مدلسازی ریاضی مساله مکان یابی P مرکز با در نظر گرفتن سلسله مراتب لانه ای وکاربرد الگوریتم بهینه سازی گروهی ذرات در حل آن

مهدی بشیری*[۱]، محمدرضا یعقوبی[۲]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۰۴
پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۲/۰۲

واژگان کلیدی:
برنامه ریزی ریاضی،
مکان یابی مرکز،
سلسله مراتبی لانه ای،
بهینه سازی گروهی ذرات.

چکیده

در این مقاله به معرفی مدل مساله مکان یابی مرکز (P-Center) با در نظرگرفتن سلسله مراتب و حل آن به وسیله الگوریتم بهینه سازی گروهی ذرات پرداخته می شود. در این مدل دو سطح در نظر گرفته شده است که برای رسیدن به سطح دو حتما باید از سطح یک گذر کرد. خدمات سطح یک و دو با هم در ارتباط بوده و سطح دو ضمن ارائه خدمات سطح یک، خدماتی بالاتر از آن سطح را نیز ارائه می کند. این مدل به صورت مدل برنامه‌ریزی ریاضی عدد صحیح می‌باشد. بمنظور ارائه کاربردی از مساله، چند مثال موردی شبیه سازی شده بررسی و حل شده است، نتایج بررسی نشان می دهد که استفاده از این مدل باعث کاهش هزینه های اولیه احداث با توجه به تغییر اندک تابع هدف نسبت به حالت کلاسیک خواهد شد. ازسوی دیگر برای مسائل بزرگ، نرم افزارهای بهینه سازی قادر به حل مدل در یک زمان قابل قبول نیستند و لذا در ادامه، الگوریتم بهینه سازی گروهی ذرات استفاده و نتایج آن ارائه شده است که نتایج به دست آمده حاکی از کارایی الگوریتم پیشنهادی است.

۱- مقدمه

مساله مکان یابی P مرکز(P-Center) یک مساله شناخته شده در مسائل مکان یابی است که در آن به دنبال پیدا کردن P مکان برای احداث یا قرارگیری تسهیلات هستیم به طوری که حداکثر فاصله بین نقاط تقاضا و نزدیکترین مکان تسهیل به این نقطه کمینه گردد. اصلی ترین کاربرد این مساله در مکان یابی تسهیلات خدمات اورژانسی و اضطراری از قبیل احداث بیمارستان، ایستگاه های اورژانس، مراکز انتظامی، آتش نشانی و... می باشد. زیرا در این گونه مسائل به دنبال حداکثر کردن سود یا کاهش هزینه نیستیم بلکه می خواهیم تسهیلات عام المنفعه به تمامی نقاط تقاضا نزدیک باشد.

مسائل سلسله مراتبی(hierarchical) از k سطح تشکیل می شود. در سطح صفر نقاط تقاضا و در سایر سطوح به ترتیب اولویت از سطح یک تا سطح k مراکز طبقه بندی می شود. وقتی دو مساله سلسله مراتبی و مرکز با هم ترکیب می شوند، به دنبال مکان هایی هستیم برای قرار گیری تسهیلات سطح یک و دو به گونه ای که حداکثر

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: bashiri@shahed.ac.ir
۱. دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد، تهران
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد، تهران

فاصله بین نقاط تقاضا و نزدیکترین مکان تسهیل سطح یک و فاصله بین سطح یک و دو کمینه گردد.

همچنین مسائل سلسله مراتبی به دو دسته لانه ای (Nested) و غیر لانه ای (No-Nested) تقسیم بندی می شوند. در مسائل لانه ای سطوح بالاتر نوع خدماتشان کاملتر و مرتبط با سطوح پایین تر می باشد (مانند بیمارستان و کلینیک). ولی در مسائل غیر لانه ای نوع خدمات و امکانات سطوح مختلف با هم متفاوت می باشد. در مقاله حاضر نوع مساله، لانه ای فرض شده است. همچنین نوع مدل‌سازی این مقاله به صورت تک جریانه می باشد. به این معنی که سطوح پایین تر باید براساس سلسله مراتب به ترتیب به سطوح بالاتر دسترسی پیدا کنند و امکان اینکه به طور مستقیم به دو یا چند سطح بالاتر خود به طور مستقیم متصل و مرتبط باشند، امکان پذیر نیست.

هدف از این تحقیق، مکان یابی p مرکز سطح یک و q مرکز سطح دو به گونه ای است که نقاط تقاضا با سطح یک و سطح یک نیز با سطح دو در ارتباط بوده و حداکثر فواصل بین آنها حدقل می شود. همچنین حل مساله مورد نظر با نرم افزارهای بهینه‌سازی برای مسائل کوچک و ارائه الگوریتم فرا ابتکاری بهینه سازی گروهی ذرات برای مسائل با اندازه بزرگ هدف دیگری از این مقاله می باشد.

در ادامه مقاله ابتدا به مرور ادبیات پرداخته شده، پس از آن بیان مسأله ارائه و تحلیل حساسیت انجام می شود، سپس به معرفی الگوریتم فرا ابتکاری بهینه سازی جمعی ذرات و کاربرد آن پرداخته شده و در انتها نتیجه گیری ارائه می‌شود.

۲- مرور ادبیات

مدل کلاسیک مساله مکان یابی مرکز ابتدا توسط حکیمی [۱] ارائه شد. پس از آن مدل عدد صحیح آن توسط داسکین [۲] و الومی و همکاران [۳] ارائه گردید که برای حل آن از الگوریتم های دقیق استفاده کرده اند. از آنجاییکه مساله مکان یابی مرکز یک مساله NP-hard است برای ابعاد بزرگ حل دقیق کارا نیست. از این رو هنسن [۴] از الگوریتم فرابتکاری جستجوی ممنوعه (Tabu search)و پس از آن ملادویچ [۵] با تغییر تولید همسایگی الگوریتم جستجوی ممنوعه برای حل مساله استفاده کرده اند. همچنین اسکاپارا [۶] روش ابتکاری جستجوی محلی را برای مدل مکان یابی مرکز ظرفیت دار ارائه کرده است.

برای حل مسائل بدون ظرفیت روشی ابتکاری وجود دارد. به این ترتیب که ابتدا مقداری از ماتریس فاصله را در نظر گرفته و به عنوان تابع هدف انتخاب می کنیم. آیا تمامی نقاط تحت پوشش قرار گرفته اند یا خیر؟ اگر همه پوشش داده نشده بودند مقدار بزرگتری از ماتریس فاصله را انتخاب می کنیم. این روش توسط داسکین[۷] بهبود داده شد و آلباردا و همکاران [۸] این روش را برای مسائل ظرفیت دار بسط و گسترش دادند.

روش های دیگری به غیر از روش های فرابتکاری که برای حل مسائل مکان یابی مرکز استفاده شده اند. از آن جمله می توان به کار داسکین و همکاران [۷] اشاره کرد که از روش لاگرانژ بهره برده اند. در ادامه ایلهان و پینار [۹] این روش را گسترش داده اند. پس از آن هالیک و تانسل [۱۰] نوع جدیدی از فرمولاسیون مساله مکان یابی مرکز را ارائه نمودند که منجر به کاهش زمان حل مساله شد. در ادامه به ارائه چند روش ابتکاری برای به دست آوردن حد بالا و پایین نموده اند و همچنین روش ابتکاری برای حل مساله معرفی کرده اند که می تواند مسائلی با ۳۰۳۸ نقطه تقاضا را حل کند.

جدول شماره ۱ خلاصه ای از مطالعات صورت‌گرفته سال‌های اخیر در رابطه با مسائل P-Center را نشان می دهد.

بر اساس بررسی انجام شده، در مسائل سلسله مراتبی برای مدل های مکان یابی مرکز تا به حال مطالعه معینی صورت نگرفته است، اما در مسائل مکان یابی میانه که شبیه به مسائل مکان یابی مرکز است. برای حالت سلسله مراتبی مطالعاتی انجام شده است که از آن جمله می توان به مطالعه سرا [۱۷] اشاره کرد. در مطالعه ایشان، مساله مکان یابی میانه به صورت سلسله مراتبی مدل شده است. مسائل مکان

یابی میانه با در نظر گرفتن سلسله مراتب به دو حوزه ی مبتنی بر جریان (flow-based) [۱۸][۱۹] و مبتنی بر تخصیص (assignment-based) [۲۰][۲۱] تقسیم می شوند. تمایز این دو حوزه در نوع نمایش تخصیص تقاضا به مراکز تسهیلات می باشد. در فرمولاسیون جریان پایه مقدار تخصیص متغیر می باشد و بیشتر در مسائل جریان شبکه کاربرد دارد. در مسائل پایه تخصیص فقط نشان داده می شود که کدام نقطه تقاضا باید به کدام مرکز تسهیل تخصیص یابد. نوآوری مقاله حاضر را می‌توان در مدلسازی مساله مکان یابی مرکز سلسله مراتبی خلاصه نمود. ضمن آنکه برای ابعاد بزرگ نیز ارائه روش حل فرا ابتکاری از جمله نوآوری های آن محسوب می‌شود.

۳- تعریف مسأله

در این مقاله، یک مساله مکان یابی مرکز با در نظر گرفتن سلسله مراتب مدل‌سازی می‌شود. در این مدل دو سطح در نظر گرفته شده است که به صورت تک جریانه می باشد. هدف در این مدل مینیمم کردن حداکثر فاصله مشتری ها از مراکز تسهیل می باشد. ابتدا به معرفی پارامترها و متغیرهای تصمیم می پردازیم.

جدول ۱- خلاصه مطالعات صورت گرفته مکان یابی p مرکز در سالهای اخیر

نویسنده	محدودیت				تخصیص		نوع داده ها	روش حل		
	ظرفیت	شعاع پوشش	زمان	سلسله مراتبی	یگانه	چندگانه		دقیق	ابتکاری	فراابتکاری
کای یانگ و همکاران[۱۱]			*		*		فازی		*	GA *
چانگ چنگ لو [۱۲]	*				*		غیر قطعی			SA*
داگوبرتو و همکاران [۱۳]	*				*		قطعی		*	
الشایخ و همکاران [۱۴]	*				*		قطعی		*	
هالیک و همکاران [۱۰]		*			*		قطعی		*	
کاوه و همکاران[۱۵]		*			*		قطعی			HS*
یانگ و همکاران [۱۶]			*		*		فازی	*		
مقاله ارائه شده				*	*		قطعی			PSO*

فاصله بین دو نقطه کاندیدا i,j (پارامتر)	$d(i,j)$
تعداد مراکز سطح یک (پارامتر)	P
تعداد مراکز سطح دو (پارامتر)	Q
کمان واصل بین نقطه تقاضا i و سطح یک j (متغیر تصمیم)	$x(i,j)$
متغیر تصمیم مکان یابی مرکز سطح یک	$y(j)$
کمان واصل بین تسهیل سطح یک j و تسهیل سطح k (متغیر تصمیم)	$w(j,k)$
متغیر تصمیم مکان یابی سطح دو	$f(k)$

مدل ارائه شده مسأله مکان یابی مرکز سلسله مراتبی به صورت زیر می باشد.

$$\min z \tag{۱}$$

$$\sum_j d(i,j) * x\,(i,j) \leq z \qquad \forall i \in N \tag{۲}$$

$$\sum_k d(j,k) * w\,(j,k) \leq z \qquad \forall j \in N \tag{۳}$$

$$\sum_i \sum_j x(i,j) = n - q \tag{۴}$$

$$\sum_i \sum_j w(i,j) = p \tag{۵}$$

$$y(i) + f(i) \leq ۱ \qquad \forall i \in N \tag{۶}$$

$$\sum_j y\,(j) = p \tag{۷}$$

$$\sum_k f(k) = q \tag{۸}$$

$$\sum_k w\,(j,k) \leq ۱ \qquad \forall j \in N \tag{۹}$$

$$\sum_j x\,(i,j) \leq ۱ \quad \forall i \in N \tag{۱۰}$$

$$x(i,j) \leq y(j) \quad \forall i,j \in N \tag{۱۱}$$

$$w(j,k) \leq y(j) \quad \forall j,k \in N \tag{۱۲}$$

$$w(j,k) \leq f(k) \quad \forall j,k \in N \tag{۱۳}$$

$$x(i,j) + f(i) \leq ۱ \qquad \forall i,j \in N \tag{۱۴}$$

$$y_j, f_k, x_{i,j}, w_{j,k} \in \{۰,۱\} \tag{۱۵}$$

محدودیت شماره (۱)، (۲) و (۳) بیان کننده تابع هدف مساله که در واقع همان مینیمم کردن حداکثر فاصله بین سطح صفر و یک و همچنین سطح یک و دو می باشد، محدودیت (۴) و (۵) تعداد کمان های بین سطح صفر و یک و سطح یک و دو را نشان می دهد، به این معنی که کمان های بین نقطه تقاضا و سطح یک و همچنین سطح یک و سطح دو چه تعدادی باید باشد، محدودیت (۶) نشان می دهد که نقاط کاندیدا همزمان نمی تواند هم سطح یک باشد و هم سطح دو، محدودیت (۷) و (۸) تعداد تسهیلات سطح یک و دو را نشان می دهد، محدودیت (۹) تضمین می کند که هر کدام از مراکز سطح یک فقط به یکی از مراکز سطح دو می تواند متصل شود، محدودیت (۱۰) شبیه به محدودیت (۸) می باشد، در محدودیت (۱۱) کمان واصل بین نقطه تقاضا و سطح یک زمانی می تواند یک باشد که سطح یک ایجاد شده باشد، محدودیت (۱۳) نیز شبیه محدودیت (۱۱) می باشد، محدودیت (۱۲) تضمین می کند که فقط مراکز سطح یک می توانند به سطح دو متصل شوند، محدودیت (۱۴) نشان می دهد که نقاط تقاضا فقط می توانند به سطح یک متصل شوند.

محدودیت های (۱) –(۳) ، (۷) و (۱۱) بر اساس مساله کلاسیک مکان یابی P مرکز [۲] لحاظ گردیده و مابقی بر اساس منطق سلسله مراتبی و مرور مقالات مکان یابی با در نظر گرفتن سلسله مراتب [۱۷] انطباق داده شده است . همچنین تغییر پارامترها و مقایسه پاسخ آن ها در سایز های مختلف مساله که در ادامه نشان داده شده، حاکی از اعتبار و درستی مدل می باشد.

۴- مثالهای عددی و نتایج محاسباتی

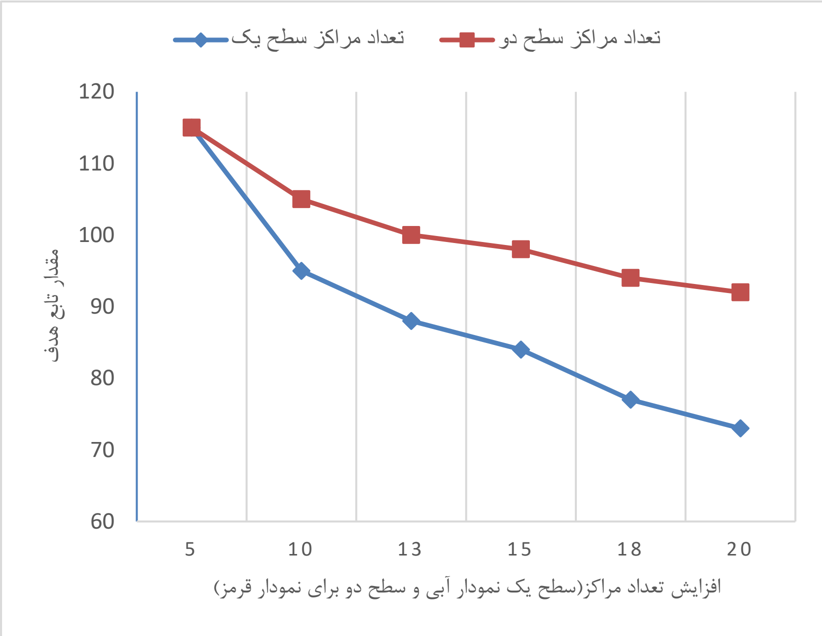
به منظور بررسی عملکرد مدل و انجام تحلیل حساسیت تعدادی مسأله موردی در اندازه های مختلف بر اساس تابع توزیع یکنواخت ایجاد گردید (فاصله ها بر اساس تابع توزیع یکنواخت تولید شده و تعداد مراکز سطح یک و دو نیز به تناسب تعداد نقاط کاندیدا انتخاب گردیده اند). سپس هریک از آنها با استفاده از نرم افزار بهینه سازی *GAMS* و با تعداد سطوح مختلف و همچنین سایزهای مختلف حل گردید که نتایج آن در جدول شماره دو ارائه شده است.

همانطور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود، با افزایش تعداد هریک از سطوح یک و دو مقدار تابع هدف کاهش می یابد، اما تعداد این مراکز بسته به مقدار بودجه و مقدار مورد انتظار تابع هدف می تواند تغییر کند. همچنین هر چقدر تعداد مراکز سطح یک بیشتر باشد مقدار تابع هدف بیشتر کاهش می یابد چون معمولا همیشه مراکز سطح یک با تعداد بیشتری از نقاط (هم با مراکز سطح دو و هم با نقاط تقاضا) درگیر است. نتایج تحلیل حساسیت انجام شده در نمودار یک نیز این موضوع را نشان می دهد.

نمودار ۱ مربوط به مساله ی (ج) با ۱۰۰ نقطه برای انتخاب سطوح یک و دو می باشد. در نمودار آبی رنگ، تعداد مراکز سطح دو را ثابت و برابر مقدار ۵ در نظر گرفته و تعداد مراکز سطح یک را افزایش می‌دهیم که محور عمودی مقدار تابع هدف را نشان می‌دهد و همچنین در نمودار قرمز رنگ برعکس حالت آبی رنگ خواهد بود به این ترتیب که تعداد مراکز سطح یک را ثابت و برابر ۵ در نظر گرفته و تعداد مراکز سطح دو را افزایش می‌دهیم. با توجه به نمودار مشخص می‌شود که مقدار تابع هدف به تعداد مراکز سطح یک حساسیت بیشتری نسبت به تعداد مراکز سطح دو دارد. انتظار می رود در حالتی که تعداد مراکز مدل کلاسیک مرکز با تعداد مراکز سطح یک و دو مدل پیشنهادی برابر باشد، مقدار تابع هدف مدل کلاسیک و مدل ارائه شده با یکدیگر برابر باشند. چون در این حالت مدل ارائه شده تبدیل به مدل کلاسیکی می شود که به ازای هر مرکز انتخاب شده یکی از نقاط تخصیص یافته به مرکز سطح دو تبدیل می شود. این موضوع برای بررسی صحت عملکرد مدل مورد بررسی قرار گرفت. نمودار ۲ مربوط به مساله ج، این مطلب را به وضوح نشان می دهد.

جدول ۲- حل مسائل با سایزهای مختلف برای مدل پیشنهادی

مقدار تابع هدف(z)	تعداد مراکز سطح۱(p)	تعداد مراکز سطح۲ (q)	تعداد مکان های کاندید(n)	نوع مسئله
۵	۳	۲	۱۰	**الف**
۷	۲	۳	۱۰	
۹	۲	۲	۱۰	
۱۶	۵	۵	۳۰	**ب**
۷	۱۰	۵	۳۰	
۹	۵	۱۲	۳۰	
۱۱۵	۵	۵	۱۰۰	**ج**
۱۰۶	۱۰	۱۰	۱۰۰	
۹۷	۱۰	۱۵	۱۰۰	
۷۵	۱۵	۱۰	۱۰۰	



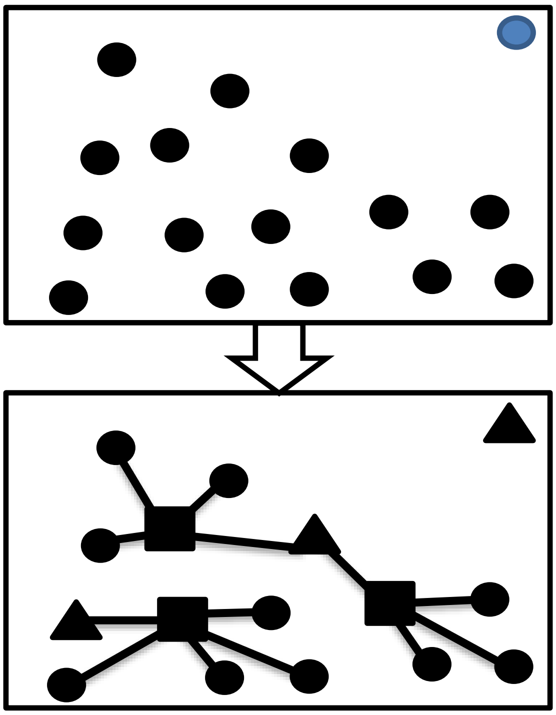
نمودار ۱-میزان حساسیت تابع هدف به تعداد مراکز سطح یک و دو

نمودار ۲- تحلیل عملکرد مدل

نمودار فوق عملکرد صحیح مدل ارائه شده را نشان می دهد. در جدول ۳ مقایسه ی بین مقدار تابع هدف مدل مساله کلاسیک مکان یابی p مرکز و مدل پیشنهادی انجام شده است. همچنین مقایسه ای بین مقدار تابع هدف و تعداد مراکز نشان داده شده است.

همانطور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، در مساله (ب) با ۳۰ نقطه کاندیدا و با ۱۰ مرکز که با مدل کلاسیک مکان یابی مرکز بدون در نظر گرفتن ظرفیت حل شده است، مقدار تابع هدف آن برابر ۱۰ می باشد. ولی با همان مقدار مراکز تسهیل که به دو سطح یک و دو تقسیم شده است، مقدار تابع هدف برابر ۱۴ است. در مساله کلاسیک، مراکز تسهیلات همگی با امکانات کامل (مشابه سطح دو مدل ارائه شده) هستند. فرض کنید هزینه ساخت یک کلینیک مجهز برابر ۳ واحد پولی و هزینه ساخت یک بیمارستان مجهز ۱۵ واحد پولی است. اگر بخواهیم با استفاده از مدل کلاسیک مساله را حل کنیم و بخواهیم به مقدار تابع هدف ۱۰ نزدیک شویم، می‌توانیم ۱۰ مرکز مجهز بیمارستانی با هزینه ۱۵۰ واحد پولی ایجاد کنیم و یا با استفاده از مدل ارائه شده اقدام به ایجاد ۱۱ کلینیک و ۴ مرکز مجهز بیمارستانی نماییم که هزینه آن برابر ۹۳ واحد پولی خواهد بود. در حالی که مقدار تابع هدف (حداکثر فاصله نقاط) همان مقدار ۱۰ خواهد بود. در نتیجه با بودجه ای کمتر از مساله کلاسیک به همان مقدار تابع هدف مساله کلاسیک دست پیدا کردیم.

همانطور که گفته شد در مدل مکان یابی مرکز ما به دنبال حداقل کردن مسافت برای تمامی نقاط کاندیدا هستیم نه کاهش هزینه یا افزایش سود به همین خاطر در این مدل اگر نقطه‌ی تقاضایی از مابقی نقاط فاصله بیشتری داشته باشد در آنصورت، مدل حتی المقدور سطح دو را به نقطه دورتر اختصاص می‌دهد و چون ظرفیت در مدل نیست هیچ یک از نقاط دیگر اعم از نقطه تقاضا و سطح یک را به آن نقطه اختصاص نمی‌دهد. شکل ۱ این مساله را به خوبی نمایان می‌کند.



شکل ۱ نمایش تخصیص مراکز در صورت وجود نقطه ای دور نسبت به سایر نقاط

در شکل ۱ مشخص است که نقطه آبی فاصله زیادی تا سایر نقاط کاندیدا دارد و مثلث نماد مرکز سطح ۲ و مربع نماد مرکز سطح ۱ است. پس از حل مدل مشخص است یکی از مراکز سطح دو را به نقطه آبی رنگ اختصاص می دهد و بدون اینکه دیگر نقاط را به آن اختصاص دهد سایر مراکز را جانمایی می‌کند. تحلیل انجام شده حاکی از عملکرد صحیح مدل برای حالات خاص می باشد.

۵- الگوریتم بهینه سازی جمعی ذرات (*PSO*)

الگوریتم *PSO* که توسط کندی [۲۲] پیشنهاد شده است، یک تکنیک بهینه سازی تصادفی بر مبنای جمعیت می باشد که از رفتارهای اجتماعی دسته پرندگان و ماهی ها الهام می گیرد. در الگوریتم *PSO* ابتدا سیستم با یک جمعیتی از جواب های تصادفی مقدار دهی اولیه می شود و سپس با به روز رسانی نسل ها جواب بهینه جستجو می شود. بر خلاف روش مشابه (الگوریتم ژنتیک)، این الگوریتم عملگرمستقیم تکاملی مانند ادغام و جهش ندارد، اما به سمت جواب های *P-Best* و *G-Best* گرایش وجود دارد همچنین از سرعت همگرایی بالاتری نسبت به آن برخوردار

است. در این الگوریتم جواب های بالقوه که ذره نامیده می شوند، در کل فضای مساله با دنبال کردن بهینه ترین ذره کنونی به حرکت در می آیند. اگر یکی از ذرات مسیر خوبی را بیابد، سایر ذرات به دنبال آن ذره حرکت می کنند، هرچند که از آن خیلی دور باشند. رفتارجمعی با استفاده از ذرات داخل فضای چندبعدی که دارای دو مشخصه ی مکان و سرعت هستند مدل می شود.

این ذرات در کل این فضا حرکت می کنند و بهترین مکانی را که تاکنون ملاقات کرده اند به خاطر می سپارند. آن ها این موقعیت های خوب را به اطلاع یکدیگر رسانده و موقعیت و سرعت حرکت خود را براساس این موقعیت های خوب تنظیم می کنند. اگر بخواهیم این روند را به صورت دقیق تر بیان کنیم، مراحل زیر را خواهیم داشت.

جمعیت ذرات در ابتدا با جمعیتی تصادفی از جواب ها مقداردهی اولیه می شوند. این جمعیت اولیه به صورت تکراری در کل فضای جستجوی d بعدی حرکت می کنند و به دنبال جواب های جدید می گردند. برای هر ذره تابع برازندگی f به منظور اندازه گیری کیفیت جواب محاسبه می شود تا بهترین ذره مشخص گردد. هر ذره دارای یک مکان و یک سرعت است که به ترتیب توسط بردارهای مکان x_i (که i اندیس ذره می باشد) و سرعت v_i نشان داده می شوند. هر ذره بهترین مکان خود تا لحظه کنونی را در بردار $p_i=(p_{i1},p_{i2},...,p_{id})$ و مقدار j امین بعد خود را در p_{ij} نگهداری می کند. بهترین بردار در میان همه ی ذرات *(P-best)* در بردار p_g ذخیره می‌شود. در طول زمان تکرار، بروز رسانی سرعت از سرعت قبلی به مقدار جدید توسط رابطه ی (۱۶) و مقدار جدید برای مکان از رابطه ی (۱۷) محاسبه می شوند.

$$v_{ij}(t+1)=wv_{ij}(t)+c_1r_1(p_j(t)-x_{ij}(t))+c_2r_2(p_{gi}(t)-x_{ij}(t)) \quad (۱۶)$$

$$x_{ij}(t+1)=x_{ij}(t)+v_{ij}(t+1) \quad (۱۷)$$

که در آن w ضریب اهمیت به جهت حرکت فعلی نامیده می شود و r_1 و r_2 اعداد تصادفی هستند. c_1 و c_2 به ترتیب ضرایب اهمیت به جهت بهترین مکان دیده شده خود جزء *(P-best)* و بهترین مکان دیده شده کل *(G-best)* می باشد. شبه کد زیر مراحل فوق را به صورت خلاصه نشان می دهد:

جدول ۴- شبه کد بهینه سازی تجمعی ذرات

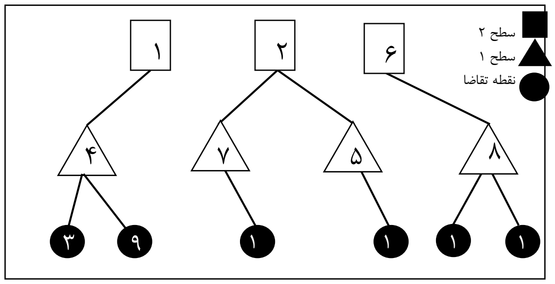
۱-تولید تصادفی جواب به تعداد اجزا
۲- محاسبه مقدار تابع هدف هر یک از اجزا
۳- به روز آوری مقدار *P-best* هریک از آنها
۴- به روز آوری مقدار *G-best*
۵- محاسبه *velocity* هریک از اجزا
۶- به روز آوری موقعیت مکانی هریک از اجزا
۷- اگر شرط توقف ایجاد نشده برو به ۲
۸- شرط توقف بیشینه مقدار تکرار

جدول ۳- مقایسه مقدار تابع هدف مدل ارائه شده با تابع کلاسیک

مقدار تابع هدف(z)	تعداد مراکز سطح۱(p)	تعداد مراکز سطح۲ (q)	تعداد مراکز مسئله کلاسیک	تعداد مکان های کاندید(n)	نوع مدل	نوع مسئله
۱۳	-	-	۸	۳۰	مدل کلاسیک	**ب**
۱۰	-	-	۱۰	۳۰		
۹	-	-	۱۲	۳۰		
۱۴	۸	۲	-	۳۰	مدل ارائه شده	**ب**
۱۲	۱۰	۳	-	۳۰		
۱۰	۱۱	۴	-	۳۰		

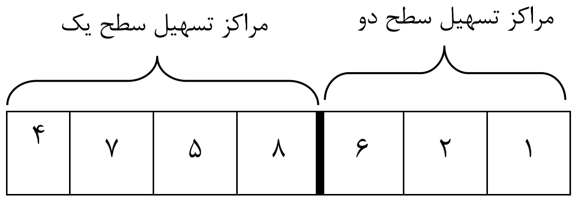
۶-اســـتفاده از الگوریتم *PSO* برای حل مســـاله مرکز سلسه مراتبی

قبل از این که به بیان چگونگی نمایش جواب بپردازیم در شکل ۲ نحوه مکان یابی و تخصیص برای یک مثال فرضی نشان داده شده است.



شکل ۲ نمایش چیدمان و تخصیص مراکز تسهیل

با توجه به شکل ۲ تعداد نقاط تسهیل سطح یک به شکل مثلث، ۴ مرکز و تعداد نقاط تسهیل سطح دو به شکل مربع، ۳ مرکز می باشد که نقاط تقاضا (نقاط دایره ای) به نزدیکترین مراکز تسهیل سطح یک و مراکز تسهیل سطح یک به نزدیکترین مراکز تسهیل سطح دو وصل می شوند. نمایش جواب شکل ۲ در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳ نمایش جواب مسأله

در واقع نمایش جواب مساله در شکل ۳ بدین صورت می باشد که به تعداد مجموع مراکز سطح ۱ و ۲ سلول ایجاد کرده و از سمت چپ چهار سلول اول، مراکز انتخاب شده برای احداث سطح ۱ و مابقی، مراکز انتخاب شده برای سطح دوم می باشد و همچنین نقاط تقاضا براساس نزدیکی فاصله به هرکدام از سطوح انتخابی متصل می گردد و همین الگو برای اتصال مراکز سطح ۱ به سطح ۲ وجود دارد.

در جدول ۵ نتایج محاسباتی استفاده از الگوریتم بهینه سازی جمعی ذرات و مقایسه آن با حل دقیق آمده است.
با بالا رفتن تعداد نقاط کاندیدا دیگر نرم افزارهای بهینه سازی قادر به حل مدل نیستند، در مساله اول نوع (ب) زمان حل مدل با استفاده از نرم افزار گمس ۴۰ ثانیه است ولی با الگوریتم فرا ابتکاری حل این مساله ۳۵ ثانیه به طول انجامید و همچنین با افزایش تعداد نقاط کاندیدا زمان حل مساله برای نرم افزارهای مدلسازی به صورت نمایی افزایش می یابد تا جایی که دیگر قادر به حل مدل در یک زمان قابل قبول نمی باشند.
همچنین در مسأله (ج) نیز زمان حل مساله با استفاده از نرم افزارهای بهینه سازی ۲۵۰ ثانیه طول می‌کشد ولی با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری و اختلاف ناچیز ۰٫۰۳ در زمان ۶۵ ثانیه مدل را حل خواهد کرد. با این توضیحات مشخص می‌شود الگوریتم فرابتکاری بهینه سازی تجمعی ذرات از کارایی مناسبی برای حل مدل مکان یابی مرکز برخوردار است به علاوه زمانی که تعداد نقاط کاندیدا به ۲۰۰ نقطه می رسد دیگر نرم افزارهای بهینه سازی قادر به حل مدل نخواهند بود. نتایج مساله (د) بهترین مقدار تابع هدف در ۲۰۰۰ ثانیه می باشد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله مدل مکان یابی مرکز سلسله مراتبی معرفی و بررسی شده است. تحلیلهای عددی انجام شده حاکی از صحت عملکرد مدل برای مساله مکان یابی مرکز سلسله مراتبی می باشد. همچنین با توجه به اینکه این مدل دارای محدودیت های زیاد و پیچیده می‌باشد و برای حل این مدل در سایزهای بزرگ نمی‌توان از نرم‌افزارهای بهینه سازی استفاده کرد، از الگوریتم فراابتکاری بهینه سازی تجمعی ذرات برای حل مدل استفاده شده است. بررسی مثال های عددی در اندازه های مختلف نشان دهنده کارایی الگوریتم پیشنهادی از حیث کیفیت و زمان حل می باشد. در این راستا پیشنهاد می شود که برای احداث مراکز جدید عام المنفعه، با رعایت الگوی سلسله مراتبی و میزان نزدیکی به

تمامی نقاط تقاضا بمنظور کاهش هزینه هاتصمیم گیری شود. برای مثال دولت برای ارائه مجوزهای مختلف یا تسهیلات حمایتی میتواند آمایش آن را از طریق نتایج حاصل از مدل پیشنهادی این تحقیق انجام دهد.

درنظر گرفتن مدل به صورت دو جریانه و یا افزایش تعداد سطوح مدل و درنظر گرفتن محدودیت شعاع پوشش میتوانند بعنوان مطالعات آتی در این مساله مورد بررسی قرار گیرند. همچنین حل این مساله با سایر الگوریتمهای فرا ابتکاری نظیر الگوریتم ژنتیک میتوان بعنوان جنبه دیگری از مطالعات آتی این مساله باشد.

جدول ۵- نتایج محاسباتی استفاده از الگوریتم فراابتکاری بهینه سازی تجمعی ذرات

نوع مسئله	تعداد مکان های کاندید(n)	تعداد مراکز سطح۲ (q)	تعداد مراکز سطح۱(p)	مقدار تابع هدف(z)	مقدار تابع هدف الگوریتم *pso*	*GAP*
الف	۱۰	۲	۳	۵	۵	۰
	۱۰	۳	۲	۷	۷	۰
	۱۰	۲	۲	۹	۹	۰
ب	۳۰	۵	۵	۱۶	۱۶	۰
	۳۰	۵	۱۰	۷	۷	۰
	۳۰	۱۲	۵	۹	۹	۰
ج	۱۰۰	۵	۵	۱۱۵	۱۲۰	۰,۰۴
	۱۰۰	۵	۱۰	۱۱۰	۱۱۳	۰,۰۳
	۱۰۰	۱۰	۱۰	۱۰۶	۱۰۸	۰,۰۲
	۱۰۰	۱۵	۱۰	۹۷	۱۰۰	۰,۰۳
	۱۰۰	۱۰	۱۵	۸۵	۸۷	۰,۰۲
د	۲۰۰	۵	۵	-	۱۴۵	-
	۲۰۰	۵	۱۰	–	۱۳۸	–
	۲۰۰	۱۰	۱۰	–	۱۳۶	–
	۲۰۰	۱۰	۱۵	–	۱۲۹	–

۸- مراجع

[1]Hakimi SL. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. Operations Research 1964;12(3):450–459

[٢]Daskin MS. Network and discrete location: models, algorithms, and applications. New York: Wiley; ١٩٩٥

[٣]Elloumi S, Labbé M, Pochet Y. A new formulation and resolution method for the p-center problem. INFORMS Journal on Computing ٢٠٠٤;١٦(١):٨٤–٩٤.

[٤]Mladenovic´, N., Brimberg, J., Hansen, P., & Moreno-Pérez, J. The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches.European Journal of Operational Research, ٢٠٠٧,:١٧٩(٣): ٩٢٧–٩٣٩.

[٥]Hansen, P., Brimberg, J., Uroševic´, D., & Mladenovic ´, N. Solving large p-median clustering problems by primal-dual variable neighborhood search.Data Mining and Knowledge Discovery,٢٠٠٩: ١٩(٣): ٣٥١–٣٧٥.

[٦]Scaparra, M. P., Pallottino, S., & Scutellà, M. G. , Large scale local search heuristics for the capacitated vertex p-center problem. Networks, 2004: 43(1): 241-255.

[7] Daskin, MS , A new approach to solving the vertexp-center problem to optimality: Algorithm and computational results. Communications of the Operations Research Society of Japan, 2000 :45(9) : 428–436.

[8] Albareda-Sambola, M., Díaz, J. A., & Fernández, E. , Lagrangean duals and exact solution to the capacitated p-center problem. European Journal of Operational Research,2010: 201(1): 71–88.

[9] Ilhan T, Pinar M. An efficient exact algorithm for the vertexp-center problem.2001 URL⟨http://www.ie.bilkent.edu.tr/mustafap/pubs/)

[10] Hatic Calic, Barbaros C. Tansel. “Double bound method for solving the p-center location problem”. Computers & Operations Research, 2014:40(1): 2991-2999.

[11] Yang K, Yankui L, Guoqing Y. Optimizing fuzzy p-hub center problem with generalized value-at-risk criterion. Appl. Math. Modelling 2014 ; 17(3): 100-113

[12] Cheng Lu C. Robust weighted vertex p-center model considering uncertain data: An application to emergency management. European Journal of Operational Research 2013. 230(2): 113-121.

[13] Dagoberto R, Orozco O, Roger Z. Improving the quality of heuristic solutions for the capacitated vertex p-center problem through iterated greedy local search with variable neighborhood descent. Computers & Operations Research 2014. 16(7): 359-371

[14] Elshaikh A, Salhi S, Nagy G. The continuousp-centre problem: An investigation into variable neighbourhood search with memory. European Journal of Operational Research 2014. 17(30): 1-16

[15] Kaveh A, Nasr H. Solving the conditional and unconditional p-center problem with modified harmony search: A real case study. Scientia Iranica 2011; 18(4): 867-877

[16] Yang k, Liu Y, Qing Yang G. Solving fuzzy p-hub center problem by genetic algorithm incorporating local search. Applied Soft Computing 2013. 13(9) : 2624–2632

[17] Serra D, ReVelle C. The pq-median problem: location and districting of hierarchical facilities II. Heuristic solution methods. Location Science , 1994: 2(2):63–82

[18] Aardal K. Reformulation of capacitated facility location problems: how redundant information can help. Annals of Operations Research 1998;82(11) :289–308

[19] Weaver JR, Church RL. The nested hierarchical median facility location model. INFOR 1991 ;29(2) :100–115.

[20] Gao L-L, Robinson Jr EP. A dual-based optimization procedure for the two-echelon uncapacitated facility location problem. Naval Research Logistics 1992;39(4):191–212

[21] Sahin G. Solution approaches for the two-level p-median problem. MS thesis, METU, Ankara, Turkey; 2002.

[22] Kennedy, J., Eberhart, R.C , Particle Swarm Optimization, Proc. of IEEE In Int. Conf. on Neural Networks,1995 :15(4): 1942-1948,.