

بررسی آماری پاسخ دینامیکی پل بر اثر عبور خودرو با خصوصیات و کلاس بندی اتفاقی در شرایط مختلف سطح جاده

میر محمد اتفاق^{۱*}، دانیال بهکام کیا^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۱/۲۵	
پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۸/۲۱	
واژگان کلیدی:	
ارتعاشات، شبیه سازی مونت کارلو، آنالیز نامعینی، اندر کنش پل - خودرو.	مدل سازی و شبیه سازی پاسخ دینامیکی پل در حین عبور خودرو از روی آن، همواره از اهمیت زیادی در طراحی سازه پل برخوردار است. تحقیقات زیادی در این زمینه موجود است که قسمتی شامل بررسی تأثیرات نامعینی های مختلف در سازه و وسیله نقلیه عبوری بر روی پاسخ دینامیکی سیستم کوپل شده پل- وسیله نقلیه می باشد. با وجود تحقیقات فراوان، بررسی آماری دقیق و جامعی روی پاسخ دینامیکی سیستم مذکور انجام گرفته نشده است. بنابراین در این مقاله بعد از مدل سازی دقیق پل- وسیله نقلیه، تمامی نامعینی های موجود در وسیله نقلیه حتی نامعینی در نوع خودروی عبوری با استفاده از تابع توزیع احتمال نرمال (گاوسی) تولید شده و با استفاده از روش مونت کارلو، پارامترهای آماری پاسخ دینامیکی سیستم استخراج می شود. با مطالعه روی میانگین خیز، سرعت و شتاب یک نقطه از پل و همچنین در نظر گرفتن حدود بالا و پایین (بازه قابلیت اطمینان) متناظر و علاوه بر بررسی واریانس موارد مذکور، نتایج جامعی از تأثیرات نامعینی های بیان شده مورد بحث و بررسی قرار داده می شود. از مهم ترین نتایج این مقاله، معرفی پارامترهایی از خودرو (مانند سرعت) می باشد که بیشترین تأثیر در بالا بردن نامعینی در پاسخ را دارا می باشند. همچنین با ناهموارتر شدن سطح جاده، میزان نامعینی در پاسخ دینامیکی پل افزایش می یابد.

۱- مقدمه

بررسی رفتار سازه هایی نظیر پل که وسایل نقلیه از روی آن ها عبور می کنند، همواره از اهمیت خاصی برخوردار می باشد. از این رو محققین همواره به فکر راه های جدید و نوآورانه تری برای مدل سازی و شبیه سازی سیستم ارتعاشی پل- وسیله نقلیه به منظور شناخت بهتر رفتار این سیستم

هستند. در تحقیقات اولیه که توسط محققین صورت پذیرفت، وسیله نقلیه به صورت یک بار متحرک روی پل فرض می شد. سپس وسیله نقلیه به صورت یک جرم متحرک با مقدار ثابت فرض شد. در ادامه برای اینکه فرض های در نظر گرفته شده شباهت بیشتری با واقعیت داشته باشد، وسیله نقلیه به صورت یک سیستم جرم و فنر

*. پست الکترونیک نویسنده مسئول: mm_ettfag@yahoo.com

۱. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
۲- دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

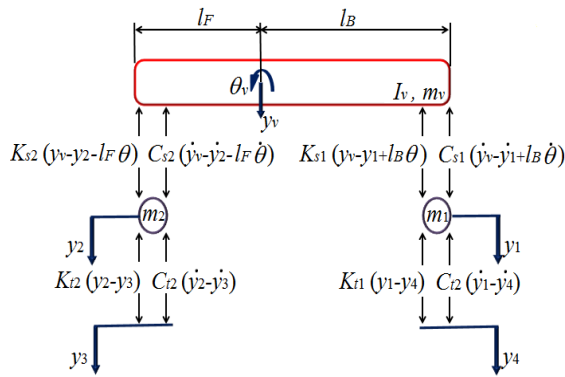
فرض شده بود و ناهمواری‌های سطح جاده نیز به کمک استاندارد ایزو تعریف شده بود.

با توجه به مقدمه فوق تاکنون بررسی مبسوطی در مورد تأثیر نامعینی پارامترهای مختلف مانند جرم، میرایی، سفتی سیستم تعلیق، ابعاد و سرعت خودروی عبوری از روی پل با ناهمواری‌های سطح جاده‌ای مختلف بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی و تحلیل آماری داده‌های به دست آمده به طور همزمان صورت پذیرفته است. بنابراین در این مقاله بررسی آماری دقیقی بر روی پاسخ‌های دینامیکی پل تحت نامعینی‌های مذکور انجام می‌گیرد. بعلاوه در این بررسی برای اولین بار تأثیر نامعینی در نوع و یا کلاس خودرو نیز بر روی پاسخ دینامیکی و تحلیل آماری داده‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از این رو سه کلاس مختلف سبک، نیمه سنگین و سنگین به صورت پارامترهای اتفاقی از خودروهای عبوری در نظر گرفته می‌شود. برای نیل به اهداف بالا، پل به صورت تیر دو سر مفصل اوپلر-برنولی مدل و به کمک روش المان محدود، گسسته سازی می‌شود. وسیله نقلیه نیز به صورت مدل نیمه خودروی چهار درجه آزادی در گرفته شده و از تعریف استاندارد ISO [۷] در برای شبیه‌سازی ناهمواری سطح جاده استفاده می‌گردد. در انتها مقادیر میانگین و واریانس خیز، سرعت و شتاب یک نقطه از پل بر اثر عبور خودرو با خصوصیات و کلاس‌بندی اتفاقی به کمک برنامه‌نویسی در نرم‌افزار MATLAB و روش شبیه‌سازی مونت کارلو به دست آورده می‌شود. همچنین حد بالا و پایین (بازه قابلیت اطمینان^۳) به کمک روش‌های آماری برای میانگین مقادیر خیز، سرعت و شتاب یک نقطه از پل محاسبه شده که به واسطه آن‌ها می‌توان بررسی آماری دقیق‌تری روی پاسخ دینامیکی سیستم داشت و تأثیر نامعینی هر یک از پارامترهای متغیر را روی رفتار سیستم بحث و پارامترهای تأثیرگذارتر را روی رفتار سیستم شناسایی نمود. در قسمت دوم این مقاله نحوه مدل‌سازی سیستم ارتعاشی پل-وسیله نقلیه توضیح داده

مدل‌سازی شد. همچنین تأثیرات ناهمواری سطح جاده روی این مدل‌سازی مورد بررسی قرار گرفت. در نهایت تأثیرات جرم اتفاقی وسیله نقلیه روی سیستم ارتعاشی بررسی شد. برای ساده‌سازی روابط، از روش غیرمستقیمی که مبتنی بر مدل گسسته شده پل به کمک روش المان محدود با تقریب‌های توابع متعامد است، استفاده شده است [۱].

امروزه قسمتی از تحقیقات در زمینه شبیه‌سازی دقیق سیستم پل-وسیله نقلیه بر مدل‌سازی خصوصیات اتفاقی متمرکز می‌باشد. از پیشگامان این نوع مدل‌سازی می‌توان به موسکلینو و همکارانش [۲] اشاره نمود که در مورد تحلیل دینامیکی سیستم تحت تأثیر سیستم جرم و فنر متحرک با خصوصیات اتفاقی جرم، سرعت و شتاب، مطالعاتی را به انجام رسانده و توانستند اثر نامعینی‌های مختلف در پل و خود وسیله نقلیه را بر روی پاسخ دینامیکی سیستم مطالعه نمایند. لینا دینگ و همکارانش [۳] تحقیقاتی را در زمینه ارزیابی نیروهای محوری دینامیکی وسیله نقلیه به همراه شرایط سطح جاده‌ای متفاوت (به عنوان یک نوع نامعینی در پل) ارائه نمودند. جین چارلز وایس و همکارانش [۴] روشی برای پیش‌بینی پاسخ‌های موضعی تحریک تیر مایل توسط وسیله نقلیه پیشنهاد داده بطوریکه اثرات ناهمواری سطح جاده و نیروهای برهم‌کنش بین جاده و وسیله نقلیه قدم به قدم به کمک روش نیومارک محاسبه شده بود. همچنین وو و لائو [۵] روش جدیدی را در مورد شناسایی بار محوری وسیله نقلیه روی پل با ناهمواری سطح جاده پیشنهاد داده به صورتی که وسیله نقلیه به صورت سیستم چهار درجه آزادی جرم و فنر مدل شده بود. همچنین وو و لائو [۶] تحقیقی را در زمینه پیش‌بینی آماری پاسخ دینامیکی سازه پل با خصوصیات ذاتی نامعلوم بر اثر عبور بارهای متحرک اتفاقی به انجام رساندند. خصوصیات نامعلوم در سازه پل به صورت نرمال

^۳ Confidence Interval



شکل ۲- دیاگرام آزاد سیستم پل- وسیله نقلیه

چهار درجه آزادی این وسیله نقلیه شامل موارد حرکت عمودی \$y_1\$ جرم فنربندی نشده \$m_1\$، حرکت عمودی \$y_2\$ جرم فنربندی نشده \$m_2\$، حرکت عمودی \$y_v\$ جرم فنربندی شده \$m_v\$ (حرکت عمودی) و حرکت زاویه‌ای \$\theta_v\$ جرم فنربندی شده (حرکت کله زنی^۴) می‌باشد. این سیستم ارتعاشی تابع تحریک پایه است که توسط جابجایی‌های \$y_3\$ و \$y_4\$ (ناهمواری‌های سطح جاده) تأمین می‌گردد. همه جابجایی‌ها نسبت به وضعیت استاتیکی خود سنجیده می‌شوند و تغییر زاویه \$\theta_v\$ کوچک فرض می‌شود. به کمک قانون دوم نیوتون معادله حرکت خودرو به صورت رابطه (۱) به دست می‌آید [۱].

$$\begin{bmatrix} m_{v1} & \cdot \\ \cdot & M_{v2} \end{bmatrix} \ddot{Y} + \begin{bmatrix} C_{v11} & C_{v12} \\ C_{v21} & C_{v22} \end{bmatrix} \dot{Y} + \begin{bmatrix} K_{v11} & K_{v12} \\ K_{v21} & K_{v22} \end{bmatrix} Y = [P(t)] \quad (1)$$

پارامترهای رابطه اخیر به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M_{v1} = \begin{bmatrix} m_v & \cdot \\ \cdot & I_v \end{bmatrix} \quad M_{v2} = \begin{bmatrix} m_1 & \cdot \\ \cdot & m_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{v11} = \begin{bmatrix} C_{s1} + C_{s2} & l_F C_{s2} - l_B C_{s1} \\ l_F C_{s2} - l_B C_{s1} & l_B C_{s1} + l_F C_{s2} \end{bmatrix}$$

$$C_{v12} = \begin{bmatrix} -C_{s1} & -C_{s2} \\ l_B C_{s1} & -l_F C_{s2} \end{bmatrix}$$

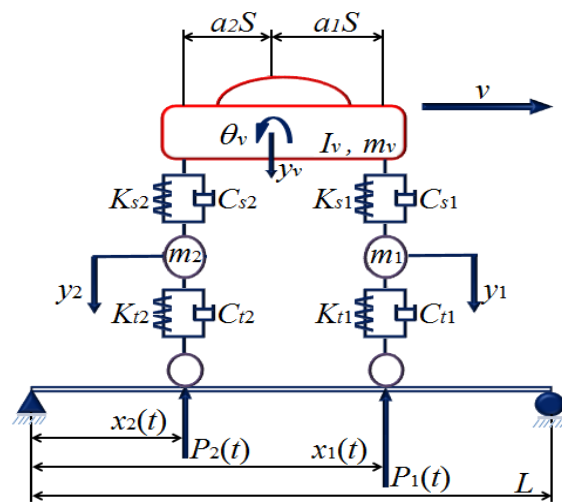
$$C_{v21} = \begin{bmatrix} -C_{s1} & l_B C_{s1} \\ -C_{s2} & -l_F C_{s2} \end{bmatrix}$$

می‌شود. در قسمت سوم روش بررسی آماری پاسخ دینامیکی پل تحت خصوصیات اتفاقی وسیله نقلیه مطرح شده و سپس در قسمت چهارم روش شبیه‌سازی سیستم مذکور بیان می‌گردد. ارائه نتایج و بررسی آن‌ها در قسمت پنجم این مقاله آورده شده است. نتیجه کلی در قسمت پایانی این مقاله مطرح می‌گردد.

۲- مدل سازی سیستم ارتعاشی پل- وسیله نقلیه

۲-۱- استخراج معادله حرکت خودرو

وسيله نقلیه‌ای که به صورت مدل نصف خودرو با ۴ درجه آزادی که با سرعت ثابت \$v\$ روی پل با تکیه‌گاه‌های ساده حرکت می‌کند، در شکل ۱ مدل شده است.



شکل ۱- سیستم پل- وسیله نقلیه

که جرم‌های فنربندی شده \$m_v\$، جرم‌های فنربندی نشده \$m_1\$ و \$m_2\$، گشتاور لختی \$I_v\$، مقادیر سفتی \$K_s\$ و \$K_t\$ و میرایی \$C_s\$ و \$C_t\$ مربوط به سیستم تعلیق و تایرها، و مشخصات طولی خودرو \$a_1S, a_2S\$ که به ترتیب برابر با \$l_B\$ و \$l_F\$ در شکل نشان داده شده است. دیاگرام آزاد مدل وسیله نقلیه شکل ۱، به صورت شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود.

^۴ Pitch

با توزیع یکنواخت و همچنین $S_d(f.)$ ضریب ناهمواری با واحد $m^3/cycle$ است. طبقه‌بندی‌های سطح جاده بر اساس استاندارد ISO بر پایه مقادیر ضرایب ناهمواری محاسبه گردیده است. پنج کلاس سطح جاده که نمایانگر کیفیت‌های متنوع سطح جاده‌اند و عبارتند از:

خیلی خوب = A، خوب = B، متوسط = C، بد = D و خیلی بد = E که مقادیر عددی ضریب ناهمواری متناظر با هر کدام از کلاس‌های ذکر شده در جدول ۱ اختصاص داده شده است [۸].

در این پژوهش مقدار متناظر $S_d(f.)$ مربوط به سطح جاده صاف، صفر فرض می‌شود.

۲-۳- استخراج معادله حرکت پل

برای المان خمشی شکل ۳، یک ماتریس تابع شکل^۶ مکعبی به صورت رابطه (۳) در نظر گرفته می‌شود [۹]:

$$H = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 1 \\ \frac{x^3}{l^3} - 2\frac{x^2}{l} + x \\ -2\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^2}{l^2} \\ \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^2}{l} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} C_{V22} &= \begin{bmatrix} C_{s1} + C_{t1} & \cdot \\ \cdot & C_{s2} + C_{t2} \end{bmatrix} \\ K_{V11} &= \begin{bmatrix} K_{s1} + K_{s2} & l_F K_{s2} - l_B K_{s1} \\ l_F K_{s2} - l_B K_{s1} & l_B K_{s1} + l_F K_{s2} \end{bmatrix} \\ K_{V21} &= K_{V12} = \begin{bmatrix} -K_{s1} & l_B K_{s1} \\ -K_{s2} & -l_F K_{s2} \end{bmatrix} \\ K_{V22} &= \begin{bmatrix} K_{s1} + K_{t1} & \cdot \\ \cdot & K_{s2} + K_{t2} \end{bmatrix} \\ P(t) &= \begin{bmatrix} (C_{t1})\dot{y}_\xi + (K_{t1})y_\xi \\ (C_{t2})\dot{y}_\zeta + (K_{t2})y_\zeta \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} y_v \\ \theta_v \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۲-۲- ناهمواری سطح جاده

بر اساس معیارهای ISO [۷]، ناهمواری سطح جاده^۵ بر حسب موقعیت خودرو روی پل (x) را می‌توان با استفاده از رابطه (۲) شبیه‌سازی نمود [۵].

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \left(\varepsilon S_d(f.) \left(\frac{\nu \pi k}{L_c f.} \right)^{-\nu} \frac{\nu \pi}{L_c} \right)^{1/\nu} \times \cos \left(\frac{\nu \pi k}{L_c} x + \theta_k \right) \quad (2)$$

که L_c دو برابر طول پل و f_0 فرکانس ناپیوستگی معادل با $\frac{1}{\nu \pi} cycle/m$ است. θ_k عددی است تصادفی بین ۰ و 2π و

جدول ۱- طبقه‌بندی ناهمواری سطح جاده [۸]

Class	A	B	C	D	E
Description	very good	good	average	poor	very poor
Value ($m^3/cycle$)	6×10^{-6}	16×10^{-6}	64×10^{-6}	256×10^{-6}	1024×10^{-6}

^۵ Road Surface Roughness
^۶ Shape Function

$$H'_b = \left\{ \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \frac{\partial H_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_i(t)} \hat{x}_i(t) \dots \\ \dots & \frac{\partial H_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_i(t)} \hat{x}_i(t) \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}_{N_p \times n} \quad (6)$$

سازه پل به صورت تیر اوپلر- برنولی با تکیه‌گاه‌های ساده مدل و به m المان، گسسته سازی می‌شود. ماتریس‌های جرم و سفتی المان‌های تیر با استفاده از توابع شکل درون یاب هرمیتی قابل استخراج هستند. در نتیجه برای هر المان روابط زیر در نظر گرفته می‌شود [۹]:

$$K_e = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M_e = \frac{\rho l A}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

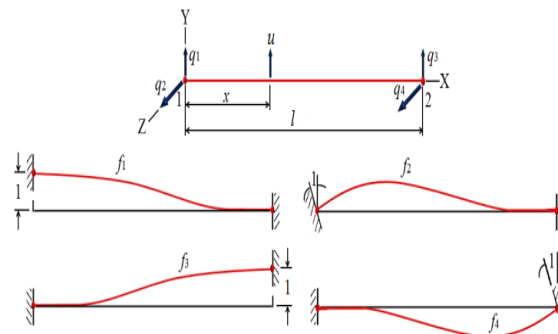
با مونتاژ (اسمبلینگ^۹) ماتریس‌های مربوط به هر المان در یک ماتریس کلی، ماتریس جرم و سفتی برای کل سازه به دست می‌آید. با در نظر گرفتن میرایی ریلی برای سازه پل و اعمال شرایط مرزی، معادله ارتعاشی کل تیر به صورت رابطه (۹) نوشته می‌شود [۱]:

$$M_b \ddot{R} + C_b \dot{R} + K_b R = H_b P \quad (9)$$

که M_b ، C_b و K_b به ترتیب ماتریس‌های مونتاژ شده جرم، میرایی و سفتی سازه پل، و R ، \dot{R} و \ddot{R} به ترتیب بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب گره‌های سازه پل هستند. عبارت $H_b P$ نیز معادل بردار بار روی گره، ناشی از نیروی برهم‌کنشی پل- وسیله نقلیه می‌باشد [۵].

۲-۴- استخراج معادله حرکت پل - وسیله نقلیه

با ترکیب معادلات حرکت پل- وسیله نقلیه، رابطه‌های (۱) و (۹)، معادله حرکت سیستم پل - وسیله نقلیه به دست می‌آید. این معادله ارتعاشی به صورت رابطه زیر می‌باشد [۵].



شکل ۳- المان خمشی

این توابع شکل نشان‌دهنده جابجایی ایجاد شده (u) در راستای طول المان توسط مقادیر واحد جابجایی‌های گره‌ای (نود^{۱۰}) تا q_1 است. این توابع شکل که از روش درون‌یابی به دست می‌آید، به «توابع شکل مکعبی درون یاب هرمیتی^۸» معروفند. تابع هرمیتی مربوط به شکل ۳ با توجه به رابطه (۳) به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود [۵]:

$$H_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_j(t) - (i-1)l}{l} \left(\frac{x_j(t) - (i-1)l}{l} \right)^2 + 1 \\ \frac{(x_j(t) - (i-1)l)^2}{l^2} - \frac{(x_j(t) - (i-1)l)}{l} + (x_j(t) - (i-1)l) \\ - \frac{x_j(t) - (i-1)l}{l} \left(\frac{x_j(t) - (i-1)l}{l} \right)^2 \\ \frac{(x_j(t) - (i-1)l)^2}{l^2} - \frac{(x_j(t) - (i-1)l)}{l} \end{array} \right\} \quad (4)$$

که $x_j(t)$ موقعیت j امین نیرو روی i امین المان در زمان t بوده و l طول المان است که از رابطه $(i-l) < x_j(t) < i$ تبعیت می‌نماید. ماتریس موقعیت نیز به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود [۵]:

$$H_b = \left\{ \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & H_1 \dots \\ \dots & H_2 \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}_{N_p \times n} \quad (5)$$

که N_p تعداد نیروهای روی سازه و n تعداد درجات آزادی سیستم است. این ماتریس با انعطاف‌پذیری که دارد می‌تواند خصوصیات روی المان را به گره‌ها انتقال دهد. مشتق ماتریس موقعیت نیز به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود [۵]:

^۹ Assembling

^{۱۰} Node

^۸ Hermitian Cubic Interpolation

محاسبه می‌شود، بطوریکه قبل از انجام نمونه‌گیری، این فاصله شامل مقدار واقعی نامعلوم θ با احتمال زیاد و مشخصی است. این احتمال که با « $1 - \alpha$ » نشان داده می‌شود، معمولاً 0.9 ، 0.95 یا 0.99 در نظر گرفته می‌شود؛ به عبارت دیگر فرض می‌شود که « $1 - \alpha$ » مشخص باشد و (L, U) توابعی از X_1, \dots, X_n باشند:

$$P[L < \theta < U] = 1 - \alpha \quad (16)$$

آنگاه فاصله (L, U) یک فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای پارامتر است، و $(1 - \alpha)$ سطح اطمینان مربوط به فاصله نامیده می‌شود. برای روشن شدن این مفاهیم، فاصله اطمینانی برای میانگین μ جامعه، وقتی که حجم نمونه بزرگ است و انحراف معیار σ معلوم است، فرض می‌شود. در قسمت بعد σ نامعلوم فرض می‌شود که منجر به فرمول‌بندی واقع‌بینانه‌تری از مساله می‌شود. حکم احتمالی درباره میانگین نمونه بر مبنای توزیع نرمال، پایه‌ای برای شرح و بسط فاصله‌های اطمینان فراهم می‌کند. بر طبق قضیه حد مرکزی، توزیع \bar{X} را می‌توان با تقریب خوبی برابر $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ گرفت که در آن σ/\sqrt{n} عددی معلوم است. این توزیع تقریب خوبی برای نمونه‌گیری بزرگ از جامعه‌های غیر نرمال است، ولی وقتی که توزیع جامعه نرمال است، توزیع \bar{X} به طور دقیق به ازای تمام مقادیر n برقرار است. در نتیجه احکام احتمالی برای جامعه‌های نرمال به طور دقیق و برای جامعه‌های غیر نرمال به طور تقریبی، درحالی‌که نمونه بزرگ باشد، برقرار است. به طور کلی وقتی که n بزرگ و σ معلوم است، فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای μ از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (17)$$

که اصطلاحاً $Z_{\alpha/2}$ نقطه $\alpha/2$ بالای توزیع نرمال استاندارد را نشان می‌دهد یعنی مساحت سمت راست $Z_{\alpha/2}$ برابر با

$$M(t)\ddot{Z} + C(t)\dot{Z} + K(t)Z = F(t) \quad (10)$$

که $M(t)$ ، $C(t)$ و $K(t)$ ماتریس‌های متغیر با زمان سیستم ارتعاشی پل-وسیله نقلیه‌اند و $F(t)$ بردار نیرویی است که روی سیستم اثر می‌کند. این ماتریس‌ها از روابط (۱۱) تا (۱۴) قابل محاسبه‌اند:

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_b & \cdot & H_b M_{V2} \\ \cdot & M_{V1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_{V2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_b & H_b C_{V21} & H_b (C_{V22} - C_t) \\ \cdot & C_{V11} & C_{V12} \\ C_t H_b^T & C_{V21} & C_{V22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K(t) = \begin{bmatrix} K_b & H_b K_{V21} & H_b (K_{V22} - C_t) \\ \cdot & K_{V11} & K_{V12} \\ K_t H_b^T + C_t H_b^T & K_{V21} & K_{V22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$F(t) = \begin{Bmatrix} H_b P_0 \\ \cdot \\ C_{t1} r(\hat{x}_1(t)) \hat{x}_1(t) + K_{t1} r(\hat{x}_1(t)) \\ C_{t2} r(\hat{x}_2(t)) \hat{x}_2(t) + K_{t2} r(\hat{x}_2(t)) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Z ، \dot{Z} و \ddot{Z} به ترتیب بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب سیستم ارتعاشی پل-وسیله نقلیه‌اند که بردار جابجایی به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود:

$$Z = \begin{bmatrix} R \\ Y \end{bmatrix} \quad (15)$$

۳- بررسی آماری پاسخ دینامیکی پل تحت خصوصیات اتفاقی وسیله نقلیه

۳-۱- برآورد به وسیله فاصله‌های اطمینان

فاصله اطمینان^{۱۱} عبارت است از برآورد کران‌های خطا برای ایجاد فاصله‌ای از مقادیری که انتظار می‌رود شامل مقدار واقعی پارامتر باشد [۱۰]. برای این منظور فرض می‌شود X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌های تصادفی و θ یک پارامتر نامعلوم جامعه باشد. هر فاصله اطمینان برای θ ، فاصله‌ای به صورت (L, U) است که از روی مشاهدات نمونه‌های X_1, X_2, \dots, X_n

^{۱۱} Confidence interval

جرم‌های فربندی نشده m_1 و m_2 ، گشتاور لختی I_v ، مقادیر سفتی K_s و K_t و میرایی C_s و C_t مربوط به سیستم تعلیق و تایرها، و مشخصات طولی خودرو a_1 ، a_2 و k ، بازه تغییرات خصوصیات انتخابی خودروهای کلاس‌بندی شده را می‌توان در جدول ۲ ملاحظه نمود.

جدول ۲- خصوصیات مستخرج شده خودروها از بانک اطلاعاتی نرم‌افزار CARSIM

نوع خودرو خصوصیات		سبک	نیمه سنگین	سنگین
m_v (kg)	min	۶۸۰	۲۴۰۰	۶۰۰۰
	Max	۲۴۰۰	۶۰۰۰	۱۸۰۰۰
m_1, m_2 (kg)	min	۱۸	۹۰	۱۵۰
	Max	۹۰	۱۵۰	۱۵۰۰
I_v (kgm ²)	min	۵۰۰	۱۸۱۶	۲۰۰۰
	Max	۴۳۳۱	۶۰۰۰	۱۴۷۰۰۰
S (m)	min	۲۲۳/۱	۵/۲	۵/۳
	Max	۶۶۷/۲	۴	۸
a_1	min	۴/۰	۳۵/۰	۴۵/۰
	Max	۵۵/۰	۵۲/۰	۵۵/۰
K_t (N/m)	min	۷۰۰۰۰	۲۳۰۰۰۰	۲۳۰۰۰۰
	Max	۳۰۵۰۰۰	۳۰۵۰۰۰	۴۶۰۰۰۰
K_s (N/m)	min	۱۰۲۰۰	۳۴۰۰۰	۲۰۰۰۰۰
	Max	۵۵۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۴۳۰۰۰۰۰
C_t (Ns/m)	min	۲۵۰	۵۰۰	۷۵۰
	Max	۳۰۰۰	۳۵۰۰	۴۵۰۰
C_s (Ns/m)	min	۲۲۵۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰۰
	Max	۴۰۰۰	۱۰۰۰۰	۴۰۰۰۰

با در دست داشتن بازه‌های مقادیر جدول ۲، ماتریس‌های $M(t)$ و $K(t)$ مربوط به رابطه (۱۰) را می‌توان به دست آورد. برای به دست آوردن ثابت‌های میرایی ریلی، فرض می‌شود نسبت دمپینگ برای تمام مودها، $0/2$ و سه فرکانس غالب پل به ترتیب $1/0.3$ ، $4/75$ و $10/11$ هرترز می‌باشند که از طریق این ضرایب، میرایی ریلی مربوط به پل، $C_b = \bar{\alpha}M_b + \bar{\beta}K_b$ ، و به تبع آن ماتریس $C(t)$ نیز به دست می‌آید. با جاگذاری ماتریس‌های $M(t)$ ، $K(t)$ و $C(t)$ در رابطه (۱۰) معادله حرکت سیستم ارتعاشی پل-

$\alpha/2$ است. مقادیر مذکور را می‌توان از جداول آماری پیوستی در منبع [۱۰] به دست آورد.

۳-۲- فاصله اطمینان مبتنی بر نمونه بزرگ برای μ با σ نامعلوم

حال که مفاهیم اساسی مربوط به فاصله‌های اطمینان بیان گردید، به حالت واقع‌بینانه‌تری روی آورده می‌شود که در آن انحراف معیار جامعه نامعلوم است. اگر حجم نمونه بزرگ باشد، رابطه (۱۷) همچنان صحیح است، ولی چون σ نامعلوم است، این فاصله را نمی‌توان از روی داده‌های نمونه محاسبه نمود و بنابراین به عنوان یک فاصله اطمینان قابل استفاده نمی‌باشد. در نتیجه چون n بزرگ است، جایگزینی σ به وسیله برآورد کننده آن، یعنی S ، تأثیر قابل ملاحظه‌ای در حکم احتمالی نخواهد داشت. به طور خلاصه وقتی که n بزرگ است و σ جامعه نامعلوم است، فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای μ عبارت است از:

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \quad (18)$$

که در آن S ، انحراف معیار نمونه است و در مورد نوع توزیع جامعه، هیچ فرضی غیر از متناهی بودن σ لازم نیست.

۴- شبیه‌سازی مدل استخراج‌شده پل - وسیله نقلیه

روش حل پیشنهادی رابطه (۱۰) برای به دست آوردن پاسخ دینامیکی گره‌های فرض شده روی پل بر اثر عبور وسیله نقلیه، روش عددی نیومارک-بتا^{۱۱} و مونت کارلو است. در این پژوهش، تأثیر خصوصیات مختلف وسیله نقلیه روی پاسخ‌های سیستم ارتعاشی، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، داده‌های متعددی مربوط به خودروهای مختلف، از بانک اطلاعاتی نرم‌افزار CARSIM [۱۱] استخراج و سپس خودروها بر حسب متغیرهایشان به سه کلاس سبک، نیمه سنگین و سنگین طبقه‌بندی گردیده‌اند. این متغیرها عبارتند از: جرم فربندی شده m_v ،

^{۱۱} Newmark-β

شده برای مقادیر میانگین و انحراف معیار مربوط به خیز، سرعت و شتاب نقطه وسط پل را نشان می‌دهد که در این حالت زمان ورود تا خروج هر خودرو برابر ۱ واحد در نظر گرفته می‌شود. این بررسی در ۳ کلاس خودروی سبک، نیمه سنگین و سنگین و در ۴ کلاس سطح جاده صاف، خیلی خوب، متوسط و خیلی بد انجام می‌گیرد که بر اساس نتایج شبیه‌سازی حاصل می‌گردد. به عنوان نمونه‌ای از نتایج حاصل شده، شکل‌های ۴ و ۵ نشان دهنده پاسخ دینامیکی مربوط به ۳ کلاس خودرو و در دو سطح جاده خیلی خوب و خیلی بد می‌باشند.

وسیله نقلیه استخراج می‌شود. برای حل این معادله از روش نیومارک- بتا استفاده می‌گردد که ضرایب مرتبط با این روش، $\beta = 0.25$ و $\gamma = 0.5$ فرض می‌شوند. مشخصات پل نیز به صورت زیر مفروض است:

$$EI = 2.5 \times 10^{11} \text{ Nm}^2$$

$$\rho A = 5 \times 10^2 \text{ Kg/m}$$

$$\bar{\alpha} = 0.24$$

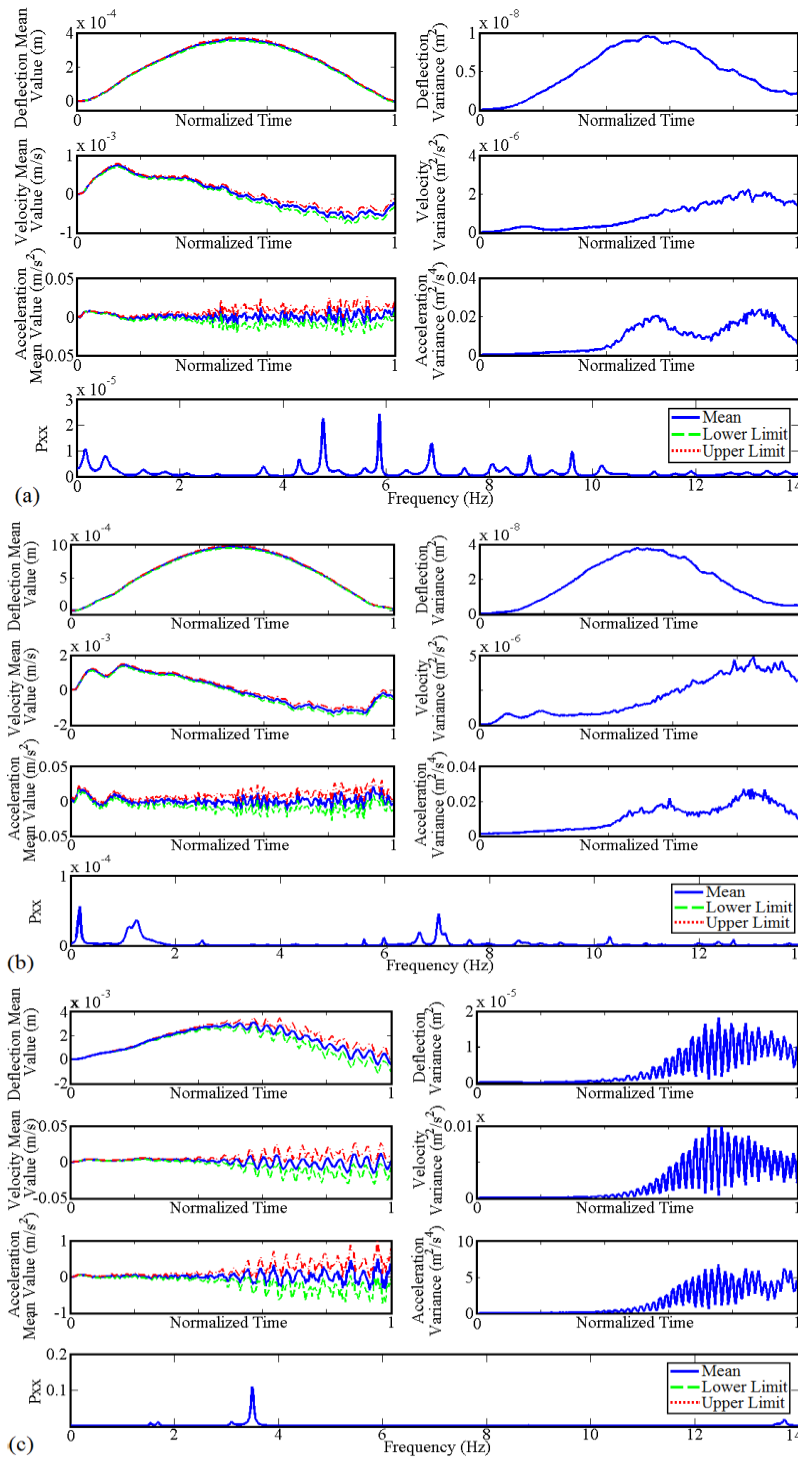
$$\bar{\beta} = 0.0006$$

$$l = 30 \text{ m}$$

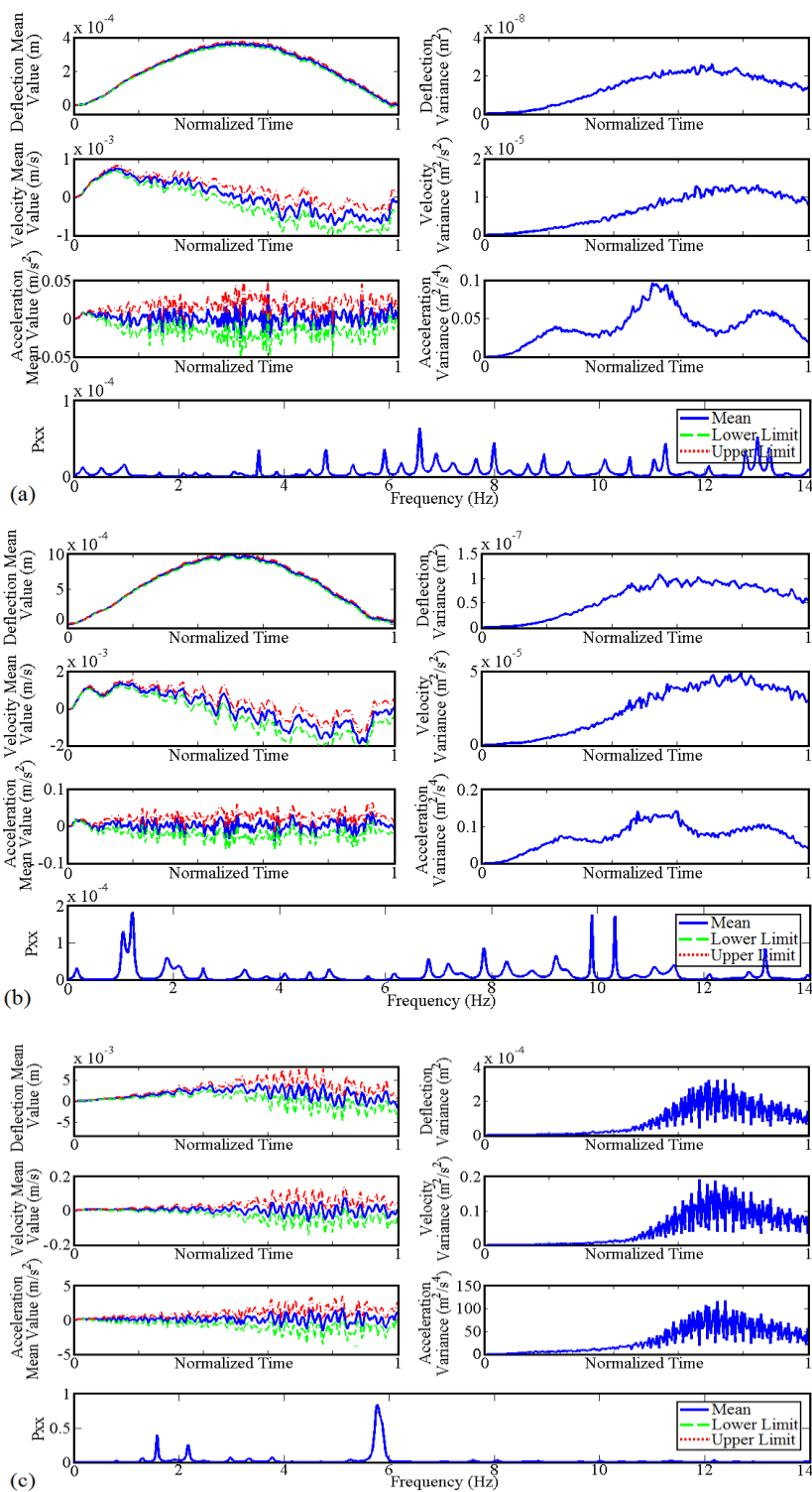
پس از حل معادله به کمک روش نیومارک- بتا و روش مونت کارلو، با استفاده از روش‌های آماری که در فصل ۳ توضیح داده شد، حد بالا و پایین را برای مقدار میانگین جابجایی، سرعت و شتاب مربوط به گره میانی، تحت تأثیر عبور ۵۰۰ خودرو با خصوصیات اتفاقی در شش کلاس مختلف سطح جاده خیلی بد، بد، متوسط، خوب، خیلی خوب و سطح جاده صاف به کمک کدنویسی در نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی گردیده و سپس تأثیر نامعینی پارامترهای مختلف وسیله نقلیه، با فرض فاصله اطمینان ۹۵٪، بر روی پاسخ دینامیکی سیستم مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت به کمک دستور pburg در نرم‌افزار MATLAB از نمودار شتاب، پاسخ در حوزه فرکانسی استخراج می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی و بررسی در قسمت بعدی توضیح داده می‌شود.

۵- بررسی نتایج

۵-۱ تأثیر نوع خودروی عبوری بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی
در این حالت پارامترهای متغیر خودرو مانند جرم، سفتی، میرایی، ابعاد و سرعت خودرو، به صورت مقادیر اتفاقی با توزیع نرمال فرض می‌گردند. با توجه به داده‌های جدول ۲ می‌توان پاسخ‌های دینامیکی یک نقطه از سیستم ارتعاشی پل بر اثر عبور کلاس‌های مختلف خودرو را در سطوح جاده‌ای مختلف به دست آورد. در این پژوهش نقطه وسط پل برای بررسی اختیار شده است. محور افقی، زمان نرمالیزه



شکل ۴- پاسخ‌های دینامیکی بر اثر عبور خودروی: (a) سبک، (b) نیمه سنگین، (c) سنگین روی جاده با سطح جاده خیلی خوب



شکل ۵- پاسخ‌های دینامیکی بر اثر عبور خودروی: (a) سبک، (b) نیمه سنگین،

(c) سنگین روی جاده با سطح جاده خیلی بد

با دقت بر روی نمودارهای میانگین خیز پل می‌توان مشاهده نمود که بیشینه میانگین خیز فارغ از نوع سطح جاده برای کلاس خودروی سبک تقریباً برابر با ۰/۴ میلی‌متر، برای کلاس خودروی نیمه سنگین تقریباً برابر با ۱ میلی‌متر و برای کلاس خودروی سنگین تقریباً برابر با ۳ میلی‌متر است. همچنین انحراف حد بالا و حد پایین نسبت به میانگین خیز نسبتاً ناچیز است و مقادیر حد بالا و حد پایین و میانگین خیز، فارغ از نوع سطح جاده، تقریباً بر روی هم منطبقند. بعلاوه، شکل کلی نمودار میانگین خیز مربوط به کلاس‌های سبک و نیمه سنگین با تغییر نوع ناهمواری سطح جاده تغییر نمی‌یابد و حد بالا و حد پایین تقریباً بر روی میانگین منطبق هستند ولی در عبور خودروی کلاس سنگین، با ناهموارتر شدن سطح جاده، میزان انحراف حد بالا و حد پایین از مقدار میانگین نیز افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که در نمودار میانگین خیز، نوساناتی قابل مشاهده هستند که با افزایش ناهمواری، شدت این نوسانات نیز افزایش می‌یابند بطوریکه سطح جاده خیلی بد تأثیر بسزایی بر روی نمودار خیز پل، بخصوص هنگام عبور خودروی سنگین می‌گذارد. در نتیجه پاسخ دینامیکی خیز پل بر اثر عبور خودروی سنگین، وابستگی شدیدی به نوع کلاس سطح جاده دارد. با دقت در نمودارهای مربوط به میانگین شتاب می‌توان دریافت که ناهمواری سطح جاده تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای در نامعینی نمودار میانگین شتاب دارد و با ناهموارتر شدن سطح جاده، میزان و دامنه نوسانات نمودار میانگین شتاب نیز افزایش می‌یابد. این خصوصیات را در نمودارهای خودروی سنگین بسیار بارزتر از خودروهای کلاس سبک و نیمه سنگین می‌توان مشاهده نمود. با دقت در نمودارهای مربوط به انحراف معیار می‌توان به این نتیجه رسید که شکل کلی این نمودارها در حالت‌های خودروهای کلاس سبک و نیمه سنگین، به تغییر ناهمواری سطح جاده حساسیت چندانی نشان نمی‌دهد و تنها در نمودار انحراف معیار شتاب در حالت سطح جاده‌ای خیلی بد، دامنه پاسخ اندکی بیشتر از دامنه متناظر با سایر حالت‌های سطح جاده است. همچنین در خودروی کلاس سنگین، دامنه انحراف

معیارهای مربوط به خیز، سرعت و شتاب با افزایش ناهمواری سطح جاده افزایش می‌یابد و این افزایش در نمودار انحراف معیار مربوط به شتاب، بسیار بیشتر است. به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که در بررسی تأثیر عبور خودروهای کلاس سبک و نیمه سنگین بر روی پاسخ دینامیکی پل، تغییر ناهمواری سطح جاده تأثیر چندانی در تغییر پاسخ دینامیکی پل ندارد و با تقریب خوبی، رفتار تمامی نمودارها در حالت‌های مختلف سطح جاده‌ای شبیه هم هستند و تنها تفاوت در نمودار مربوط به دامنه انحراف معیار شتاب است که این موضوع مرتبط با حالتی است که نوع ناهمواری سطح جاده از نوع کلاس خیلی بد باشد. در مورد بررسی تأثیر عبور خودروی کلاس سنگین، نوع ناهمواری سطح جاده تأثیر بسزایی در پاسخ دینامیکی پل دارد بطوریکه با ناهموارتر شدن سطح جاده میزان نامعینی نمودارها نیز بیشتر می‌شود و انحراف حد بالا و حد پایین از میانگین در نمودارهای میانگین خیز، سرعت و شتاب نیز افزایش می‌یابد.

۵-۲- تأثیر نامعینی پارامترهای مختلف خودرو بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی بر اثر عبور روی سطوح مختلف جاده‌ای

با توجه به نتایج به دست آمده در قسمت ۵-۱، کلاس خودروی سنگین برای مشاهده بهتر تأثیر نامعینی پارامترهای مختلف خودرو بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی انتخاب می‌گردد. برای بررسی تأثیر هر پارامتر بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی، آن پارامتر برای هر خودرو به صورت مقداری اتفاقی با توزیع نرمال در نظر گرفته می‌شود و بقیه پارامترهای خودرو نیز به صورت ثابت و برابر با میانگین مقادیر آن پارامترها با توجه به جدول ۲ اختیار می‌شود. بازه تغییرات سرعت خودرو بین ۵ تا ۹۰ کیلومتر بر ساعت فرض می‌شود. این بررسی در ۴ کلاس سطح جاده صاف، خیلی خوب، متوسط و خیلی بد شبیه‌سازی می‌گردد. از نتایج حاصل به عنوان نمونه در شکل‌های ۶ تا ۱۰ نشان داده شده که مربوط به کلاس

۵-۳- بررسی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی با

کلاس خودروی نامعین عبوری از روی پل

در این بررسی، فرض می‌شود نوع کلاس خودروی عبوری از روی پل نامعین می‌باشد و تمام کلاس‌های خودرو شانس برابری را در عبور از روی پل دارند. در این حالت تمامی پارامترهای تأثیرگذار روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی از جمله نوع خودروی عبوری، جرم، سرعت، ابعاد، میرایی و در نهایت سفتی خودرو به صورت اتفاقی انتخاب می‌شوند و هیچ اختیاری در این انتخاب‌ها وجود ندارد. نوع خودروی عبوری از روی پل به کمک تابع توزیع یکنواخت انتخاب می‌شود و تمامی پارامترهای متغیر مربوط به خودروها نیز با توجه به بازه تغییرات پارامترهای مربوط به جدول ۲ به کمک تابع توزیع نرمال اختیار می‌شوند. این بررسی در ۶ کلاس سطح جاده صاف، خیلی خوب، خوب، متوسط، بد و خیلی بد شبیه‌سازی انجام می‌گردد و به عنوان یک نمونه در ۲ کلاس سطح جاده خوب و بد در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

با مشاهده شکل ۱۱ می‌توان به این نتیجه رسید که افزایش ناهمواری سطح جاده، میزان اغتشاشات در نمودارهای میانگین خیز، سرعت و شتاب و همچنین دامنه نوسانات نمودارهای میانگین و انحراف معیار شتاب و میزان انحراف حد بالا و حد پایین از مقادیر میانگین خیز، سرعت و شتاب، افزایش می‌یابد و بیشینه میانگین خیز برای حالتی که نوع کلاس خودرو مشخص نیست در حدود ۱ میلی‌متر می‌باشد.

خودروی سنگین در سطح جاده با کلاس خیلی خوب و خیلی بد می‌باشد.

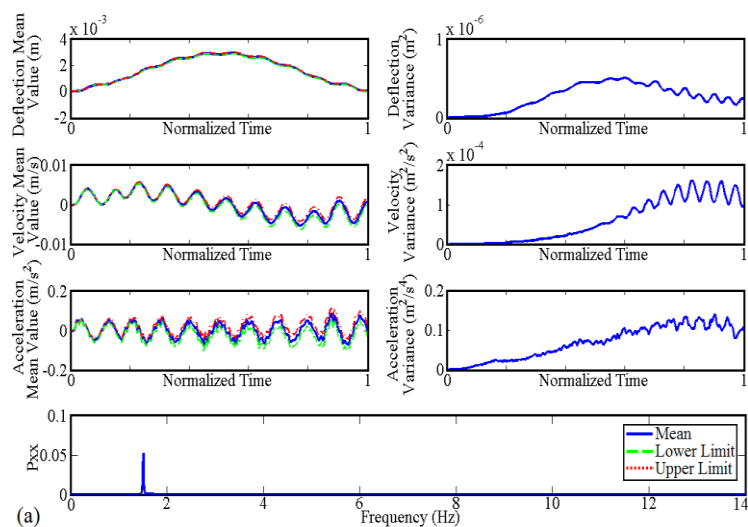
با دقت در شکل‌های ۶ تا ۱۰، می‌توان موارد زیر را نتیجه گرفت:

۱- با افزایش ناهمواری سطح جاده، دامنه نوسانات در نمودارهای مربوط به میانگین و انحراف معیار خیز، سرعت و شتاب و همچنین میزان انحراف حد بالا و حد پایین از نمودارهای مربوط به میانگین خیز، سرعت و شتاب، افزایش می‌یابد و متعاقباً بازه دامنه مربوط به انحراف معیار شتاب و انحراف حد بالا و حد پایین از مقدار مربوط به میانگین خیز، سرعت و شتاب نیز به شدت افزایش می‌یابد. شکل کلی نمودارهای میانگین خیز، سرعت و شتاب برای انواع مختلف سطح جاده تقریباً ثابت و فرکانس طبیعی غالب سیستم برای انواع مختلف سطح، ثابت و تقریباً برابر با $1/6$ هرتز است.

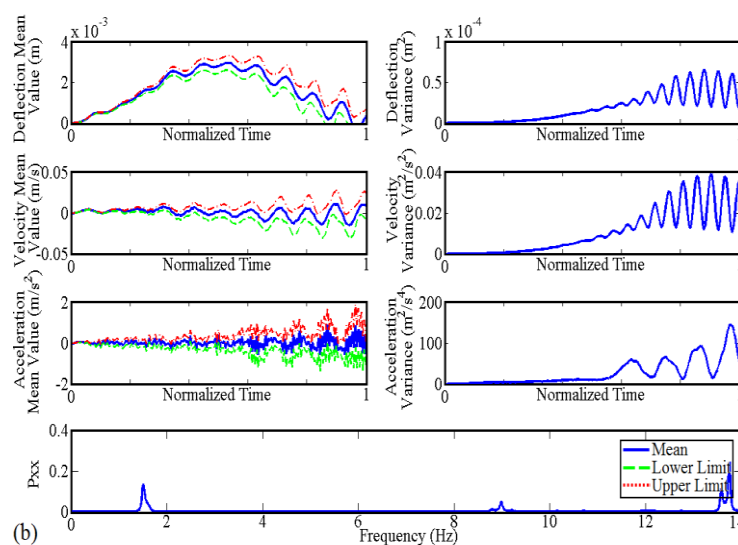
۲- در لحظه ورود خودرو به روی پل، میزان انحراف حد بالا و حد پایین از نمودارهای مربوط به میانگین خیز، سرعت و شتاب تقریباً برابر با صفر است و رفته‌رفته این انحراف بیشتر می‌شود و در لحظه خروج خودرو از روی پل، انحراف حد بالا و حد پایین از مقادیر میانگین به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد که این انحراف با افزایش ناهمواری سطح جاده، افزایش می‌یابد.

۳- با افزایش ناهمواری سطح جاده، فرکانس‌های بیشتری در نمودار مربوط به فرکانس‌های استخراج‌شده به کمک نمودار میانگین شتاب قابل شناسایی می‌شود که این تعداد فرکانس، ناشی از تأثیر نامعینی پارامتر سرعت بر روی پاسخ دینامیکی سیستم است و لزوماً فرکانس‌های طبیعی سیستم را نشان نمی‌دهد.

۴- نامعینی پارامتر سرعت، تأثیرگذارترین نامعینی در پارامترهای متغیر خودرو بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی است و نامعینی‌های سفتی، جرم، میرایی و ابعاد در رده‌های بعدی تأثیرگذاری قرار دارند و فرکانس طبیعی سیستم ارتعاشی با تغییر پارامترهای جرم، سفتی، میرایی و ابعاد خودرو، تغییر نمی‌نماید.

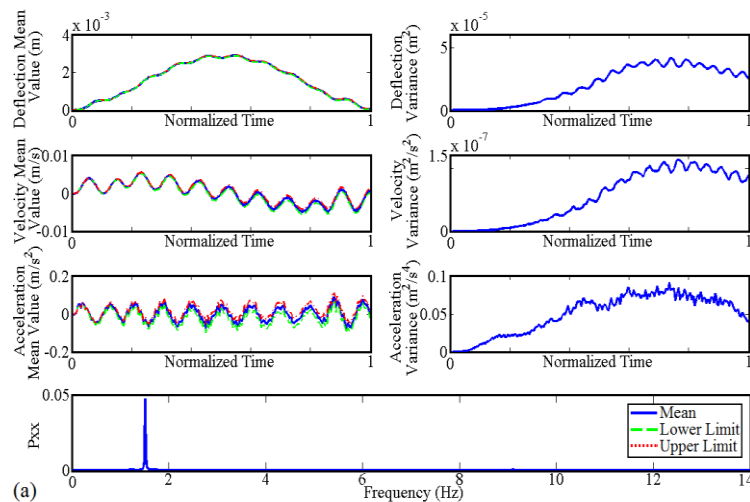


(a)

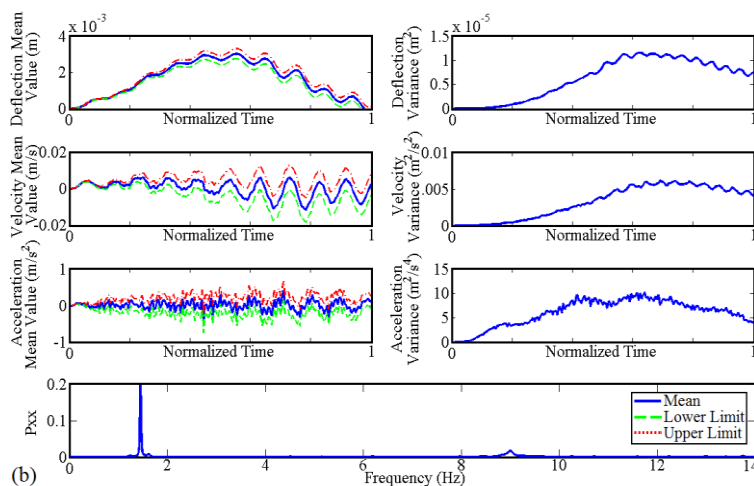


(b)

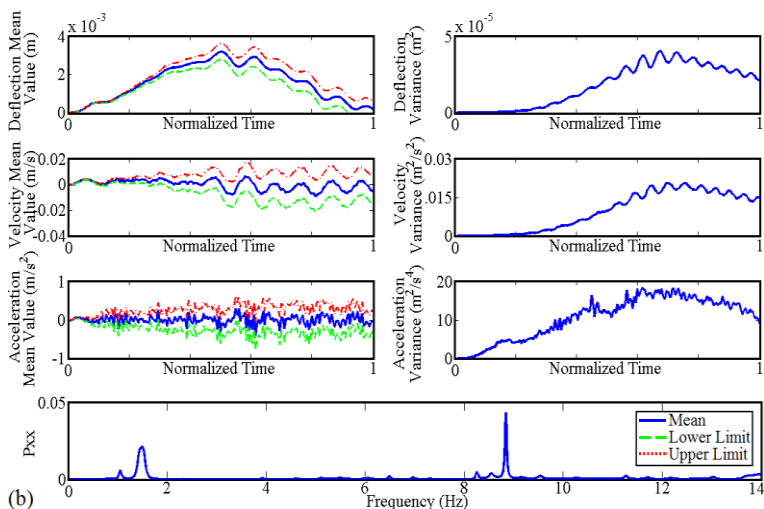
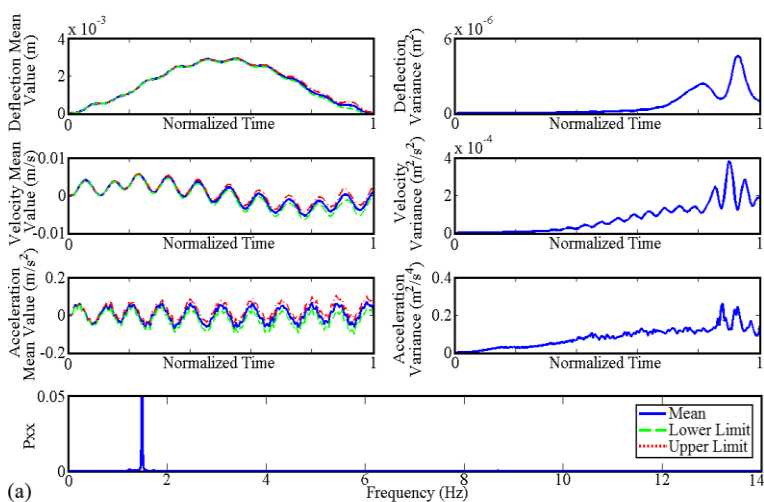
شکل ۶- تأثیر نامعینی جرم خودروی سنگین بر روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بر اثر عبور روی جاده با سطح: (a) خیلی خوب، (b) خیلی بد



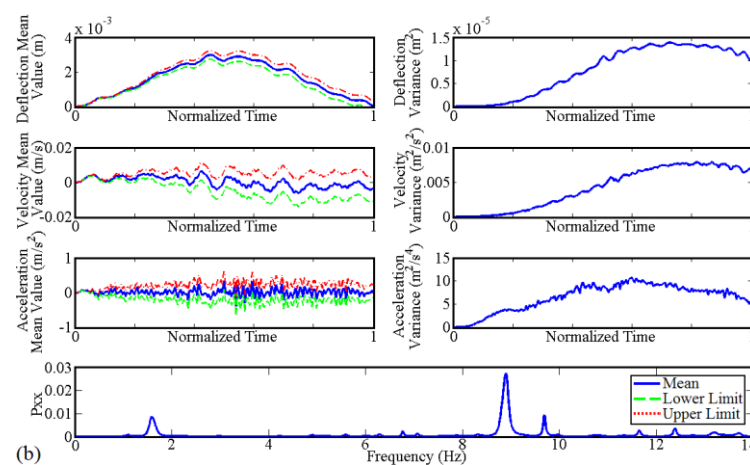
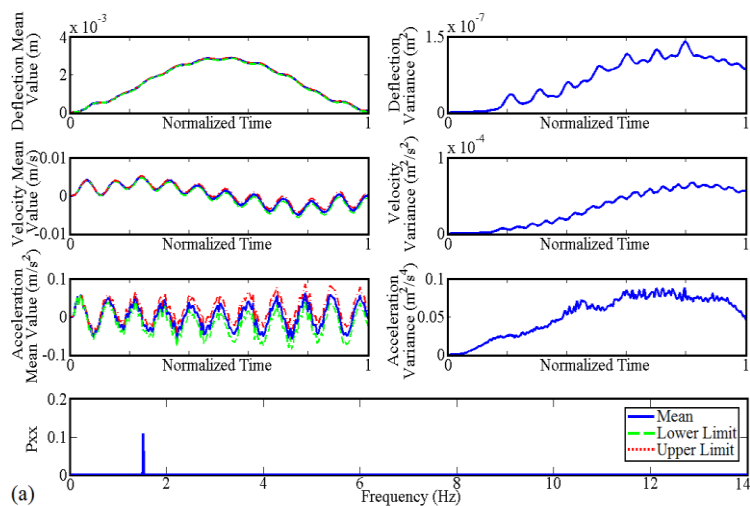
(a)



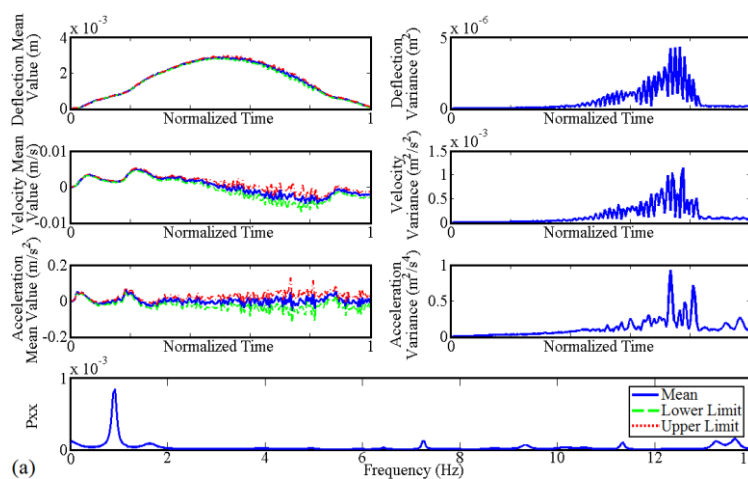
شکل ۷- تأثیر نامعینی میرایی خودروی سنگین بر روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بر اثر عبور روی جاده با سطح: (a) خیلی خوب، (b) خیلی بد

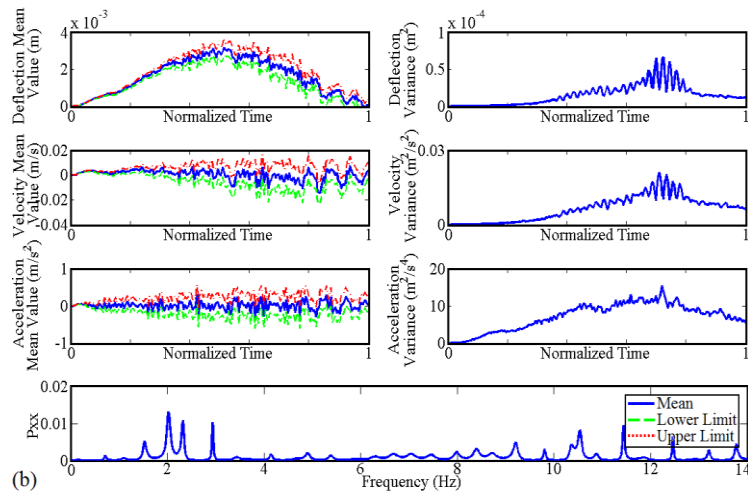


شکل ۸- تأثیر نامعینی سفتی خودروی سنگین بر روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بر اثر عبور روی جاده با سطح: (a) خیلی خوب، (b) خیلی بد

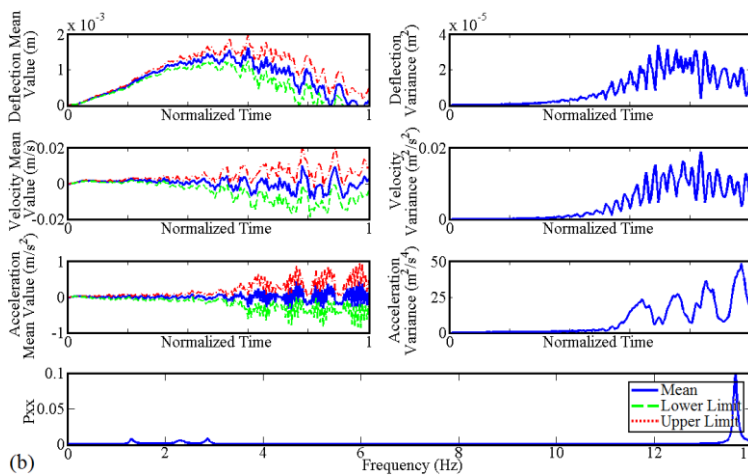
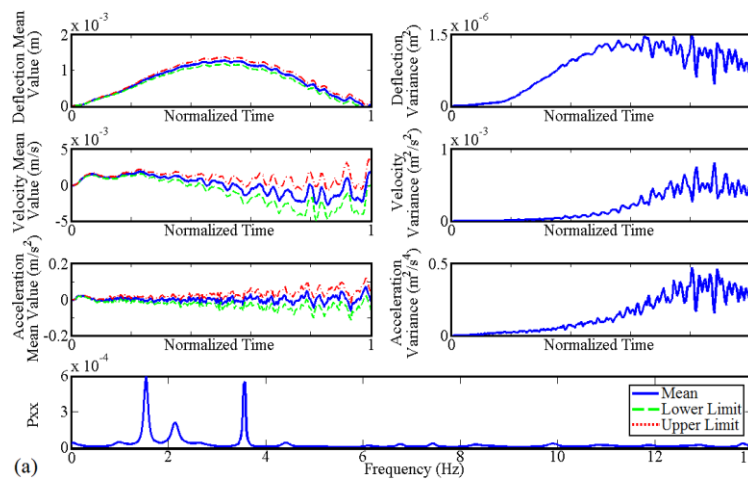


شکل ۹- تأثیر نامعینی ابعاد خودروی سنگین بر روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بر اثر عبور روی جاده با سطح: (a) خیلی خوب، (b) خیلی بد





شکل ۱۰- تأثیر نامعینی سرعت خودروی سنگین بر روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بر اثر عبور روی جاده با سطح: (a) خیلی خوب، (b) خیلی بد



شکل ۱۱- تأثیر نامعینی کلاس خودروهای عبوری بر پاسخ‌های دینامیکی سیستم بر اثر عبور روی جاده با سطح: (a) خوب، (b) بد

۶- نتیجه گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن تمامی نامعینی‌های ممکن در سیستم دینامیکی پل- وسیله نقلیه و با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، مطالعه مبسوطی در مورد اثرات نامعینی‌ها روی سازه پل انجام گرفته شد. با استفاده از نرم‌افزار CARSIM، تعریف نامعینی‌های وسایل نقلیه عبوری از پل به صورتی انجام گردید که شرایط واقعی تری قابل شبیه‌سازی باشد. به عنوان نمونه بارز، نامعینی در نوع کلاس خودروی عبوری که در سه کلاس سبک، نیمه سنگین و سنگین تعریف شده است نیز به عنوان یک نامعینی جدید در این مقاله معرفی گردید. همچنین تمامی پارامترهای آماری از قبیل میانگین و واریانس خیز، سرعت و شتاب یک نقطه از پل به همراه بازه قابلیت اطمینان متناظر استخراج گردید و مطالعه مبسوطی انجام گردید و به تبع آن نتایج عمده و مهمی از روی داده‌های آماری مذکور مورد بحث و بررسی قرار گرفته شد. از جمله مهم‌ترین نتایج این مقاله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- ۱- با ناهموارتر شدن سطح جاده، میزان نامعینی در پاسخ دینامیکی پل و همچنین فرکانس‌های غالب مرتبط با آن پاسخ افزایش می‌یابد. این مساله در هنگام عبور خودروی سنگین در مقایسه با خودروهای نیمه سنگین و سبک بیشتر قابل مشاهده می‌باشد.
- ۲- نامعینی پارامتر سرعت به عنوان تأثیرگذارترین نامعینی، از میان پارامترهای متغیر خودرو، بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ارتعاشی می‌باشد. نامعینی‌های سفتی، جرم، میرایی و ابعاد در رده‌های بعدی تأثیرگذاری قرار دارند.
- ۳- حد بالا و حد پایین برای مقادیر میانگین خیز، سرعت و شتاب استخراج گردید و در نتیجه فاصله اطمینان برای این مقادیر که در طراحی دقیق پل و بررسی قابلیت اطمینان آن بسیار کاربرد دارد، حاصل گردید.
- ۴- فرکانس‌های طبیعی که برای طراحی سیستم‌های سلامت سنجی پل از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است، با استفاده از مقادیر میانگین شتاب شناسایی و با سایر فرکانس‌های حاصل از نامعینی موجود در سیستم تمییز داده شد.

۷- مراجع

- [1] Law S. S., Bu J. Q., Zhu X. Q., Chan S. L., (2004). Vehicle axle loads identification on bridges using finite element method. *Engineering Structures*, Vol. 26(8), pp. 1143-53.
- [2] Muscolino G., Benfratello S., Sidoti A., (2002). Dynamics analysis of distributed parameter system subjected to a moving oscillator with random mass, velocity and acceleration, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 17 pp. 63-72.
- [3] Ding L., Hao H., Zhu X., (2009). Evaluation of dynamic vehicle axle loads on bridges with different surface conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 323, pp. 826-848.
- [4] Wyss J. C., Su D., Fujino Y., (2011). Prediction of vehicle-induced local responses and application to a skewed girder bridge, *Engineering Structures*, Vol. 33, pp. 1088-1097.
- [5] Wu S.Q., Law S.S., (2011). Vehicle axle load identification on bridge deck with irregular road surface profile, *Engineering Structures* Vol. 33, pp. 591-601.
- [6] Wu S.Q., Law S.S., (2012). Evaluating the response statistics of an uncertain bridge-vehicle system, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 27, pp. 576-589.
- [7] ISO 8608:1995(E). Mechanical vibration – road surface profiles – reporting of measured data, 1995.
- [8] Henchi K., Fafard M., Talbot M., Dhatt G., (1998). An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 212(4), pp. 663-83.
- [9] Weaver W., Johnstone P. R., (1987). *Structural Dynamics by Finite Elements*. Prentice-Hall.
- [10] Bhattacharyya G. K., Richard A., (1977). *Statistical Concepts and Methods*, Johnson John Wiley & Sons.
- [11] CARSIM Software, Version 8.2 (2013). *Mechanical Simulation Corporation*, 705 Phoenix Drive, Ann Arbor MI, 48108, USA.