

مقایسه تحلیلی بازده پین‌های چند لایه کامپوزیتی تحت شرایط مرزی گرمایی مختلف

محمد حسن کیهانی^{۱*} و امین امیری دلویی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: پین‌های فین، کامپوزیت چندلایه، بازده، انتقال حرارت هدایتی، حل تحلیلی.</p>	<p>در این مقاله به بررسی انتقال حرارت دائم در پین‌های فین‌های کامپوزیتی چندلایه پرداخته شده است. حل تحلیلی مناسب برای هدایت حرارتی در پین‌های فین تحت تمامی شرایط مرزی گرمایی معمول ارائه شده و با بهره‌گیری از آن بازده پین‌ها در حالت‌های مختلف شرایط مرزی نوک پره مقایسه گردیده است. زاویه جایگذاری الیاف در هر لایه و همچنین جنس ماده کامپوزیت، شامل ماده ماتریس و الیاف، لایه به لایه قابل تغییر است. اثرات نحوه چیدمان لایه‌ها از نقطه نظر جنس لایه‌ها و همچنین آرایش الیاف در هر یک از لایه‌ها به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. تاثیر پارامترهای محیطی و هندسی موثر در بازده این گونه پره‌ها از قبیل ضریب انتقال حرارت جابجایی محیط، نسبت ضریب هدایت ماده الیاف نسبت به ماده مورد استفاده به عنوان پرکن و نسبت طول به قطر پره به طور کامل مورد مطالعه قرار گرفته و نمودارهای مربوطه رسم گردیده است.</p>

۱- مقدمه

توسعه ساخت فین‌هایی متشکل از دو ماده مختلف شامل یک زیر لایه و یک لایه پوششی روی این لایه می‌باشیم. این نحوه ساخت عمدتاً برای برآورده شدن دو هدف یعنی افزایش انتقال حرارت و محافظت از فین‌ها انجام می‌گیرد. لالوت و همکاران [۶]، کورتس و همکاران [۷]، کامپو [۸]، تو و همکاران [۹] به بررسی فین‌های ساخته شده با دو ماده مختلف پرداخته‌اند. امروزه مواد کامپوزیتی چند لایه تقویت شده با الیاف، جایگاه ویژه‌ای در مهندسی مدرن پیدا کرده است و می‌تواند به عنوان یک ماده جایگزین مناسب برای ساخت پره‌ها مطرح باشند. این مواد دارای مزایای گسترده‌ای از قبیل نسبت مقاومت به دانسیته بالا، مقاومت زیاد در مقابل خوردگی و پلاستیسیته بالا در مقایسه با بسیاری از مواد ایزوتروپیک مورد استفاده در صنعت می‌باشند. بیشتر این خواص متمایز به دلیل دو خاصیت از این مواد یعنی (۱) ترکیب خواص فیزیکی،

مطالعه انتقال حرارت در فین‌ها، به دلیل کاربرد وسیع این سطوح در صنایع مختلف از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این سطوح گسترده برای افزایش انتقال حرارت در کاربردهای مختلف از مبدل‌های حرارتی ساده مورد استفاده در پروسه‌های صنعتی گرفته تا دفع گرما در تجهیزات مربوط به فضاپیماها مورد استفاده قرار می‌گیرند. مساله انتقال حرارت در فین‌ها ساخته شده از یک ماده خاص به وفور مورد بررسی قرار گرفته است (هارپر و برون [۱]، جاکوب [۲]، گاردنر [۳]، گیتس و همکاران [۴] و هافمن و سپسی [۵]). از طرفی در دهه‌های اخیر شاهد

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: h_kayhani@shahroodut.ac.ir

۱. استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۲. دانشجو دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

مکانیکی و دمایی مواد مختلف و (۲) قابلیت تغییر جهت لایه‌ها در هر لایه متناسب با نیاز طرح می‌باشد. مواد کامپوزیت را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ای از مواد اورتوتروپیک با خواص ثابت در سه جهت عمود بر هم در نظر گرفت. بنابراین اصول انتقال حرارت در این مواد مشابه مواد اورتوتروپ خواهد بود. مساله انتقال حرارت و توزیع دما در بین فین‌های اورتوتروپیک قبلاً توسط بهادر و بارکهن [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. حل تحلیلی آن‌ها تنها برای بین فین‌های استوانه‌ای تک لایه ارائه گردیده است. در مورد فین‌های چندلایه با توجه به تغییر خواص حرارتی در جهت شعاعی منطقی است که انتقال حرارت به صورت دو بعدی بررسی شود. البته در بسیاری از کارهای قبلی معرفی شده، مساله تعیین توزیع حرارت در این فین‌ها با کمک شبیه سازی و میانگین‌گیری از خواص حرارتی مواد و به صورت یک بعدی بررسی گردیده است. طبیعی است که فرض یک بعدی بودن توزیع حرارت باعث ایجاد خطا، هر چند کوچک، خواهد گردید. مساله انتقال حرارت دو بعدی در ساختارهای چند لایه را از لحاظ مختصات حل می‌توان به انتقال حرارت در دستگاه مختصات کارتزین (به عنوان مثال کارهای انجام شده توسط حسیه [۱۱]، ما و چنک [۱۲]، سالت [۱۳] و [۱۴] و مونته [۱۵])، دستگاه مختصات استوانه‌ای متقارن محوری $r-z$ (به عنوان مثال کارهای انجام شده توسط کیهانی و همکاران [۱۶-۱۸])، دستگاه مختصات قطبی $r-\varphi$ (به عنوان مثال کارهای انجام شده توسط کیهانی و همکاران [۱۹-۲۱])، و انتقال حرارت در مختصات کروی (به عنوان مثال کارهای انجام شده توسط نوروزی و همکاران [۲۲]، سینگ و همکاران [۲۳] و جین و همکاران [۲۴]) تقسیم بندی کرد. مساله انتقال حرارت در بین فین‌های چندلایه با توجه به هندسه و شرایط مرزی خاص آن (شکل ۱) بایستی در مختصات $r-z$ بررسی گردد. در کار حاضر سعی گردیده است با بهره‌گیری از حل تحلیلی ارائه شده توسط کیهانی و همکاران [۱۶] تا حد امکان نواقص کارهای قبلی بر طرف گردیده و یک

حل دقیق برای محاسبه بازده بین فین‌ها ارائه گردد. شایان ذکر است اگر چه مساله انتقال حرارت هدایتی غیر دائم در بین فین‌ها قبلاً توسط کیهانی و همکاران [۱۷] انجام گردیده است اما این حل تنها تحت شرایط مرزی خاص معرفی گردیده است و علاوه بر این جنس الیاف و ماده کامپوزیت در تمامی لایه‌ها یکسان در نظر گرفته شده است؛ در واقع در کار کیهانی و همکاران [۱۷] تنها تاثیر پارامتر زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت مورد بحث قرار گرفته است. در حل ارائه شده تمام فاکتورهای قابل تغییر در طراحی بین فین‌ها لحاظ گردیده است که از آن جمله می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد:

- مواد استفاده شده در هر لایه به صورت اورتوتروپیک و شامل ماده الیاف و ماتریس در نظر گرفته شده است.
 - جنس الیاف و مواد می‌تواند لایه به لایه تغییر کند.
 - زاویه الیاف در هر لایه به صورت متغیر در نظر گرفته شده است.
 - تمام شرایط مرزی متصور برای بین فین‌ها پوشش داده شده است.
- با توجه به پارامترهای طراحی معرفی شده در بالا، بازده بین فین‌ها در حالت‌های مختلف بررسی شده و نتایج از طریق رسم نمودارهای مختلف مقایسه گردیده است.

۲- توزیع دما در استوانه‌های کامپوزیتی

مسأله انتقال حرارت دوبعدی در استوانه‌های توپر چند لایه کامپوزیتی قبلاً توسط کیهانی و همکاران [۱۶] به صورت تحلیلی حل گردیده است. این حل تحت شرایط مرزی کلی در جهت شعاعی و طولی ارائه گردیده است. از آنجاییکه توزیع دما در بین فین‌های مورد نظر در بحث حاضر به عنوان زیر مجموعه‌ای از این حل کلی محسوب می‌شوند، در این بخش تنها توزیع دمای به دست آمده در این حالت کلی به طور خلاصه معرفی گردیده است.

$$T^{(i)}(r_i, z) = T^{(i+1)}(r_i, z), \quad (1-2)$$

$$k_{22}^{(i)} \frac{\partial T^{(i)}(r_i, L)}{\partial r} = k_{22}^{(i+1)} \frac{\partial T^{(i+1)}(r_i, L)}{\partial r}, \quad (2-2)$$

که بالانویس i نشان دهنده شماره لایه مورد بحث است. نهایتاً توزیع دما در هریک از لایه‌های استوانه از رابطه زیر به دست خواهد آمد [۱۶]:

$$T^{(i)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(i)} I_0 \left(\frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) + b_n^{(i)} K_0 \left(\frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) \right) \times (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)). \quad (3)$$

که I_0 و K_0 به ترتیب نشانگر توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از مرتبه صفر می‌باشند. λ_n مقادیر ویژه متناظر با شرایط مرزی در جهت z می‌باشند که از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \lambda_n \cos(\lambda_n L) + (a_2 a_1 + b_1 b_2 \lambda_n^2) \sin(\lambda_n L) = 0 \quad (4)$$

و ضریب μ_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_i = \sqrt{\frac{k_{22}}{(\sin \theta_i)^2 k_{11} + (\cos \theta_i)^2 k_{22}}}, \quad (5)$$

که θ_i بیانگر زاویه الیاف در لایه n ام می‌باشد. ضرایب ثابت a_n و b_n نیز از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = M_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

$$\begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} \times a_n^{(i)} \\ a_n^{(i)} = M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)} \times b_n^{(i)} \end{cases} \quad 2 < i < n_l - 1 \quad (2-6)$$

$$b_n^{(n_l)} = N_n^{(n_l)} - \alpha_n^{(n_l)} \times a_n^{(n_l)} \quad (3-6)$$

شرایط مرزی کلی اعمال شده برای این حل به صورت زیر است:

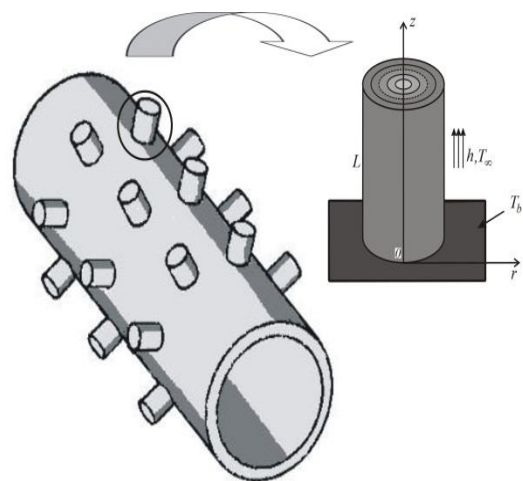
$$a_1 T(r, 0) + b_1 \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = f_1(r), \quad (1-1)$$

$$a_2 T(r, L) + b_2 \frac{\partial T(r, L)}{\partial z} = f_2(r), \quad (2-1)$$

$$c_1 T(r_0, z) + d_1 \frac{\partial T(r_0, z)}{\partial r} = g_1(z), \quad (3-1)$$

$$c_2 T(r_{n_l}, z) + d_2 \frac{\partial T(r_{n_l}, z)}{\partial r} = g_2(z). \quad (4-1)$$

که $f_1(r)$ ، $f_2(r)$ ، $g_1(z)$ و $g_2(z)$ همگی توابع اختیاری هستند. ضرایب ثابت a_1 ، a_2 ، c_1 و c_2 ابعادی مشابه با ضریب جابجایی (یعنی $W/m^2 K$) دارند در حالی که ضرایب b_1 ، b_2 ، d_1 و d_2 ابعادی مشابه با ضریب هدایت (یعنی W/mK) خواهند داشت. شایان ذکر است که کمیت‌های r و z به ترتیب جهات شعاعی و طولی را نشان می‌دهند. کمیت‌های R و L به ترتیب نشان دهنده شعاع خارجی و طول استوانه می‌باشند. همچنین شرایط پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها نیز بایستی به عنوان دو شرط کمکی در معادلات اعمال گردد تا ارتباط بین لایه‌ها برقرار شود (شکل ۱):



شکل ۱- شماتیک مربوط به پین فین، لایه‌های کامپوزیت و شرایط مرزی گرمایی

جدول ۱- ضرایب و مقادیر ویژه معادله ۳ در شرایط مختلف

نوک پره		شرایب نوک پره		
معادله مربوط به	λ_n	f_2	b_2	a_2
$\tan(\lambda_n L) = k_{22}^{(n_1)}/h$		0	k	h
$\lambda_n \cos(\lambda_n L) = 0$		0	1	0
$\sin(\lambda_n L) = 0$		θ_L	0	1

از طرفی ضرایب a_2, b_2, f_2 بسته به شرایط مرزی نوک پره مطابق با جدول ۱ تغییر می‌کند. همچنین معادلات مربوط به تعیین مقادیر ویژه در هر یک از حالت‌ها در جدول ۱ ذکر گردیده است. میزان آهنگ انتقال گرما از هر یک از پره‌ها با استفاده از معادله مربوط به توزیع دما در بین فین‌ها و اعمال قانون فوریه در پایه پره قابل محاسبه است.

۴- نتایج

در این قسمت تاثیر پارامترهای دخیل در طراحی بین فین‌های چند لایه کامپوزیتی، نظیر چیدمان مربوط به لایه‌ها از لحاظ زاویه الیاف و جنس الیاف در هر لایه، و همچنین شرایط مرزی مربوط به نوک پره در حالت‌های مختلف بحث و بررسی شده است.

بازده پره یکی از پارامترهای موثر در بررسی عملکرد گرمایی پره‌ها می‌باشد. از آنجا که ماکزیمم انتقال حرارت جابه‌جایی در پره‌ها مربوط به حالتی است که تمام پره در دمای پایه قرار دارد (حالت ایده‌آل)، بازده پره می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۲۵]:

$$\eta_f = \frac{Q_{fin}}{hA\theta_b}, \quad (10)$$

که کمیت‌های Q_{fin} و A به ترتیب نمایانگر حرارت دفع شده از پره و سطح مقطع پره می‌باشند. جدول ۲ هندسه و

مقادیر ثابت‌های M_n, N_n, α_n و β_n در پیوست الف آورده شده است.

۳- توزیع دما در بین فین‌ها

توزیع دما در بین فین‌های استوانه‌ای به صورت دوبعدی و در جهات $r-z$ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی داخلی و خارجی در جهت شعاعی با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\varphi(r, z) = T(r, z) - T_\infty$ به صورت زیر قابل تعریف است:

$$r=0 \Rightarrow \frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0, \quad (1-7)$$

$$r=R \Rightarrow -k \frac{\partial \theta(R, z)}{\partial r} = h\theta(R, z). \quad (2-7)$$

همچنین شرایط مرزی پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$z=0 \Rightarrow \theta(0, z) = \theta_b, \quad (8)$$

که $\theta_b = T_b - T_\infty$ می‌باشد. شرایط نوک پره می‌تواند به یکی از حالت‌های زیر تعریف شود.

• انتقال گرمای جابجایی

$$z=L \Rightarrow h\theta(r, L) = -k_{22}^{(n)} \frac{d\theta(r, L)}{dz}, \quad (1-9)$$

• آدیباتیک

$$z=L \Rightarrow \frac{d\theta(r, L)}{dz} = 0, \quad (2-9)$$

• دمای مشخص

$$z=L \Rightarrow \theta(r, L) = \theta_L, \quad (3-9)$$

که $\theta_L = T_L - T_\infty$ تعریف می‌شود. T_L دمای انتهای پره بوده و از قبل پیش بینی شده است. با مقایسه شرایط مرزی ارائه شده برای بین فین‌ها و حل کلی ارائه شده در بخش (۲)، مقادیر پارامترهای $a_1, b_1, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, g_1, g_2$ ثابت و برابر با $1, 0, 0, 0, 1, h, 0, 0$ ، $0, 0$ و $k_{22}^{(n_1)}, \theta_b$ هستند.

طول پره (L)	۵ cm
قطر پره (D)	۳ cm
دمای پره (T_b)	۹۰ °C
دمای محیط (T_∞)	۴۵ °C
ضریب جابجایی (h)	۱۰۰ W ⁻¹ m ² °C
ضخامت لایه‌ها	۰/۵ cm
تعداد لایه‌ها (i)	۳

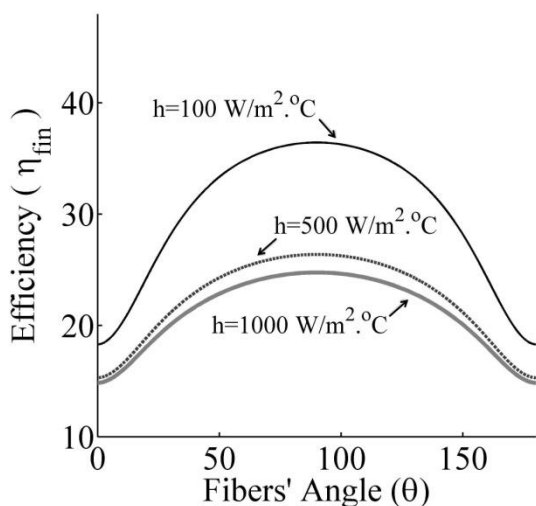
ماده الیاف	ماده پراکن	هدایت در جهت الیاف (W/m °C)	هدایت در جهت عمود بر الیاف (W/m °C)
گرافیت	اپوکسی [۲۶]	۳۷۰	۶/۵
گرافیت حرارتی	لکسان [۲۷]	۱۱/۴	۰/۷۴
کربن حرارتی	زیتل [۲۷]	۱/۱	۰/۴

مطابق شکل ۲-ب با افزایش نسبت k_s و به تبع آن کاهش ضریب k_{11} ، انتقال حرارت هدایتی در درون لایه‌ها کاهش خواهد یافت که این امر خود موجب کاهش سطح دمای پره شده و کاهش بازده را نتیجه خواهد داد. همانطور که از شکل ۲-ج بر می‌آید با کاهش نسبت طول به قطر (L/D)، توزیع دما در داخل پره یکنواخت‌تر شده و به دمای پره نزدیک‌تر می‌شود که طبیعتاً موجب افزایش بازده پره می‌شود. با افزایش زاویه الیاف از 0° تا 90° ، ضریب انتقال حرارت هدایتی در جهت z افزایش خواهد یافت که این امر باعث کاهش گرادیان دما در پره و افزایش بازده پره خواهد شد. برعکس با افزایش زاویه از 90° تا

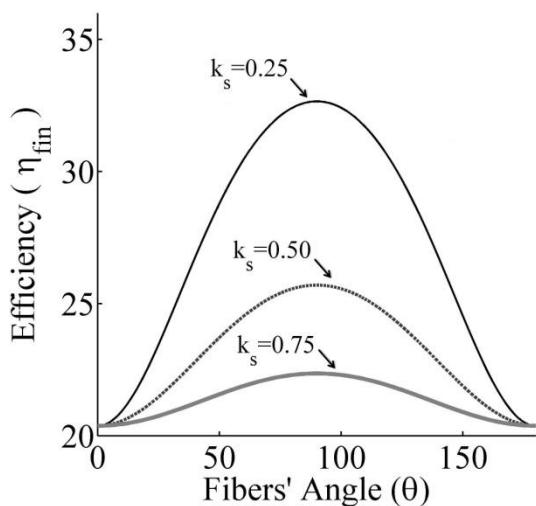
شرایط محیطی مربوط به پره را نشان می‌دهد. جنس الیاف و ماتریس و همچنین ضرایب هدایت در راستای الیاف و جهت عمود بر راستای الیاف در جدول ۳ ارائه گردیده است.

شکل‌های ۲-الف، ۲-ب و ۲-ج تغییرات بازده پره بر حسب زاویه الیاف را به ترتیب بر حسب ضریب جابجایی (h)، نسبت ضرایب هدایت ماتریس و الیاف ($k_s = k_{11}/k_{22}$) و نسبت طول به قطر (L/D) مختلف نشان می‌دهند. چنین فرض شده است که زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها برابر بوده و به طور همزمان تغییر می‌کند. شرایط مرزی نوک پره جابجایی در نظر گرفته شده است. در شکل‌های ۲-الف و ۲-ج، جنس لایه‌های اول، دوم و سوم به ترتیب ماده کامپوزیتی گرافیت - اپوکسی، ترمال گرافیت- لکسان و ترموکربن- زیتل می‌باشد.

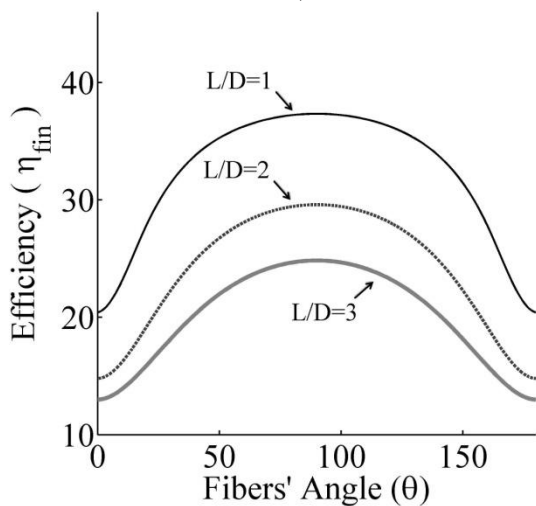
زاویه الیاف (θ) به صورت زاویه بین خط مماس بر الیاف و خط مماس بر پره در جهت ϕ تعریف می‌شود [۱۶] بنابراین هنگامی که زاویه الیاف برابر با صفر باشد در واقع یک ماده ایزوتروپ با ضریب هدایت پایین k_{22} خواهیم داشت ($k_{rr} = k_{zz} = k_{22}$). از طرفی دیگر هنگامی که $\theta = 90^\circ$ باشد تمامی الیاف در جهت z قرار گرفته و ماده اورتوتروپی با خواص هدایت حرارتی حداکثر در مختصات $r-z$ حاصل خواهد شد ($k_{rr} = k_{22}$, $k_{zz} = k_{11}$). در سایر حالات قرارگیری الیاف در لایه‌ها، انتقال حرارت وضعیتی بین این دو حالت مینیمم و ماکزیمم دارد. همانطور که در شکل ۲-الف مشاهده می‌شود با افزایش ضریب جابجایی، میزان بازده پره کاهش خواهد یافت. به عبارتی دیگر با افزایش ضریب جابجایی، انتقال حرارت از سطح پره افزایش یافته و دمای پره در سطح پایین‌تری قرار می‌گیرد که منجر به کاهش بازده پره می‌گردد. در شکل ۲-ب تاثیر نسبت ضرایب هدایت ماتریس و الیاف بر بازده پره بررسی گردیده است. چنین فرض شده است که ضریب k_{22} ثابت بوده و ضریب k_{11} تغییر می‌کند.



(الف)



(ب)



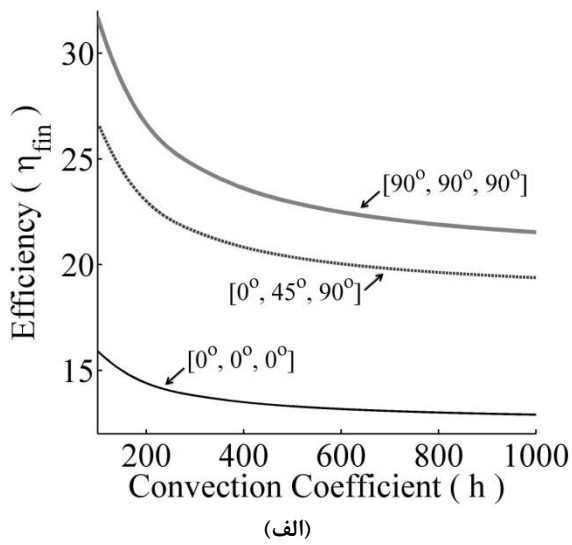
(ج)

شکل ۲- تغییرات بازده پره با زاویه الیاف برای (الف) ضرایب جابجایی مختلف، (ب) نسبت ضرایب هدایت مختلف و (ج) نسبت طول به قطر مختلف.

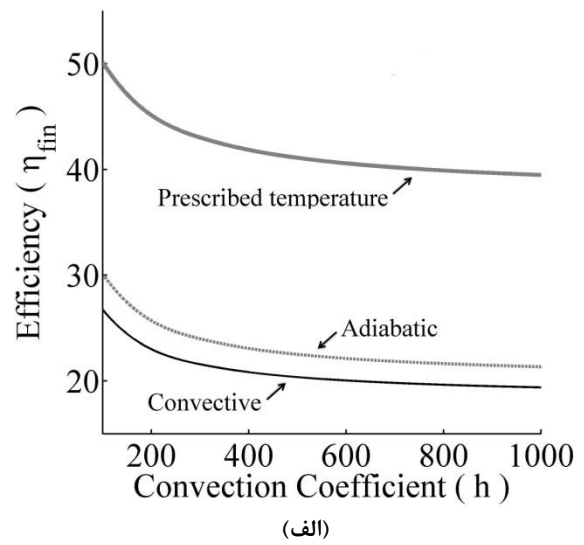
180° ، ضریب هدایت حرارتی در جهت طولی کاهش می‌یابد که منجر به پایین آمدن سطح دمایی پره و کاهش بازده پره خواهد شد.

شکل ۳- الف، ب و ج- تاثیر شرایط مرزی نوک پره را به ترتیب نسبت به ضریب جابجایی، نسبت هدایت و نسبت طول به قطر پره نشان می‌دهد. در این نمودارها سه حالت معمول در شرایط مرزی نوک پره شامل (۱) انتقال حرارت جابجایی در نوک پره، (۲) نوک پره آدیاباتیک و (۳) دمای نوک پره از قبل تعریف شده، با یکدیگر مقایسه گردیده‌اند. ماده کامپوزیتی مورد استفاده در لایه‌های اول، دوم و سوم به ترتیب گرافیت - اپوکسی، ترمال گرافیت- لکسان و ترموکربن- زیتل بوده و زاویه جایگذاری الیاف در لایه‌ها به صورت $[0^\circ, 90^\circ, 180^\circ]$ می‌باشد. برای حالت سوم از شرایط مرزی در نظر گرفته شده، بسته به دمایی که برای انتهای پره تعریف می‌شود، توزیع دما و در نتیجه بازده پره تغییر خواهد کرد. اما در خصوص مقایسه پره در حالت‌هایی که نوک پره انتقال حرارت جابجایی دارد و یا عایق است، بایستی گفت که در حالت دوم به دلیل اینکه انتقال حرارت از نوک پره صورت نمی‌گیرد، دمای میانگین پره افزایش می‌یابد که خود باعث افزایش بازده پره می‌شود. از آنجائیکه افزایش سطح ناشی از انتقال حرارت در نوک پره در مقایسه با سطح جانبی جانبی پره کوچک است، اختلاف بازده ایجاد شده برای حالت نوک پره عایق و حالتی که نوک پره انتقال حرارت جابجایی دارد ناچیز می‌باشد.

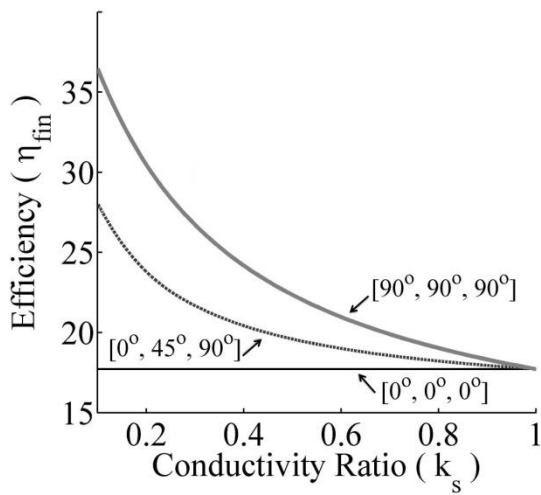
شکل ۴- الف، ب و ج- به ترتیب تاثیر زاویه جایگذاری الیاف در لایه‌های مختلف کامپوزیت رابر بازده پره نسبت به ضریب جابجایی، نسبت ضرایب هدایت و نسبت طول به قطر نشان می‌دهد. جنس ماده کامپوزیتی در لایه‌های مختلف مانند موارد قبلی است. همانطور که قبلاً نیز ذکر گردید، در حالات خاصی که در آن‌ها زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها صفر و 90° است به ترتیب نمایانگر رفتار ماده ایزوتروپ و اورتوتروپ خواهند بود.



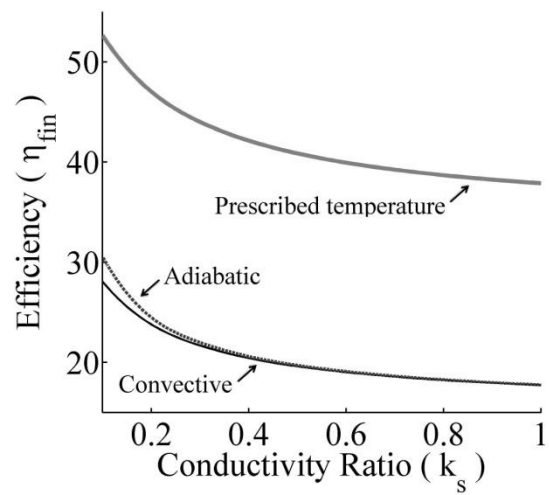
(الف)



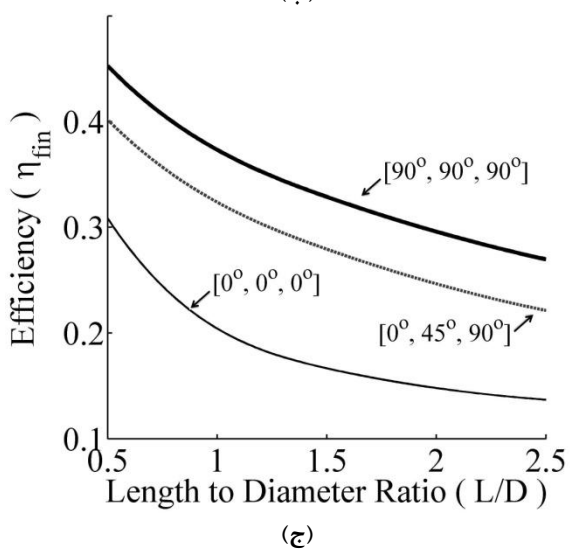
(الف)



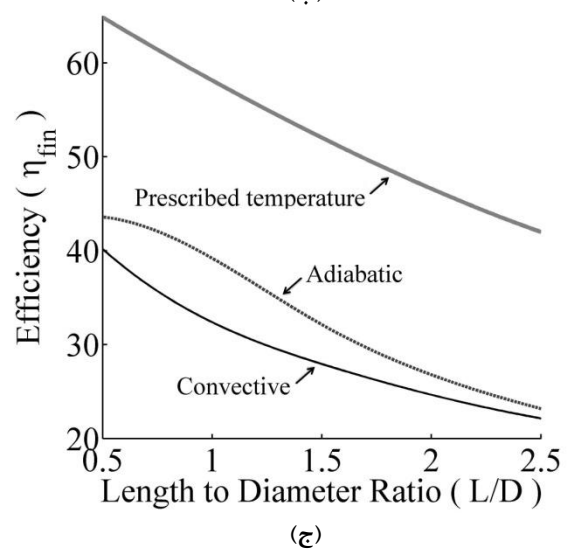
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل ۴- تاثیر زاویه جایگذاری الیاف در لایه‌ها بر بازده پره نسبت به (الف) ضریب جابجایی، (ب) نسبت ضرایب هدایت و (ج) نسبت طول به قطر.

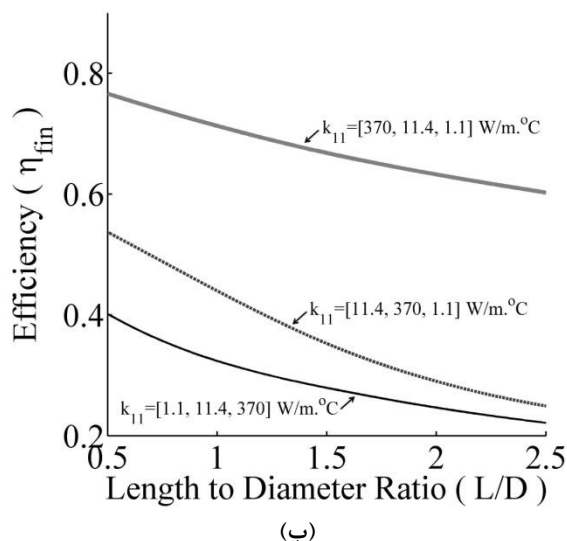
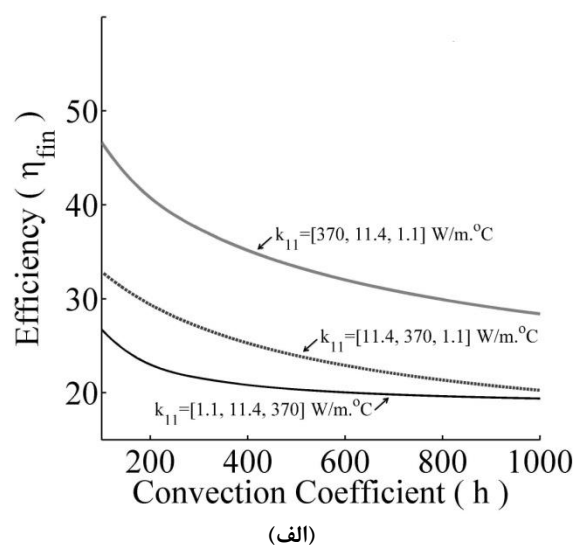
شکل ۳- تاثیر شرایط مرزی نوک پره بر بازده پره نسبت به (الف) ضریب جابجایی، (ب) نسبت ضرایب هدایت و (ج) نسبت طول به قطر.

شکل ۵-الف و ۵-ب به ترتیب تاثیر نحوه چیدمان لایه‌ها از نظر جنس ماده الیاف و ماده ماتریس را بر بازده پره نسبت به ضریب جابجایی و نسبت طول به قطر نشان می‌دهد. زاویه الیاف در لایه‌ها به صورت $[0^\circ, 90^\circ, 180^\circ]$ در نظر گرفته شده است. همانطور که از این شکل‌ها مشهود است، نحوه قرارگیری جنس لایه‌ها تاثیر به‌سزایی در نحوه توزیع دما و بازده پره‌ها دارد که بایستی با توجه به خواسته‌های طراحی مد نظر قرار گیرد.

۵-بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از حل تحلیلی ارائه شده جهت انتقال حرارت دائم در کامپوزیت‌های چندلایه به مقایسه بازده بین فین‌ها در آرایش‌های مختلف جنس الیاف و ماتریس و زاویه قرارگیری الیاف و چیدمان زاویه‌ای مختلف الیاف در لایه‌ها پرداخته شده است. این حل تحلیلی در تمام شرایط مرزی مربوط به نوک پره مشخص گردیده است. از مهمترین نتایج این مقاله به موارد ذیل می‌توان اشاره کرد:

- با افزایش زاویه الیاف از صفر تا 90° ، بازده پره-ها افزایش خواهد یافت.
- فرض عایق بودن نوک پره باعث افزایش بازده پره خواهد گردید که میزان این افزایش با توجه به شرایط محیطی و هندسی متفاوت خواهد بود.
- میزان بازده پره در حالت‌های مختلف قرارگیری الیاف در لایه‌ها همراه بین دو حالت پره ساخته شده از ماده ایزوتروپ و اورتوتروپ قرار دارد.
- با توجه به تاثیر به‌سزای جنس لایه‌ها بر انتقال حرارت و بازده پره، نحوه قرارگیری لایه‌ها از نظر جنس می‌تواند به عنوان یک فاکتور مهم طراحی مد نظر قرار گیرد.



شکل ۵- تاثیر نحوه چیدمان لایه‌ها از نظر جنس الیاف و ماتریس بر بازده پره نسبت به (الف) ضریب جابجایی، (ب) نسبت ضریب هدایت و (ج) نسبت طول به قطر.

$$(k_{11} = [6 / 5, 0 / 74, 0 / 4] W/m^{\circ}c)$$

همانطور که انتظار می‌رود در حالت اورتوتروپ به دلیل هدایت حرارتی بهتر ماده، سطح دمایی پره بالاتر خواهد رفت که منجر به افزایش بازده پره می‌شود. در حالت ایزوتروپ به دلیل اینکه ضریب هدایت حرارتی در تمامی جهات مساوی ضریب هدایت پایین k_{22} می‌باشد، سطح دمایی و بازده پره پایین است. در سایر آرایش‌ها نظیر $[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ]$ بازده متناظر بین این حالت‌ها قرار دارد.

$$M_n^{(1)} = \frac{N_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}}$$

(الف-۴)

که ضرایب π_i ، χ_i ، γ_i ، ψ_i ، E_i و F_i از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\pi_i = \frac{\begin{pmatrix} -I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) - \\ I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} \frac{k_{22}^{(i+1)}}{k_{22}^{(i)}} I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) \times \\ K_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) \times \\ K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \end{pmatrix}}$$

(الف-۵)

$$\chi_i = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} \frac{k_{22}^{(i+1)}}{k_{22}^{(i)}} \times \\ I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \\ + I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} \frac{k_{22}^{(i+1)}}{k_{22}^{(i)}} \times \\ I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \\ + I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \end{pmatrix}}$$

(الف-۶)

$$\gamma_i = \frac{I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\chi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)}$$

(الف-۷)

تشکر و قدردانی

این مقاله با حمایت مالی دانشگاه صنعتی شاهرود ارائه شده است. بنابراین نویسندگان مراتب تشکر خود را در این خصوص اعلام می‌دارند.

۶- پیوست الف

پارامترهای α_n ، β_n ، N_n و M_n برای تمامی لایه‌ها از رابطه زیر بدست می‌آیند [۱۶]:

$$\alpha_n^{(n_1)} = \frac{\begin{pmatrix} c_2 I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} r_{n_1} \right) + \\ d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} r_{n_1} \right) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} c_2 K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} r_{n_1} \right) - \\ d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} K_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} r_{n_1} \right) \end{pmatrix}}$$

(الف-۱)

$$N_n^{(n_1)} = \frac{G_2(n) - w^{(n_1)}(r_{n_1}, n)}{\begin{pmatrix} c_2 K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} r_{n_1} \right) - \\ d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} K_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_1}} r_{n_1} \right) \end{pmatrix}}$$

(الف-۲)

$$\begin{cases} \beta_n^{(i+1)} = \frac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \\ M_n^{(i+1)} = \frac{E_i - N_n^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \\ \alpha_n^{(i)} = \frac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \\ N_n^{(i)} = \frac{F_i - M_n^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \end{cases} \quad 1 < i < n_1 - 1$$

(الف-۳)

$$F_i = \frac{\left(E_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n) \right)}{\chi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)}$$

$$\psi_i = \frac{\pi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\chi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)}$$

(الف-۸)

(الف-۱۰)

$$E_i = \pi_i \times \left[\left(k_{22}^{(i+1)} \frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\lambda_n}{\mu_i} \times \left(k_{22}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} \right) \right) \cdot \left(k_{22}^{(i)} \left(\frac{w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n)}{w^{(i)}(r_i, n)} \right) I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \right) \right]$$

(الف-۹)

۷-مراجع

- [1] Harper, D.R., Brown, W.B. (1992), "Mathematical equations for heat conduction in the fins of air-cooled engines", *N.A.C.A. Report*, pp. 158.
- [2] Jacob, M. (1949), "*Heat Transfer*", Wiley, New York.
- [3] Gardner, K.A. (1945), "Efficiency of extended surfaces". *Trans. ASME*, Vol. 67, pp. 621-631.
- [4] Gates, R.R., Sepsy, C.F., Huffman, G.D. (1967), "Heat transfer and pressure loss in extended surface heat exchangers operating under frosting conditions, Part I, Literature survey, test apparatus, and preliminary results". *ASHRAE Trans.*, pp. 73, Pt II, 1.2.1-1.2.13.
- [5] Huffman, G.D., Sepsy, C.F. (1967), "Heat transfer and pressure loss in extended surface exchangers operating under frosting conditions, Part II, Data analysis and correlation". *ASHRAE Trans.*, pp.73, pt II, 1.3.1-1.3.16.
- [6] Lalot, S., Tournier, C., Jensen, M. (1999), "Fin efficiency of annular fins made of two materials". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3461-3467.
- [7] Cortes, C., Campo, A., Diez, L.I. (2002), "Computation of the heat release from fins made of a substrate and a high thermal conductivity coating, in *Proceedings of the Twelfth International Heat Transfer Conference*, Grenoble, France.
- [8] Campo, A. (2001), "Statistical heat transfer from uniform annular fins with high thermal conductivity coating". *AIAA J. Thermophys, Heat Transfer*, Vol. 15, pp. 242-245.
- [9] Tu, P., Inaba, H., Horibe, A., Li, Z., Haruki, N. (2006), "Fin efficiency of an annular fin composed of a substrate metallic fin and a coating layer". *ASME J, Heat Transfer*, Vol. 128, pp. 851-854.
- [10] Bar-Cohen, B.R. (2007), "Orthotropic Thermal Conductivity Effect on Cylindrical Pin Fin". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 2, pp. 1155-1162.
- [11] Hsieh, M.H., Ma, C.C. (2002), "Analytical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 4117-4132.

- [12] Ma, C.C., Chang, S.W. (2004), "Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 1643–1655.
- [13] SALT, H., (1983), "Transient conduction in a two-dimensional composite slab-I. Theoretical development of temperature modes". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1611–1616.
- [14] SALT, H., (1983), "Transient conduction in a two-dimensional composite slab- II. Physical interpretation of temperature modes". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1617–1623.
- [15] Monte, F.D. (2000), "Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3607–3619.
- [16] Kayhani, M.H., Norouzi, M., Amiri Delouei, A. (2012), "A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates". *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 52, pp. 73–82.
- [۱۷] کیهانی، م.ح.، نوروزی، م.، امیری دلویی، ا. (۱۳۹۰)، بررسی تحلیلی انتقال حرارت غیر دائمی اورتوتروپیک پین فین‌های کامپوزیتی، نشریه فنی و مهندسی مدرس- مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، دوره ۱۱، شماره ۴، صص ۲۱-۳۲.
- [18] Kayhani, M.H., Norouzi, M., Amiri Delouei, A. (2010), "An exact solution of axi-symmetric conductive heat transfer in cylindrical composite laminate under the general boundary condition". *Word Acad. Sci. Eng. Technol.*, Vol. 69, pp. 55–62.
- [19] Kayhani, M.H., Shariati, M., Norouzi, M., Demneh, M.K. (2009), "Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate". *Heat Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 83–94.
- [۲۰] کیهانی، م.ح.، امیری دلویی، ا. (۱۳۹۲)، بررسی تحلیلی انتقال حرارت پایای هدایتی نامتقارن در استوانه‌های کامپوزیتی به روش جداسازی متغیرها، نشریه فنی و مهندسی مدرس- مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، دوره ۱۳، شماره ۵، صص ۱۴-۲۶.
- [۲۱] کیهانی، م.ح.، شریعتی، م.، نوروزی، م. (۱۳۸۸)، حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در یک استوانه کامپوزیتی، نشریه فنی و مهندسی مدرس- مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، شماره ۳۷، صص ۱۳۵-۱۵۱.
- [22] Norouzi M., Amiri Delouei A., Seilsepour M. (2013), "A general exact solution for heat conduction in multilayer spherical composite laminates". *Composite Structures*, Vol.106, pp. 288–295.
- [23] Singh S., Jain P.K., Rizwan-uddin (2008), "Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction". *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 47, pp. 261–273.
- [24] Jain P.K., Singh S., Rizwan-uddin (2010), "An exact analytical solution for two-dimensional, unsteady, multilayer heat conduction in spherical coordinates". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, pp. 2133–2142.
- [25] Incropera F.P., Dewitt, D.P. (2011), "Introduction to Heat Transfer". John Wiley & Sons, New York.
- [26] Shives, G., et al. (2004), "Comparative thermal performance evaluation of graphite/epoxy fin heat sinks". *in: Proc. of intersociety for thermal conference (ITHERM)*, pp. 410–417, 2004.
- [27] Weber, E. (1999), "Development and modeling of thermally conductive polymer/carbon composites", Ph.D. thesis, Chemical Engineering Department, Michigan Technological University, Michigan.