, S., Zaccour, G., 2006. Could co-op advertising be a manufacturer's counterstrategy to store brands? Journal of Business Research 59 (9), 1008– 1015.

[7] Karray, S., Zaccour, G., 2007. Effectiveness of coop advertising programs in competitive distribution channels. International Game Theory Review 9 (2), 151–167.

[8] Huang, Z., Li, S., 2001. "Co-op advertising models in manufacturer–retailer supply chains: A game theory approach." European Journal of Operational Research 135 (3), 527–544.

[9] Huang, Z., Li, S., Mahajan, V., 2002. An analysis of manufacturer–retailer supply chain coordination in cooperative advertising. Decision Sciences 33 (3), 469– 494.

[10] Li, S., Huang, Z., Zhu, J., Chau, P., 2002. Cooperative advertising, game theory and manufacturer–retailer supply chains. Omega 30 (5), 347–357.

[11] Jørgensen, S., Zaccour, G., 2003b. A differential game of retailer promotions. Automatica 39 (7), 1145–1155.

[12] Jørgensen, S., Sigue, S., Zaccour, G., 2000. Dynamic cooperative advertising in a channel. Journal of Retailing 76 (1), 71–92.

[13] Jørgensen, S., Sigue, S., Zaccour, G., 2001. Stackelberg leadership in a marketing channel. International Game Theory Review 3 (1), 13–26.

[14] Berger, P., Lee, J., Weinberg, B., 2006. Optimal cooperative advertising integration strategy for organizations adding a direct online channel. Journal of the Operational Research Society 57 (8), 920–927.

[15] Jeuland, A., Shugan, S., 1983. Managing channel profits. Marketing Science, 239– 272.

[16] Jeuland, A., Shugan, S., 1988. Channel of distribution profits when channel members from conjectures. Marketing Science, 202–210.

[17] McGuire, T., Staelin, R., 1983. An industry equilibrium analysis of downstream vertical integration. Marketing Science 2 (2), 161–191.

[18] Moorthy, K., 1988. Strategic decentralization in channels. Marketing Science 7 (4), 335–355.

[19] Ingene, C., Parry, M., 1995a. Channel coordination when retailers compete. Marketing Science 14 (4), 360–377.

[20] Ingene, C., Parry, M., 1995b. Coordination and manufacturer profit maximization: The multiple retailer channel. Journal of Retailing 71 (2), 129–151.

[21] Ingene, C., Parry, M., 1998. Manufacturer-optimal wholesale pricing when retailers compete. Marketing Letters 9 (1), 65–77.

[22] Ingene, C., Parry, M., 2000. Is channel coordination all it is cracked up to be? Journal of Retailing 76 (4), 511–547.

[23] Choi, S., 1991. Price competition in a channel structure with a common retailer. Marketing Science, 271–296.

[24] Choi, S., 1996. Price competition in a duopoly common retailer channel. Journal of Retailing 72 (2), 117–134.

[25] Jørgensen, S., Zaccour, G., 1999. Equilibrium pricing and advertising strategies in a marketing channel. Journal of Optimization Theory and Applications 102 (1), 111–125.

[26] Jørgensen, S., Zaccour, G., 2003a. Channel coordination over time: Incentive equilibria and credibility. Journal of Economic Dynamics and Control 27 (5), 801–822.

[27] Yue, J., Austin, J., Wang, M., Huang, Z., 2006. Coordination of cooperative advertising in a two-level supply chain when manufacturer offers discount. European Journal of Operational Research 168 (1), 65–85.

[28] Wang, S.D., Zhou, Y.W., Min, J., Zhong, Y.G., 2011. Coordination of cooperative advertising models in a one-manufacturer two-retailer supply chain system. Computers & Industrial Engineering 61 (2011) 1053–1071.

[29] He, X., Prasad, A., Sethi, S., 2009. Cooperative advertising and pricing in a dynamic stochastic supply chain: Feedback Stackelberg strategies. Production and Operations Management 18 (1), 78–94.

[30] Szmerekovsky, J., Zhang, J., 2009. "Pricing and two-tier advertising with one manufacturer and one retailer." European Journal of Operational Research 192 (3), 904–917.

[31] Xie, J., Neyret, A., 2009. "Co-op advertising and pricing models in manufacturer– retailer supply chains." Computers & Industrial Engineering 56 (4), 1375–1385.

[32] Xie, J., Wei, J., 2009. "Coordinating advertising and pricing in a manufacturer–retailer channel." European Journal of Operational Research 197 (2), 785–791.

[33] Aust, G., Buscher, U., 2012. Vertical cooperative advertising and pricing decisions in a manufacturer–retailer supply chain: A game-theoretic approach. European Journal of Operational Research 223 (2012) 473–482.