تحلیل کمانش سه بعدی پانل‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند (FGM) تحت بارگذاری حرارتی مختلف

سید علی احمدی[1*]، هادی پورشهسواری[2]، جعفر اسکندری‌جم[3]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله:۱۳۹۱/۱۰/۱۶

پذیرش مقاله:۱۳۹۳/۰۸/۰۵

واژگان کلیدی:

کمانش ،

پانل استوانه‌ای،

بارگذاری حرارتی،

ماده هدفمند،

کوادریچر تفاضلی.

چکیده

در این مقاله، تحلیل کمانش پانل‌های استوانه‌ای تشکیل شده از مواد هدفمند (FGM) تحت سه نوع بارگذاری‌های حرارتی مختلف مطالعه می‌شود. در ابتدا معادلات حاکم بر کمانش پانل‌های استوانه‌ای بر اساس حل الاستیسیته سه بعدی و بر پایه تانسور تنش مرتبه دوم پیولا-کیرشهف به دست می‌آیند. همچنین به منظور مقایسه نتایج از معادلات کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای بر پایه تئوری دانل استفاده شده است. برای حل معادلات حاکم از دو روش عددی و تحلیلی استفاده شده است. در روش عددی، معادلات به دست آمده از حل استاندارد با استفاده از روش کوادریچر تفاضلی (DQM) گسسته سازی و حل شده‌اند. حل بسته‌ای نیز برای معادلات کمانشی به دست آمده بر اساس تئوری دانل ارائه شده است. فرض شده خواص ماده به غیر از ضریب پوآسون، در راستای ضخامت دارای تغییرات پیوسته‌ای بر طبق قانون ساده توزیع توانی کسر حجمی باشد. تاثیر عوامل مختلفی از جمله توان نمایی، زاویه پانل، شرایط مختلف بارگذاری حرارتی و پارامترهای هندسی بر روی رفتار کمانشی پانل‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج به دست آمده با جواب‌های حاصله از تئوری دانل و نتایج ارائه شده در مراجع مختلف مقایسه گردیده و صحت و درستی آنها بررسی شده است. نشان داده شده است نتایج به دست آمده از حل الاستیسیته سه بعدی دقت بالاتری نسبت به معادلات به دست آمده بر اساس تئوری دانل در تخمین درجه حرارت کمانشی پانل‌های استوانه‌ای دارند.

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای از جمله مهم‌ترین عناصر سازه‌ای می‌باشند که به علت دارا بودن ویژگی‌های ممتاز در رفتار مکانیکی به طور گسترده‌ای در سازه‌های مختلف مهندسی شامل راکتورهای هسته‌ای، سازه‌های دریایی، هواپیماها، شاتل‌های فضایی و همچنین خروجی موتورهای جت به کار گرفته شده‌اند. با توجه به کاربردهای ویژه و مهم این سازه‌ها، مطالعه و بررسی شرایط معیوب شدن و از کار افتادگی آنها بسیار حائز اهمیت می‌باشد. بررسی پدیده کمانش به عنوان مهمترین عامل در ناپایداری سازه‌ها مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه کمانش حرارتی ورق‌ها و پوسته‌ها توسط تورنتون انجام شد[۱]. او همچنین به توصیف کمانش الاستیک حرارتی ورق‌ها و پوسته‌های فولادی و کامپوزیتی پرداخت. مورفی و فریرا [۲] آنالیز کمانش حرارتی صفحات مستطیلی گیردار را بر اساس روش انرژی مورد بررسی قرار دادند. پاسخ کمانش حرارتی یک پانل همسانگرد دارای دو انحنا توسط ماهاینی مورد

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: ali_ahmadi١٣٦٦@yahoo.com

۱. کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی بابل

۲. کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران

۳. دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران

مطالعه قرار گرفت [۳]. در این تحقیق او از روش گالرکین استفاده کرد تا معادلات تعادل غیر خطی را حل کند. چانگ و جویی [۴] با استفاده از روش المان محدود و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به مطالعه کمانش نقطه شکست در اثر اعمال تغییرات دمایی یکنواخت پرداختند.

روش کوادریچر تفاضلی (DQM) که توسط برت و همکاران [۵] معرفی شد، در گذشته تنها برای صفحات مستطیلی به کار گرفته می‌شد و اخیرا برای تحلیل پوسته‌ها مورد توجه قرار گرفته است. اکبری آلاشتی و احمدی با استفاده از روش کوادریچر تفاضلی کمانش پانل‌های استوانه‌ای جدار ضخیم دارای عیوب هندسی تحت بارگذاری فشار جانبی را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۶]. در این کار نشان داده شد عیوب هندسی تاثیر قابل توجهی در کاهش مقاومت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای دارند و بار کمانشی برای مقادیر کوچک عیوب هندسی به صورت خطی نسبت به ضریب عیب کاهش پیدا می‌کند. تغییر شکل کوچک پوسته استوانه‌ای کوپل شده با لایه‌های پیزو الکتریک در داخل و بیرون آن تحت بارهای مکانیکی و گرمایی و الکتریکی توسط علی‌بیگلو و همکاران [۷، ۸] بررسی شده است. در این کار نشان داده شد غیر همگن بودن لایه مرکزی در حالت بارگذاری حرارتی اثر بیشتری نسبت به حالت بارگذاری مکانیکی دارد. تغییرات توزیع دما و کمیات برشی برای پوسته با خواص همگن بزرگتر از پوسته با خواص مدرج تابعی است. همچنین نتیجه گرفته شد که ناپیوستگی در محل تقاطع لایه محرک با لایه مرکزی بیشتر از تقاطع لایه حسگر با لایه مرکزی است. از دیگر موارد انجام شده در این زمینه می‌توان به کارهای هفت‌چناری و همکاران[۹] اشاره نمود.

در سال‌های اخیر با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوا فضا، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌ها، نیاز به موادی با پایداری حرارتی بالا و مقاومت بیشتر از لحاظ مکانیکی، احساس شده است. در سال‌های پیش‌تر در صنایع هوا فضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش دهی و روکش قطعات با درجه کارکرد بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های پس‌ماند که موجب ایجاد مشکلاتی از قبیل ایجاد حفره و ترک می‌شد، نداشتند. بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیتی لایه‌ای استفاده شد. تنش‌های حرارتی در این مواد نیز منجر به بروز پدیده لایه لایه شدن گردیدند. با توجه به این مشکلات طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی داشته و هم مشکل لایه‌لایه شدن نداشته باشند ضرورت پیدا کرد و مواد هدفمند [۱۰] به عنوان بهترین گزینه برای این کاربردها، مورد توجه قرار گرفتند. مطالعات مختلفی بر روی مواد هدفمند در محیط‌های حرارتی انجام شده است. تاناکا و همکاران [۱۱] حل بهبود یافته‌ای برای طراحی ترموالاستیک مواد هدفمند ارائه نمودند تا تنش‌های حرارتی ایجاد شده در آن را کاهش دهند. فرمول‌بندی تحلیلی و حل عددی برای تنش‌ها و تغییر مکان‌های یک پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری دمایی ناشی از عبور جریان سیال توسط تاکزونو به دست آمد [۱۲].

در بحث کمانش سازه‌های هدفمند، اسلامی و شریعت [۱۳] به تحلیل کمانش حرارتی صفحات دارای عیب تشکیل شده از مواد هدفمند پرداختند. در این کار معادلات با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها به دست آمده بودند و حل بسته‌ای برای تعیین بار کمانشی ورق تحت سه نوع بارگذاری حرارتی شامل افزایش حرارت یکنواخت، خطی و غیر خطی در راستای ضخامت به دست آمد. جواهری و اسلامی به آنالیز کمانش حرارتی صفحات مستطیلی تشکیل شده از مواد هدفمند بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها پرداختند [۱۴]. در این کار معادلات غیر خطی تعادل و معادلات خطی پایداری از روش تغییرات به دست آمدند و حل بسته‌ای برای معادلات پایداری خطی ارائه شده است. در راستای کار جواهری، وو [۱۵] رفتار کمانش صفحات مستطیلی هدفمند با شرایط مرزی ساده تحت بارگذاری حرارتی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مطالعه کرد. بریویک [۱۶] در سال ۱۹۹۷ در پروژه خود به بررسی پاسخ کمانشی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی پرداخت. او در این کار با حل معادلات کمانشی به دست آمده بر اساس تئوری دانل برای حالت سه بعدی، به صورت تحلیلی رابطه‌ای برای بار کمانشی ناشی از بارگذاری حرارتی و همچنین جابه‌جایی لبه‌ها ارائه نمود. اکبری آلاشتی و احمدی [۱۷] با استفاده از روش کوادریچر تفاضلی کمانش پوسته‌های استوانه جدار ضخیم

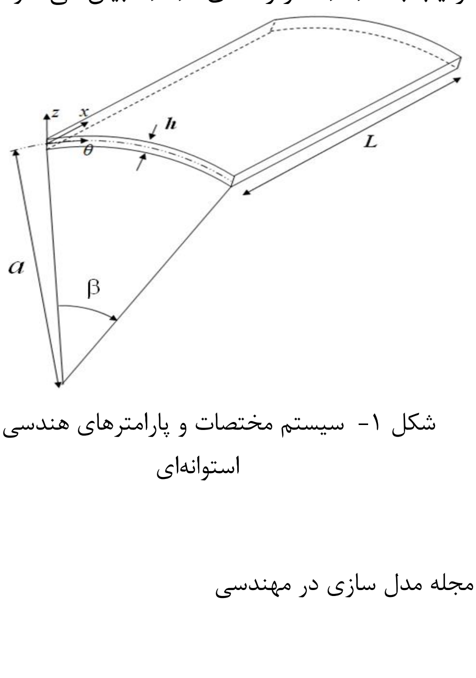
با ضخامت متغیر تشکیل شده از مواد هدفمند را مورد مطالعه قرار دادند.

در این مقاله مسئله کمانش حرارتی پانل‌های استوانه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. فرض شده پانل در معرض سه نوع بارگذاری حرارتی مختلف شامل افزایش دمای یکنواخت، افزایش دمای متغیر در راستای محوری و افزایش دمای غیر یکنواخت در جهت ضخامت قرار گرفته باشد. معادلات کمانشی پانل‌های استوانه‌ای با استفاده از حل الاستیسیته سه بعدی به دست می‌آیند که برای حل آن از روش عددی کوادریچر تفاضلی در تخمین بار کمانشی استفاده شده است. از آنجایی که اغلب پانل‌های در معرض بارگذاری حرارتی مستلزم دارا بودن خواص حرارتی و مکانیکی بالایی می‌باشند، خواص مواد تشکیل دهنده به صورت هدفمند تشکیل شده از دو جزءفلز و سرامیک، مستقل از دما فرض شده‌اند. همچنین از معادلات پایداری پوسته‌ها بر اساس تئوری دانل استفاده گردیده و حل بسته‌ای برای آن ارائه شده است. به منظور بررسی دقیقتر، تاثیر پارامترهای طراحی شامل توان نمایی، نسبت‌های هندسی و شرایط بارگذاری بر روی رفتار کمانشی پانل‌های استوانه‌ای بررسی خواهد شد.

۲- معادلات حاکم بر کمانش پانل‌های استوانه‌ای

۲-۱- معادلات کمانش بر اساس حل استاندارد:

یک پانل استوانه‌ای هدفمند ساخته شده از سرامیک و فلز را همانند شکل ۱ در نظر می‌گیریم. پانل دارای طول L، ضخامت h، زاویه انحنا β و شعاع انحنای سطح میانی a می‌باشد. مولفه‌های تغییرمکان در سیستم استوانه‌ای به ترتیب با w, v, u در راستای z, θ, x بیان می شوند.



شکل ۱- سیستم مختصات و پارامترهای هندسی پانل استوانه‌ای

تغییرات کسر حجمی جزء فلزی در جهت شعاعی بر طبق قانون توانی زیر فرض شده است.

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K \quad , \quad V_c + V_m = 1 \qquad (۱)$$

که در آن V_c و V_m بیان کننده کسر حجمی سرامیک و فلز بوده و K توان نمایی است که نشان دهنده پروفیل تغییرات جزء حجمی مواد در ضخامت پوسته می‌باشد. مطابق روابط بالا برای پوسته FGM تشکیل شده از دو ماده، مدول یانگ ترکیبی از مدول مواد سازنده مطابق رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E(z) = E_c + E_{mc}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K \qquad (۲)$$
$$E_{mc} = E_m - E_c$$

در جایی که E_c و E_m به ترتیب مدول الاستیسیته سرامیک و فلز می باشند. ساختار مواد به گونه‌ای است که به آرامی و پیوسته از سرامیک در لایه داخلی *z=-h/2* به فلز در لایه خارجی *z=h/2* تغییر می‌کند. خواص مواد مستقل از دما بوده و ضریب پوآسون در کل ضخامت پوسته ثابت فرض شده است. برای محاسبه بار کمانشی از معادلات کمانش به دست آمده از روابط پایه‌ای الاستیسیته که توسط اکبری آلاشتی و احمدی [۱۸] ارائه گردیده، در قالب معادلات (۳) استفاده شده است.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{rr}^0\varepsilon'_{rr}+\sigma'_{rr}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau'_{rx}+\sigma_{xx}^0(\varepsilon'_{rx}+\omega'_{rx})\right)\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau'_{r\theta}+\sigma_{\theta\theta}^0(\varepsilon'_{r\theta}+\omega'_{r\theta})\right)\\&+\frac{1}{r}\left(\sigma'_{rr}+\sigma_{rr}^0\varepsilon'_{rr}-\sigma'_{\theta\theta}-\sigma_{\theta\theta}^0\varepsilon'_{\theta\theta}\right)=0\end{aligned} \qquad \text{(۳ الف)}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\left(\tau'_{r\theta}+\sigma_{rr}^0(\varepsilon'_{r\theta}-\omega'_{r\theta})\right)\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma_{\theta\theta}^0\varepsilon'_{\theta\theta}+\sigma'_{\theta\theta}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau'_{\theta x}+\sigma_{xx}^0(\varepsilon'_{\theta x}-\omega'_{\theta x})\right)\\&+\frac{1}{r}\left(\sigma_{rr}^0(\varepsilon'_{r\theta}-\omega'_{r\theta})+2\tau'_{r\theta}\right.\\&\left.+\sigma_{\theta\theta}^0(\varepsilon'_{r\theta}+\omega'_{r\theta})\right)=0\end{aligned} \qquad \text{(۳ ب)}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\left(\tau'_{rx}+\sigma_{rr}^0(\varepsilon'_{rx}-\omega'_{rx})\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma'_{xx}+\sigma_{xx}^0\varepsilon'_{xx}\right)\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma_{\theta\theta}^0(\varepsilon'_{\theta x}+\omega'_{\theta x})+\tau'_{\theta x}\right)\\&+\frac{1}{r}\left(\tau'_{rx}+\sigma_{rr}^0(\varepsilon'_{rx}-\omega'_{rx})\right)=0\end{aligned} \qquad \text{(۳ ج)}$$

معادلات (۳) معادلات سه بعدی کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای به دست آمده از حل الاستیسیته سه بعدی می‌باشند.

۲-۲- معادلات کمانش بر پایه تئوری دانل

در ادامه قالب دانلی معادلات حاکم بر کمانش پانل‌های استوانه‌ای، تحت بارگذاری‌های مختلف را به دست می‌آوریم. اگرچه ساده سازی معادلات در این مورد تا حدی ممکن است دامنه کاربرد آن را محدود کند، اما معادلات دانل اساس اغلب آنالیزهای سازه‌ای را تشکیل می‌دهد. هندسه پوسته و سیستم مختصات استوانه‌ای مورد استفاده در شکل ۱ نمایش داده شده است. معادلات تعادل بر طبق تئوری دانل بر حسب منتجه‌های نیرو و گشتاور به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}&aN_{x,x}+N_{x\theta,\theta}=0\\&aN_{x\theta,x}+N_{\theta,\theta}=0\\&a^2M_{x,xx}+2aM_{x\theta,x\theta}+M_{\theta,\theta\theta}\\&-aN_\theta-a^2N_x\beta_{x,x}-a^2N_{x\theta}\beta_{\theta,x}\\&-aN_{x\theta}\beta_{x,\theta}-aN_\theta\beta_{\theta,\theta}=0\end{aligned} \tag{۴}$$

معادلات بنیادین برای راستاهای x و θ به صورت روابط (۵) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x+\nu\varepsilon_\theta-(1+\nu)\alpha\Delta T\right]\\\sigma_\theta&=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_x-(1+\nu)\alpha\Delta T\right]\\\tau_{x\theta}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta}\end{aligned} \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن روابط کرنش– جابه‌جایی بر اساس تئوری دانل و عبارات منتجه‌های نیرو و گشتاور داریم:

$$\begin{aligned}N_x&=\frac{E_1}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x+\nu\varepsilon_\theta\right]+\frac{E_2}{1-\nu^2}\left[k_x+\nu k_\theta\right]-\frac{\Phi_m}{1-\nu}\\N_\theta&=\frac{E_1}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_x\right]+\frac{E_2}{1-\nu^2}\left[k_\theta+\nu k_x\right]-\frac{\Phi_m}{1-\nu}\\N_{x\theta}&=\frac{E_1}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta}+\frac{E_2}{1+\nu}k_{x\theta}\\M_x&=\frac{E_2}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x+\nu\varepsilon_\theta\right]+\frac{E_3}{1-\nu^2}\left[k_x+\nu k_\theta\right]-\frac{\Phi_b}{1-\nu}\\M_\theta&=\frac{E_2}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_x\right]+\frac{E_3}{1-\nu^2}\left[k_\theta+\nu k_x\right]-\frac{\Phi_b}{1-\nu}\\M_{x\theta}&=\frac{E_2}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta}+\frac{E_3}{1+\nu}k_{x\theta}\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&E_1=E_mh+\frac{E_{cm}h}{K+1}\ ,\ E_2=E_{cm}h^2\left(\frac{1}{K+2}+\frac{1}{2K+2}\right)\\&E_3=\frac{E_mh^3}{12}+E_{cm}h^3\left(\frac{1}{K+3}-\frac{1}{K+2}+\frac{1}{4(K+1)}\right)\\&\Phi_m=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[E_m+E_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K\right]\times\left[\alpha_m+\alpha_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K\right]\Delta T(x,\theta,z)dz\\&\Phi_b=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[E_m+E_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K\right]\times\left[\alpha_m+\alpha_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K\right]\Delta T(x,\theta,z)zdz\end{aligned} \tag{۷}$$

با جایگذاری منتجه‌ها در معادلات تعادل و صرف نظر کردن از عبارات غیرخطی و همچنین مولفه‌های تغییرمکان در راستاهای u و v به علت کوچک بودن و نیز در نظر گرفتن مولفه تغییر مکان در راستای شعاعی به صورت $w=w_0+w_1$ که به ترتیب بیان کننده تغییرمکان در لحظه تعادل و کمانش می‌باشد، در نهایت به معادله کمانش پانل استوانه‌ای جدار نازک دست پیدا خواهیم کرد:

$$\begin{aligned}&\frac{E_2^2-E_1E_3}{E(1-\nu^2)}\nabla^4\nabla^4w_1+\frac{E_1}{a^2}w_{1,xxxx}\\&-\nabla^2\left(N_{x0}w_{1,xx}+\frac{2}{a}N_{x\theta0}w_{1,x\theta}+\frac{1}{a^2}N_{\theta0}w_{1,\theta\theta}\right)=0\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2}{a^2}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\theta^2}+\frac{1}{a^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} \tag{۹}$$

N_{x0}، $N_{\theta0}$ و $N_{x\theta0}$ همان نیروهای وارده اولیه به پوسته می‌باشند. با توجه به مسئله تعریف شده برای کمانش پانل‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی، اعمال تغییرات دمایی بر روی سازه منجر به اعمال نیروهای درون صفحه‌ای عمودی یعنی N_{x0} و $N_{\theta0}$ می‌شود. در اینجا برای لبه‌های انتهایی پانل در راستای محوری شرایط مرزی گیردار در نظر گرفته شده است. فرض شده لبه‌های جانبی دارای شرایط ساده به‌گونه‌ای باشند که در راستای محیطی آزادانه بتوانند لغزش داشته باشند. در نتیجه بارگذاری حرارتی اعمال شده به سازه تنها منجر به ایجاد نیروی محوری می‌شود.

۳- بارگذاری‌های حرارتی

۳-۱ بارگذاری حرارتی یکنواخت

در این حالت، بارگذاری دمایی تابع هیچ کدام از مختصه‌های هندسی پوسته نمی‌باشد. از آنجا که بارگذاری حرارتی تنها موجب ایجاد تنش‌های عمودی می‌گردد، از رابطه ساختاری برای مواد، داریم:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} \quad , \quad N_x = -\frac{\Phi}{1-\nu} \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[E_m + E_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K \right] \\ &\times \left[\alpha_m + \alpha_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K \right] \Delta T(x,\theta,z) dz \\ \Rightarrow \Phi &= \left[E_c\alpha_c h + \frac{(E_c(\alpha_m-\alpha_c)+\alpha_c(E_m-E_c))\cdot h}{K+1} \right. \\ &\left. + \frac{(\alpha_m-\alpha_c)\cdot(E_m-E_c))\cdot h}{2\cdot K+1} \right] \times \Delta T_{cr}\end{aligned} \tag{۱۱}$$

۳-۲ بارگذاری حرارتی غیر یکنواخت در راستای محوری

در این حالت فرض شده است دمای پانل مطابق رابطه زیر در جهت محوری تغییر یابد.

$$T = \Delta T\left(\frac{x}{L}\right)^n \quad , \quad n > 0 \tag{۱۲}$$

در این نوع بارگذاری، تنش‌های ناشی از تغیرات دمایی در راستای محوری نیز رفتاری همانند تابع تعریف شده به خود می‌گیرند. در این حالت، اثر این نوع بارگذاری در معادلات حاکم به دست آمده از حل الاستیسیته سه بعدی لحاظ می‌شود. مقدار تنش بحرانی از معادلات کمانش به دست آمده و سپس با استفاده از رابطه (۱۰) و (۱۱) تغییر دمای بحرانی کمانشی محاسبه می‌شود. قابل توجه است که در این نوع بارگذاری، نتایج تنها از معادلات به دست آمده از حل استاندارد محاسبه می‌شوند.

۳-۳ بارگذاری حرارتی غیر یکنواخت در راستای ضخامت

در این قسمت افزایش دما در حالت وابسته بودن آن به ضخامت، به صورت تابعی از مختصه شعاعی z به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &T = \Delta T\left(-\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^q + T_m , \\ &-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \ , \ \Delta T = T_c - T_m \end{aligned} \tag{۱۳}$$

در این حالت پارامتر Φ با استفاده از انتگرال زیر دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Phi = &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[E_m + E_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K \right] \left[\alpha_m + \alpha_{cm}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K \right] \\ &\times \left(\Delta T\cdot\left(-\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^q + T_m \right) dz\end{aligned} \tag{۱۴}$$

۴- روش‌های حل مسئله کمانش

۴-۱ حل عددی

برای حل معادلات سه بعدی به دست آمده از حل استاندارد به روش عددی، به منظور در نظر گرفتن شروط مرزی، صورت هارمونیک مولفه‌های تغییر مکان در حالت کمانش در قالب روابط (۱۵) در نظر می‌شوند:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,x) &= B(r,x)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\theta\right) \\ v(r,\theta,x) &= A(r,x)\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{\beta}\theta\right) \\ u(r,\theta,x) &= C(r,x)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\theta\right) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن m مد کمانش در راستای محیطی و β زاویه پانل می‌باشد. با جایگذاری عبارات (۱۵) در معادلات کرنش تغییر مکان می‌توان عبارات تانسور تنش را بر حسب مولفه‌های تغییرمکان به دست آورد. در نهایت با جایگذاری عبارات به دست آمده در معادلات (۳)، می‌توان معادلات تعادل را بر حسب تغییرمکان‌ها استخراج نمود. برای گسسته سازی و حل معادلات به دست آمده در این بخش از روش کوادرچر تفاضلی DQM که نخستین بار توسط بلمن و کاستی [۱۹] معرفی شد استفاده می‌شود. بر اساس این روش می‌توان مشتق تابع $f(x)$ را با جمع خطی مقادیر تابع در نقاط میدان تقریب زد:

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}^{(1)} \cdot f(x_j) \\ &for\, i = 1,2,\ldots,N \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن $w_{ij}^{(1)}$ ضریب وزنی مشتق مرتبه اول و N تعداد نقاط شبکه در میدان می‌باشد. روش‌های مختلفی برای تعیین ماتریس ضرایب وزنی وجود دارد که در مرجع [۲۰] آمده است. در این مقاله از چند جمله‌ای لاگرانژ

برای تعیین ماتریس ضرایب وزنی و تقریب مشتقات استفاده می‌شود. برای مشتق مرتبه اول داریم:

$$w_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)\cdot M^{(1)}(x_j)}, \qquad for\, i \neq j$$
$$w_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_j)} \qquad for\, i = j \tag{۱۷}$$

که در آن

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1,k\neq i,j}^{N}(x_i - x_k)$$
$$M^{(2)}(x) = N^{(2)}(x,x_k).(x-x_k) + 2..N^{(1)}(x,x_k) \tag{۱۸}$$
$$N(x_i,x_j) = M^{(1)}(x_i).\delta_{ij}$$

و برای مشتق مراتب بالاتر نیز ماتریس‌های ضرایب وزنی به همین صورت به دست خواهند آمد. اکنون با انتخاب نقاط شبکه و کاربرد روابط بالا، معادلات کمانش (۳) به صورت روابط (۱۹) گسسته می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\left(2G(z)+\lambda(z)\right)\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(2)}B_{kj} + \frac{\left(2G(z)+\lambda(z)\right)}{r}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(1)}B_{kj} \\
&+G(z)\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(2)}B_{ik} + \left(G(z)+\lambda(z)\right)\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{Q}a_{ik}^{(1)}c_{jl}^{(1)}C_{kl} \\
&-\frac{\left(2G(z)+\lambda(z)+G(z)\cdot\dfrac{m^2\pi^2}{\beta^2}\right)}{r^2}B_{ij} \\
&+\frac{m\pi\left(G(z)+\lambda(z)\right)}{r\beta}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(1)}A_{kj} \\
&-\frac{m\pi\left(3G(z)+\lambda(z)\right)}{r^2\beta}A_{ij} + \sigma_{xx}^{0}\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(2)}B_{ik} \\
&-\sigma_{\theta\theta}^{0}\frac{2m\pi}{r^2\beta}A_{ij} + \sigma_{\theta\theta}^{0}\frac{\left(\dfrac{m^2\pi^2}{\beta^2}+1\right)}{r^2}B_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{۱۹الف}$$

$$\begin{aligned}
&G(z)\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(2)}A_{kj} - \frac{m\pi\left(G(z)+\lambda(z)\right)}{r\beta}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(1)}B_{kj} \\
&-\frac{m\pi\left(3G(z)+\lambda(z)\right)}{r^2\beta}B_{ij} + \frac{G(z)}{r}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(1)}A_{kj} \\
&-\frac{\left(G(z)+\dfrac{m^2\pi^2}{\beta^2}\left(2G(z)+\lambda(z)\right)\right)}{r^2}A_{ij} + \sigma_{xx}^{0}\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(2)}A_{ik} \\
&+G(z)\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(2)}A_{ik} - \frac{m\pi\left(G(z)+\lambda(z)\right)}{r\beta}\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(1)}C_{ik} \\
&-\sigma_{\theta\theta}^{0}\frac{2m\pi}{r^2\beta}B_{ij} + \sigma_{\theta\theta}^{0}\frac{\left(\dfrac{m^2\pi^2}{\beta^2}+1\right)}{r^2}A_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{۱۹ب}$$

$$\begin{aligned}
&G(z)\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(2)}C_{kj} + \frac{G(z)}{r}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{(1)}C_{kj} \\
&+\left(G(z)+\lambda(z)\right)\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{Q}a_{ik}^{(1)}c_{jl}^{(1)}B_{kl} \\
&+\frac{\left(G(z)+\lambda(z)\right)}{r}\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(1)}B_{ik} - \frac{Gm^2\pi^2}{r^2\beta^2}C_{ij} \\
&+\left(2G(z)+\lambda(z)\right)\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(2)}A_{ik} \\
&+\frac{m\pi\left(G(z)+\lambda(z)\right)}{r\beta}\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(1)}A_{ik} \\
&+\sigma_{xx}^{0}\sum_{k=1}^{Q}c_{jk}^{(2)}C_{ik} + \sigma_{\theta\theta}^{0}\frac{m^2\pi^2}{r^2\beta^2}C_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{۱۹ج}$$

در جایی که $a^{(k)}_{ij}$ و $c^{(k)}_{ij}$ به ترتیب بیان‌گر ضرایب وزنی مشتق مرتبه kام در راستاهای شعاعی و محوری می‌باشند. همچنین N و Q به ترتیب تعداد نقاط شبکه در راستای شعاعی و محوری هستند. مشاهده می‌شود با استفاده از روش کوادریچر معادلات دیفرانسیل کمانشی به دست آمده، به یک دسته معادلات معمولی همگن تبدیل شده‌اند که می‌توان آن را به فرم ماتریسی زیر نشان داد.

$$\begin{bmatrix}[BB] & [BD]\\ [DB] & [DD]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[d_b]\\ \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \sigma\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [DBG] & [DDG]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[d_b]\\ \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}\end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

در عبارت (۲۰) زیرماتریس‌های $[BB]$، $[BD]$ و $[DD]$، $[DB]$، $[DBG]$، $[DDG]$ به ترتیب از معادلات شرایط مرزی و معادلات حاکم استخراج شده‌اند. همچنین d_b بردار مولفه‌های تغییر مکان بر روی مرز پانل می‌باشد. دستگاه معادلات بالا در نهایت به صورت معادلات استاندارد مقادیر ویژه به صورت (۲۱) در خواهد آمد و با حل آن مقدار بحرانی یعنی همان بار کمانشی (N_{cr}) σ_{cr}, به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&(-[DBG][BB]^{-1}[BD]+[DDG])^{-1} \\
&\cdot(-[DB][BB]^{-1}[BD]+[DD])\,[u \quad v \quad w]^T \\
&-P[\mathrm{I}][u \quad v \quad w]^T = 0
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

۴-۲ حل تحلیلی

در این قسمت حل بسته‌ای برای محاسبه بار کمانشی از معادلات به دست آمده بر پایه تئوری دانل ارائه می‌شود. این نتایج برای صحت سنجی ارائه شده است. برای لبه‌های انتهایی و جانبی پوسته شرط تکیه گاهی ساده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

(۲۲) تکیه گاه ساده:
$$\begin{array}{ll} w=0 & \text{At}\quad x = 0\,,L \\ w=0 & \text{At}\quad \theta = 0\,,\beta \end{array}$$

با این فرض برای تابع جابه‌جایی در راستای شعاعی می‌توان صورت هارمونیک زیر را در نظر گرفت:

$$w(r,\theta,x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\theta\right) \tag{۲۳}$$

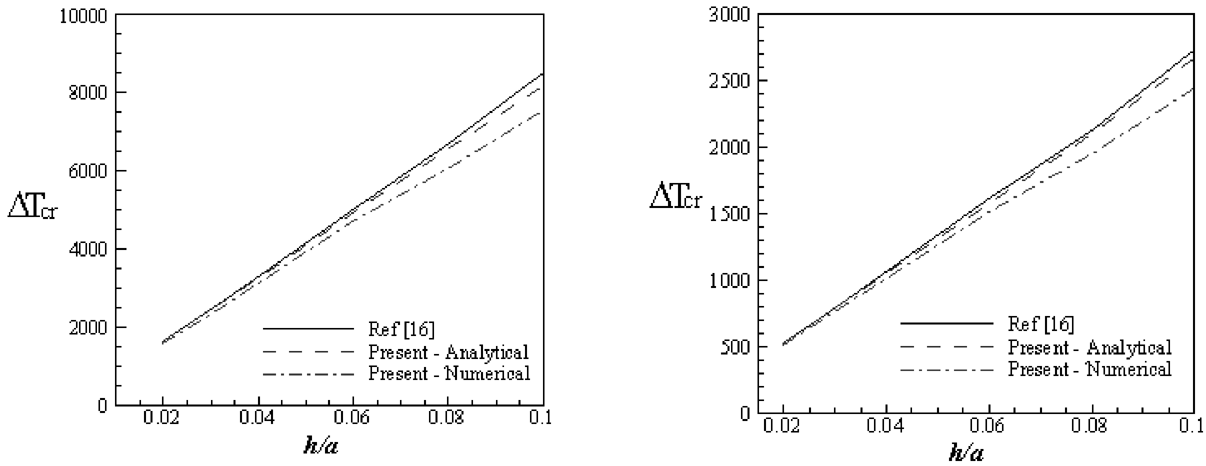
که در آن B یک ضریب ثابت و n و m مدهای کمانشی در راستا های محوری و محیطی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۲۳) در معادله (۸) و در نظر گرفتن این مطلب که لبه-های کناری پانل می‌توانند در راستای محیطی حرکت داشته باشند $N_\theta = 0$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\frac{E_2^2 - E_1E_3}{E(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a\beta}\right)^2\right]^4 + \frac{E_1}{R^2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \\ &- N_x\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a\beta}\right)^2\right]^2 = 0 \end{aligned} \tag{۲۴}$$

با در نظر گرفتن مقادیر مناسب برای n و m از معادله (۲۴) می‌توان مقدار بحرانی N_{cr} را محاسبه نمود و برای بارگذاری‌های مختلف مطابق آنچه در بالا توضیح داده شد، تغییر دمای بحرانی را تخمین زد.

۵- نتایج و بحث

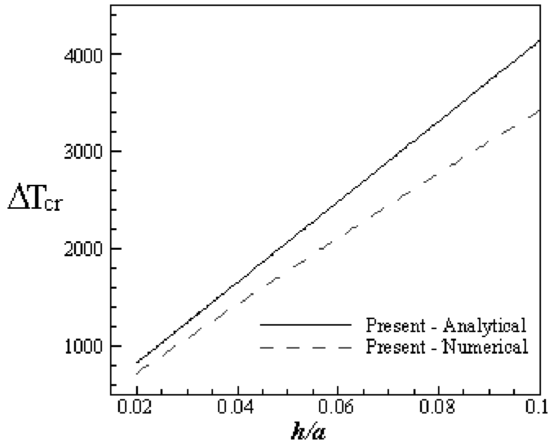
به منظور تشریح روش‌های ارائه شده و بررسی صحت آنها، در این پروژه پانل استوانه‌ای تشکیل شده از مواد هدفمند شامل فلز - سرامیک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای جزء فلزی آلومنیوم با E_m=۷۰ GN/m^2 ،α_m=۲۳e-۶ ۱/□ و برای قسمت سرامیکی آلومینا با خواص E_c=۳۸۰ GN/m^2 و α_c=۷,۴e-۶ ۱/□ در نظر گرفته شده است. همانگونه که اشاره شد در ماده هدفمند در نظر گرفته خواص مواد بین دو سطح داخلی و خارجی جسم بر اساس یک رابطه نمایی از سرامیک به فلز تغییر می‌کند. فرض شده منبع حرارتی در قسمت داخلی پوسته قرار گرفته است و از آنجایی که خواص حرارتی سرامیک در مقایسه با فلز بهتر است، این آرایش مواد برای پوسته در نظر گرفته شده است. در ابتدا به مقایسه مقادیر بحرانی دمای کمانشی بدست آمده در این پروژه با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی با نتایج ارائه شده در کارهای دیگر محققان می‌پردازیم. تغییر درجه حرارت بحرانی کمانش یا به عبارتی تغییر دمای ΔT_{cr} به دست آمده از روش‌های عددی و تحلیلی ارائه شده برای حالت بارگذاری حرارتی یکنواخت، برای یک پوسته کامل با پارامترهای هندسی m و a=L=۱ و برای مقادیر مختلف توان نمایی در شکل‌های ۲ و ۳ داده شده است.



K=0 (Aluminum)

K=100 (Alumina)

شکل ۲ - مقایسه نتایج روش عددی و تحلیلی برای محاسبه تغییر دمای کمانشی پوسته همگن در حالت بارگذاری حرارتی یکنواخت

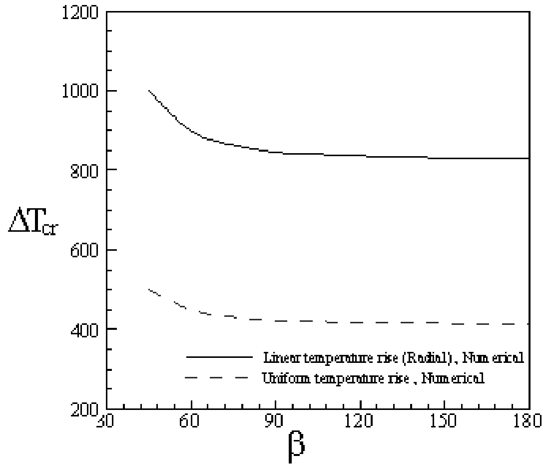


شکل ۳ - نتایج روش عددی و تحلیلی برای محاسبه تغییر دمای کمانشی پوسته هدفمند(K=۱) در حالت بارگذاری حرارتی یکنواخت

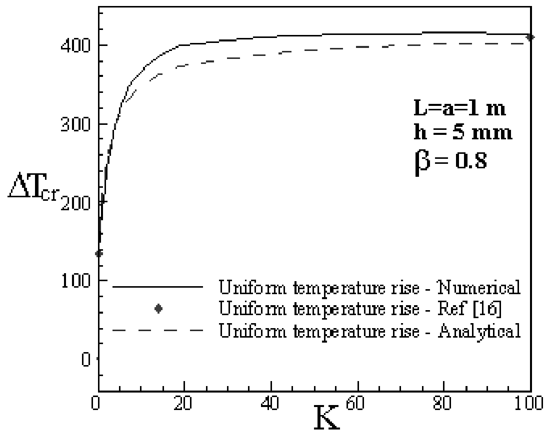
نتایج ارائه شده در شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند روش‌های عددی و تحلیلی به کار گرفته شده در حل معادلات کمانش دارای دقت خوبی می‌باشند. همچنین دیده می‌شود تغییرات دمای کمانشی در برابر نسبت *h/a* به صورت خطی می‌باشد. از شکل‌ها مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت پوسته اختلاف نتایج به دست آمده از حل عددی با نتایج حل تحلیلی به دست آمده از معادلات کمانشی بر اساس تئوری دانل و همچنین نتایج مرجع ذکر شده افزایش می‌یابد. این اختلاف به این دلیل ایجاد می‌گردد که معادلات به دست آمده بر اساس تئوری دانل با ساده سازی‌های انجام شده برای پوسته‌های جدار نازک به دست آمده‌اند و این قبیل معادلات در تخمین بار بحرانی برای پوسته‌های جدار ضخیم موجب بیش برآورد در نتایج می‌شوند.

در شکل ۴ تاثیر زاویه انحنای پانل بر روی دمای بحرانی کمانشی مورد توجه قرار داده شده است. فرض شده پانل با ابعاد *a=L=۱ m* و *h/a=۰,۰۲* همگن و ایزوتروپ از جنس آلومنیوم باشد. نتایج برای بارگذاری‌های یکنواخت و همچنین غیر یکنواخت خطی در راستای ضخامت داده شده‌اند. در اینجا برای افزایش حرارت غیر یکنواخت خطی در راستای ضخامت فرض شده دمای اولیه سطح فلزی T_m=۰ باشد.

از شکل۴ مشاهده می‌شود با افزایش زاویه انحنای پانل، تغییر دمای بحرانی کاهش می‌یابد به گونه‌ای که برای زوایای بزرگتر این روند نزولی با شیب کمتری رخ می‌دهد.

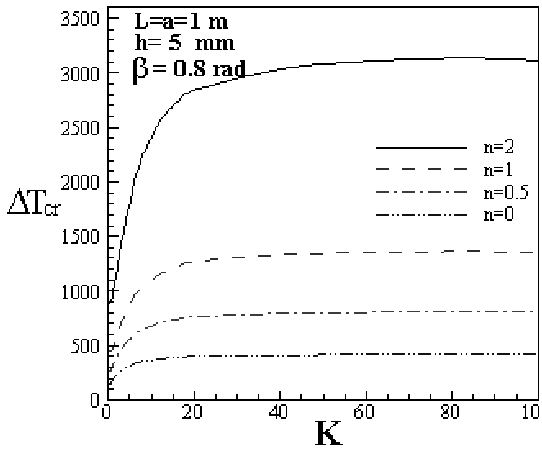


شکل ۴ - نتایج روش عددی برای تغییر دمای کمانشی پوسته همگن آلومنیومی تحت بارگذاری افزایش دمای یکنواخت و غیر یکنواخت خطی در راستای ضخامت



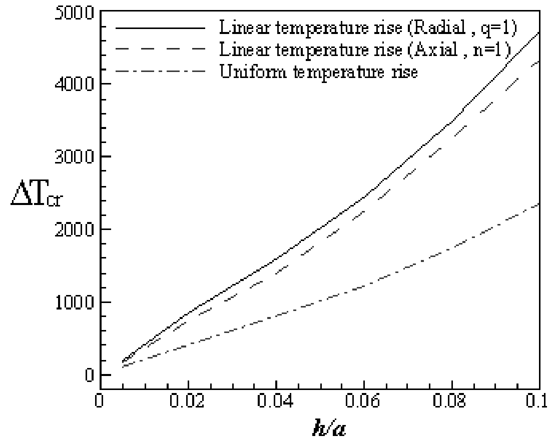
شکل ۵ - تغییر دمای کمانشی برای بارگذاری افزایش حرارت یکنواخت یک پانل هدفمند برحسب شاخص K

در ادامه برای یک پانل تشکیل شده از مواد هدفمند که ابعاد آن در شکل‌های ۵ و ۶ داده شده است، نتایج برای دو حالت بارگذاری، افزایش دمای یکنواخت و متغیر خطی در راستای محوری بر حسب توان نمایی رسم شده است. قابل توجه است همان‌گونه که اشاره شد، برای حالت بارگذاری غیر یکنواخت در راستای محوری از روش عددی برای تخمین دمای کمانشی استفاده شده است.

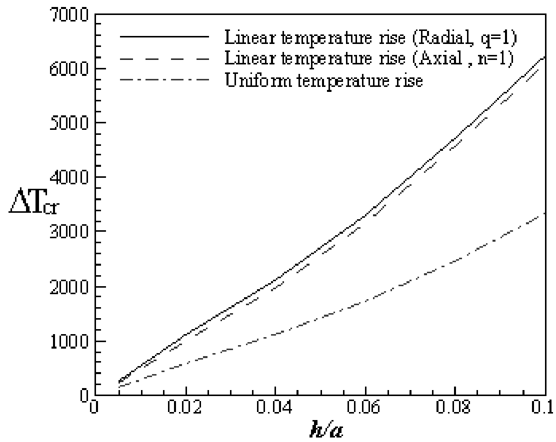


شکل ۶ - تغییر دمای کمانشی برای بارگذاری افزایش حرارت غیر یکنواخت در راستای محوری یک پانل هدفمند برحسب شاخص K

از شکل‌های ۵ و ۶ مشخص است با افزایش توان نمایی، دمای بحرانی کمانشی نیز زیاد می‌شود و برای مقادیر بزرگ K به یک حالت مجانبی میل می‌کند. دلیل اصلی این افزایش را می‌توان اینگونه بیان کرد که برای مقادیر بزرگ K ماده تشکیل دهنده پوسته، غنی از جزء سرامیکی خواهد شد که معمولا دارای مقاومت حرارتی بیشتری نسبت به مواد فلزی هستند.تغییرات افزایش حرارت کمانشی برای پانل‌های با ابعاد هندسی $a=L=1\ m$ و $\beta=1rad$ در سه حالت بارگذاری ذکر شده یعنی افزایش دمای یکنواخت، متغیر در راستای محوری و متغیر در راستای ضخامت، برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع میانی به دست آمده از حل عددی در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. در اینجا برای بارگذاری‌های متغیر در راستاهای محوری و شعاعی حالت خطی مد نظر قرار گرفته است.



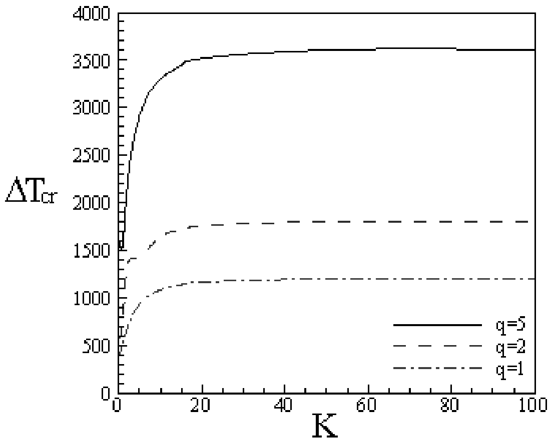
شکل ۷ - تغییر دمای کمانشی برای بارگذاری های مختلف برای یک پانل همگن (K=۰) بر حسب نسبت ضخامت به شعاع میانی *h/a*



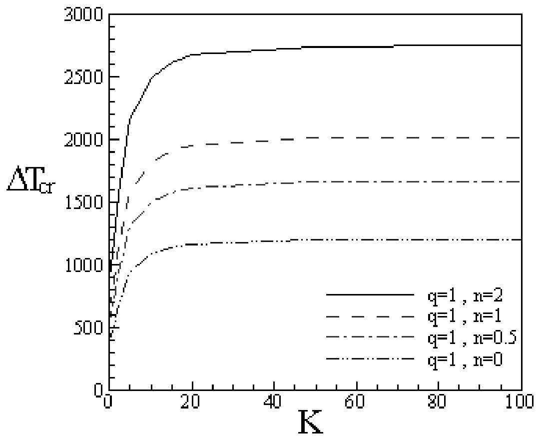
شکل ۸ - تغییر دمای کمانشی برای بارگذاری‌های مختلف برای یک پانل غیرهمگن (K=۱) بر حسب نسبت ضخامت به شعاع میانی *h/a*

از شکل‌های یاد شده مشاهده می‌شود هنگامی که بارگذاری در راستاهای شعاعی و یا محوری دارای تغییرات خطی باشند، میزان افزایش دمای بحرانی برای سازه به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. اینگونه انتظار می‌رود با مدل سازی دقیق‌تر بارگذاری اعمال شده به پانل و تخمین نتایج، می‌توان طراحی بهینه‌ای برای ساختار در جنبه‌های وزن، هزینه و غیره به دست آورد. تغییرات دمای بحرانی کمانشی برای حالات بارگذاری افزایش حرارت متغیر در راستای ضخامت برای مقادیر مختلف توان q در نمودار ۹ رسم شده است. پانل دارای پارامتر-های هندسی $a=L=1m$ ، $h/a=0.01$ و $\beta=1\ rad$ می

باشد. همچنین در شکل ۱۰ تاثیر همزمان تغییرات دمایی در راستاهای محوری و شعاعی بررسی شده است. در اینجا نیز فرض شده دمای سطح فلزی برابر صفر باشد. مشاهده می‌شود با افزایش توان q تغییر دمای کمانشی پانل به طور قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود برای مقادیر کوچکتر توان نمایی، درجه حرارت بحرانی دارای تغییرات بیشتری نسبت به مقادیر بزرگ K می‌باشد.



شکل ۹- تغییر دمای کمانشی برای بارگذاری متغیر در جهت ضخامت بر حسب توان نمایی



شکل ۱۰- تاثیر همزمان بارگذاری‌های متغیر در جهت محوری و ضخامت بر حسب توان نمایی

۶- نتیجه‌گیری

در مقاله ارائه شده معادلات پایداری سه بعدی حاکم بر کمانش پانل‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی بر اساس حل استاندارد و بر پایه تانسور تنش مرتبه دوم پیولا –کیرشهف به دست آمده است. شرایط تکیه‌گاهی پانل به گونه‌ای فرض می‌شود که بارگذاری حرارتی تنها موجب ایجاد تنش‌های محوری گردد. برای گسسته‌سازی و حل معادلات سه بعدی، از روش کوادریچر تفاضلی DQM استفاده شده است. همچنین حل بسته‌ای برای معادلات به دست آمده بر اساس تئوری دانل ارائه شده است. بارهای حرارتی کمانشی برای پانل‌های تشکیل شده از مواد هدفمند تحت سه نوع بارگذاری حرارتی و با نسبت‌های هندسی مختلف محاسبه گردیده است. مشخص شده است معادلات (۳) یا همان معادلات سه بعدی کمانشی که با استفاده از روابط پایه الاستیسیته به دست آمده‌اند، در تخمین درجه حرارت کمانشی پانل‌های استوانه‌ای دقت بالاتری نسبت به معادلات به دست آمده بر اساس تئوری دانل دارند. معادلات کمانش بر مبنای تئوری دانل تنها برای پوسته‌های جدار نازک کاربرد دارند و استفاده از آنها برای محاسبه بار کمانشی پانل‌ها با ضخامت زیاد موجب بیش برآورد در نتایج می‌گردد. مقدار تغییرات درجه حرارت کمانشی برای پانل‌های تشکیل شده از مواد هدفمند با افزایش توان K افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش آن است که با افزایش توان نمایی جزء سرامیکی تشکیل دهنده پوسته که دارای مقاومت حرارتی بالاتری نسبت به جزء فلزی است، بیشتر می‌شود به طوری که برای مقادیر بزرگتر توان نمایی پوسته سرامیکی خالص در نظر گرفته می‌شود.

ضمائم

r, θ, x	سیستم مختصات در راستای شعاعی، محیطی و محوری
z	مختصات شعاعی در صفحه میانی
h	ضخامت پوسته
L	طول پوسته
β	زاویه پانل
K	ضریب کسر حجمی در ماده هدفمند
a	شعاع پوسته در صفحه میانی
E_m , E_c	مدول الاستیک فلز و سرامیک
V_m , V_c	کسر حجمی فلز و سرامیک
α_m , α_c	ضریب انتقال حرارت فلز و سرامیک
w, v, u	مولفه‌های جابه‌جایی در راستاهای شعاعی محیطی و محوری

ε_{ij}, σ_{ij}	مولفه‌های تانسور تنش و کرنش	n	توان نمایی در بارگذاری حرارتی در راستای محوری
N_{ij}	نیروهای منتجه	m	مد شکل‌های کمانشی در راستای محیطی
M_{ij}	گشتاورهای منتجه	$w^{(n)}_{ij}$	ضرایب ماتریس ضریب وزنی مشتق مرتبه nام
β_{ij}	مولفه‌های انحنا	$a^{(n)}_{ij}$, $c^{(n)}_{ij}$	ضرایب ماتریس ضریب وزنی مشتق مرتبه nام در راستای شعاعی و محوری
T	درجه حرارت	G, λ	ثوابت لامه
q	توان نمایی در بارگذاری حرارتی در راستای ضخامت		

۷- مراجع

[۱] E. A. Thornton, Thermal buckling of plates and shells, *Applied Mechanics Review*, Vol. 46, No. 10, pp. 485–506, 1993.

[۲] K. D. Murphy, D. Ferreira, , Thermal buckling of rectangular plates, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 38, No. 22, pp. 3979–3994, 2001.

[۳] M. A. Mahayni, Thermal Buckling of Shallow Shells, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 2, pp. 167-180, 1966.

[٤] J. S. Chang, W. C. Chui, Thermal Buckling Analysis of Anti-symmetric Laminated Cylindrical Shell Panels", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 27, No. 1, pp. 1295-1309,1991.

[٥] S. K. Jang, C. W. Bert, A. G. Striz, Application of differential quadrature to static analysis of structure components, *Int. J. Numer. Meth. Eng*, Vol. 28, pp. 261-577, 1989.

[٦] R. Akbari. Alashti, S. A. Ahmadi, Buckling of imperfect thick cylindrical shells and curved panels with different boundary conditions under external pressure, *J. Theoretical and applied mechanics*, Vol. 52, pp. 25-36, 2014.

[۷] A. Alibeigloo, R. Madoliat, Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface piezoelectric layers using differential quadrature, *Composite Structures,* Vol. ۸۸, pp. ۳٤۲ – ۳٥۳, ۲۰۰۹.

[۸] A .Alibeigloo, A. M. Kani, 3D free vibration analysis of laminated cylindrical shell integrated piezoelectric layers using differential quadrature method, *Applied Mathematical Modeling,* Vol. ۳٤, pp. ٤۱۲۳ –٤۱۳۷, 2010.

[۹] H. Haftchenari, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, and C. B. Sharma, Dynamic analysis of composite cylindrical shells using differential quadrature Method (DQM),*Composite Structures*, Vol. ۷۸, pp. ۲۹۲ – 298, 2007.

[۱۰]Koizumi M., *The concept of FGM. Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, Vol. 34, pp. 3–10, 1993.

[۱۱]K. Tanaka, Y. Tanaka, H. Watanabe, An improved solution to thermo elastic materials designed in functionally gradient materials: scheme to reduce thermal stresses, *Comput. Meth Appl. Mech. Eng*, Vol. 106, pp. 377–89, 1993.

[۱۲]S .Takezono, K .Tao, E. Inamura, Thermal stress and deformation in functionally graded material shells of revolution under thermal loading due to fluid, *Jpn Soc Mech Eng Int J, Ser A*, Vol. 62, No. 594, pp. 474–81, 1996.

[۱۳]B. A. Samsam shariat, M. R. Eslami, Thermal buckling of imperfect functionally graded plates, *Int. J. Solids and Struct*, Vol. 43, pp.4082-4096, 2006.

[۱٤]R. Javaheri, M. R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates, *AIAA J*, Vol. 40, No. 1, pp. 162–169, 2002.

[۱٥]L. H. Wu, Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Compos. Struct*, Vol. 64, No. 2, pp. 211–218, 2004.

[۱٦]N. L. Breivik, *Thermal and mechanical response of curved composite panels*, [PHD thesis], Virginia, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.

[۱۷]R. Akbari. Alashti, S. A. Ahmadi, Buckling analysis of functionally graded thick cylindrical shells with variable thickness using DQM, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Published online, 2014

[۱۸]اکبری آلاشتی، ر. احمدی، س.ع.، (۱۳۹۲)، تحلیل کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم. مجله علمی پژوهشی مدل سازی در مهندسی، دانشگاه سمنان، (پذیرفته شده).

[۱۹]R .E. Bellman, Casti J., Differential quadrature and long term Integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 1, pp. 235-238, 1971.
[۲۰]C. Shu, *Differential quadrature and its application in Engineering*, Springer-Verlag, London, UK, ۲۰۰۰.