

بررسی تولید انترופی در یک جریان لغزشی هیدرودینامیک مغناطیسی نانوسیال بر روی یک صفحه نفوذپذیر گسترش یافته

سید سجاد جعفری^{۱*}، نوید فریدونی مهر^۱

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۰۳ پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۲/۲۳	در این مقاله قانون دوم ترمودینامیک بر روی یک صفحه نفوذپذیر گسترش یافته در حضور میدان مغناطیسی عمودی یکنواخت در یک جریان لغزشی نانوسیال بررسی شده است به طوری که چهار نانوذره مس Cu ، اکسید مس CuO ، اکسید آلومینیوم Al_2O_3 و دی اکسید تیتانیوم TiO_2 و همچنین آب به عنوان سیال پایه در نظر گرفته شده‌اند. معادلات تولید انترופی، برای اولین بار در این مساله، به صورت تابعی از گرادیان‌های سرعت و دما استخراج گردید. منحنی سرعت و همچنین توزیع دما و متوسط تولید انترופی توسط روش تحلیلی آنالیز هموتوپیی به دست آمده است. با مقایسه نتایج به دست آمده و نتایج دیگر پژوهشگران مشاهده می‌شود که هم‌خوانی خوبی بین نتایج مشاهده شده است. نتایج حاصل از این مقاله، نشان می‌دهند که با کاهش پارامترهای مغناطیسی، کسر حجمی نانوذره، پارامتر مکش، عدد رینولدز، عدد برینکمن عدد هارتمن و همچنین افزایش پارامتر سرعت لغزشی، انترופی تولید شده کاهش خواهد یافت.
واژگان کلیدی: قانون دوم ترمودینامیک، جریان لغزشی، جریان هیدرودینامیک مغناطیسی، نانوسیال، روش آنالیز هموتوپیی.	

۱- مقدمه

می‌باشند. بنابراین، یک راه برای افزایش هدایت حرارتی سیالات مورد استفاده در انتقال حرارت، اضافه کردن ذرات فلزی در این سیالات می‌باشد. ایده قرار دادن ذرات فلزی کوچک در درون سیال برای افزایش قابلیت هدایت گرمایی برای اولین بار توسط ماکسول^۱ ارائه شده است. مدل قابلیت هدایت گرمایی سیال که به وسیله ماکسول ارائه شد، برای سیالاتی که محتوی ذراتی با اندازه میکرومتر و بزرگ‌تر می‌باشند، مؤثر است. اگرچه این ذرات به بهبود قابلیت هدایت گرمایی سیال کمک می‌کردند، ولی مشکلات جدی در تجهیزات انتقال حرارت ایجاد می‌کردند. به طوری که این ذرات به سرعت در سیستم ته‌نشین شده و در صورتی که کانال از قطر کمتری برخوردار باشد، مشکل جدی‌تر نیز

افزایش انتقال حرارت همیشه یکی از مسائل مهم و مورد بحث در صنعت بوده است. برای افزایش انتقال حرارت، می‌توان از تغییرات هندسه‌ی جریان، شرایط مرزی و افزایش هدایت حرارتی سیال استفاده نمود. به خاطر محدودیت‌های هندسه‌ی جریان و شرایط مرزی، بهترین گزینه برای محققان، افزایش هدایت حرارتی سیال می‌باشد. به همین علت، این روش به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. سیالات معمولی که در انتقال حرارت مورد استفاده قرار می‌گیرند، از قبیل آب، اتیلن گلیکول و روغن موتور دارای هدایت حرارتی پایینی می‌باشند. در مقابل، فلزات دارای هدایت حرارتی چند برابر این سیالات

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: sjd.jafari@iauh.ac.ir

^۱ Maxwell

۱. باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران

کردند. عباس و همکاران [۸] انتقال حرارت سیال تراکم ناپذیر ماکسول را بر روی سطوح گسترش یافته عمودی به کمک آنالیز هموتویی بررسی نمودند. در مطالعه‌ای دیگر، رشیدی و همکاران [۹] قوانین اول و دوم ترمودینامیک بر روی یک دیسک دوار در جریان ناپایای هیدرودینامیک مغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت به صورت تحلیلی با استفاده از روش آنالیز هموتویی و شبکه عصبی مصنوعی به منظور به حداقل رسانیدن آنتروپی تولید شده را مورد بررسی قرار دادند. همچنین، رشیدی و همکاران [۱۰] با استفاده از روش آنالیز هموتویی جریان نانوسیال بر روی یک صفحه گسترش یافته غیر خطی نفوذپذیر با در نظر گرفتن اثرات تزریق/مکش از سطح را مورد مطالعه قرار دادند.

در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در سال‌های اخیر، محاسبه‌ی راندمان سیستم‌های مبدل حرارتی، محدود به بررسی قانون اول ترمودینامیک بوده است. در صورتی که تحلیل مساله با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک بر پایه‌ی تولید آنتروپی بسیار قابل اعتمادتر از تحلیل مبتنی بر قانون اول ترمودینامیک می‌باشد. تولید آنتروپی وابسته به برگشت‌ناپذیری ترمودینامیکی می‌باشد که در تمام فرایندهای انتقال حرارت متداول است. منابع مختلفی مانند انتقال حرارت در حضور گرادیان دمای محدود، مشخصه انتقال حرارت همرفت، اثر ویسکوز و غیره باعث تولید آنتروپی می‌شوند. از آنجایی که تولید آنتروپی معیاری از اندازه‌گیری تخریب کار در دسترس سیستم می‌باشد، کاهش تولید آنتروپی از نتایج طراحی بهینه سیستم‌های انرژی است [۱۱]. همچنین، تولید آنتروپی منجر به کاهش خروجی مفید چرخه‌های توان و یا افزایش در توان ورودی چرخه‌های تبرید می‌شود. روش تحلیل قانون دوم ترمودینامیک به عنوان معیاری از عملکرد سیستم‌ها توسط بژان^۳ [۱۱] معرفی گردید. تولید آنتروپی کار در دسترس سیستم را از بین می‌برد. بنابراین، بررسی تولید آنتروپی ابزار

خواهد بود [۱]. با توسعه‌ی فن‌آوری نانو و ساخت ذرات در اندازه نانو، این امکان فراهم شده است که ذرات با این ابعاد را در سیال مخلوط کنیم. یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب سیالات نانو، پایداری ذرات موجود در این سیالات در تبادل حرارت می‌باشد. در نهایت اینکه هر چقدر ذرات ریزتر باشند، سطح نسبی انتقال حرارت آن‌ها نیز بیشتر می‌شود. در نتیجه، بازده‌ی حرارتی ذرات معلق که تابعی از سطوح انتقال حرارت می‌باشد، با کاهش اندازه‌ی ذرات، افزایش می‌یابد.

چوی و ایستمن^۱ اولین کسانی بودند که در آزمایشگاه ملی آرگونه در ایالات متحده، سوسپانسیون حاوی ذرات نانو در سیال پایه را نانوسیال نامیدند و افزایش فوق‌العاده در ضریب انتقال حرارت را نشان دادند [۲]. نتایج تجربی نشان‌دهنده‌ی این موضوع می‌باشد که با اضافه کردن ۱ تا ۵ درصد حجمی ذرات جرمی، رسانایی حرارتی مؤثر مخلوط تا ۲۰ درصد در مقایسه با سیال پایه، می‌تواند افزایش یابد [۳ و ۴]. این مقدار افزایش انتقال حرارت را نمی‌توان منحصرأ به قابلیت هدایت گرمایی این ذرات نانو نسبت داد. مکانیزم‌های دیگری از جمله تراکم ذرات، درصد حجمی، حرکت براونی، اندازه‌ی نانو ذرات، شکل و مساحت سطح ذره در افزایش انتقال حرارت نیز تأثیر مستقیم دارند. رشیدی و همکاران [۵] تولید آنتروپی را بر روی یک دیسک دوار متخلخل در جریان تراکم ناپذیر نانوسیال مورد بررسی قرار دادند.

روش آنالیز هموتویی، یکی از روش‌های پرکاربرد در حل معادلات غیر خطی است. این روش اولین بار توسط لیائو^۲ به عنوان روش تحلیل عمومی برای حل مسائل غیر خطی ارائه شد [۶]. امروزه محققان و پژوهشگران زیادی برای حل معادلات غیر خطی مسائل مختلف از این روش استفاده می‌کنند. مصطفی و همکاران [۷] با استفاده از روش آنالیز هموتویی و با در نظر گرفتن اثر حرکت براونی، جریان نقطه سکون نانوسیال بر روی یک صفحه گسترش یافته را بررسی

^۱ Choi & Eastman

^۲ Liao

^۳ Bejan

حضور جریان MHD بررسی کردند [۱۷]. آن‌ها رابطه‌ای برای تولید آنتروپی در دیسک دوار در سیال نیوتنی و رسانای الکتریکی به‌وسیله یک روش حل نیمه عددی-تحلیلی که در آن شدت میدان مغناطیسی ثابت است و تنها در جهت محوری اعمال می‌شود، به دست آوردند. ایوب و سائولی قانون دوم را برای تحلیل جریان ویسکوالاستیک MHD بر روی سطح گسترش یافته، بکار بردند [۱۸].

از آنجایی که تحلیل قانون دوم ترمودینامیک نسبت به تحلیل قانون اول آن بسیار قابل اعتمادتر می‌باشد، در تحقیق حاضر قانون دوم ترمودینامیک در جریان MHD پایا بر روی یک صفحه نفوذپذیر گسترش یافته در حضور جریان لغزشی، برای اولین بار بر اساس اطلاعات نویسنندگان، بر طبق معادلات بقایی حاکم در این مساله در فرم بی‌بعد به کمک روش تحلیلی آنالیز هموتوپی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، اثرات پارامترهای فیزیکی مختلف مانند پارامتر مغناطیسی، پارامتر کسر حجمی نانوذره، پارامتر مکش، پارامتر سرعت لغزشی، عدد رینولدز، عدد برینکمن عدد هارتمن بر روی منحنی‌های توزیع سرعت، توزیع دما و عدد تولید آنتروپی متوسط مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل می‌توانند برای طراحی سیستم‌های حرارتی با منابع برگشت‌ناپذیری کمتر مورد استفاده قرار گیرد.

۲- شرح مساله و معادلات حاکم

جریان آرام سیال پایای غیر قابل تراکم نانوسیال در حضور میدان مغناطیسی عمودی یکنواخت خارجی در راستای قائم بر روی یک صفحه نفوذپذیر گسترش یافته در نظر گرفته شده است. صفحه توسط دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت که در راستای x اعمال می‌شوند، گسترش می‌یابد (مرکز صفحه ثابت نگاه داشته می‌شود). سرعت گسترش صفحه به صورت $u_w(x) = ax$ فرض می‌شود. از اتلاف لزج صرف نظر می‌شود. هندسه فیزیکی و سیستم مختصات مساله در شکل ۱ آورده شده است.

و ρ_{nf} لزجت دینامیکی و چگالی نانوسیال می‌باشند که عبارت μ_{nf} توسط برینکمن [۱۹] به صورت زیر ارائه شده

مهندسی خوبی برای تمرکز بر روی مکانیزم‌های تخریب کار قابل حصول، برگشت‌ناپذیری به سبب انتقال حرارت و فرایند جریان سیال و درک مکانیزم‌های تولید آنتروپی، به وجود می‌آورد.

در سال‌های اخیر، محققین مطالعات بسیاری را در زمینه تحلیل قانون دوم ترمودینامیک بر پایه طراحی سیستم‌های مهندسی حرارتی با هدف حداقل کردن آنتروپی تولید شده، انجام داده‌اند. وسایل و فرایندهای انتقال حرارت و جریان سیال به‌طور اساسی دارای فرایندهایی برگشت‌ناپذیر هستند. کارایی تجهیزات مهندسی با وجود برگشت‌ناپذیری‌ها کاهش می‌یابد و تولید آنتروپی معیاری از مقدار برگشت‌ناپذیری‌های موجود در هر فرایند می‌باشد. آنتروپی تولیدشده‌ی بیشتر، به گسترش بیشتر برگشت‌ناپذیری‌ها منجر خواهد شد. بنابراین، تولید آنتروپی به‌عنوان یک مقیاس کمی برگشت‌ناپذیری‌های مرتبط با یک فرایند می‌تواند به کار برده شود. بعلاوه، تحلیل فوق می‌تواند به‌عنوان یک معیار برای عملکرد وسایل مهندسی مورد استفاده قرار گیرد [۱۲].

بژان در [۱۳ و ۱۴] بر روی عوامل مؤثر مختلف در تولید آنتروپی در مهندسی حرارتی کاربردی متمرکز شد. وی صورت‌های قانون دوم ترمودینامیک را برای برخی از مسائل جابجایی اجباری مختلف بیان [۱۵] و ایده عدد تولید آنتروپی و نسبت توزیع برگشت‌ناپذیری را بنا نهاد. بعد از آن، تحقیقات بسیاری برای تعیین منحنی‌های تولید آنتروپی و برگشت‌ناپذیری برای هندسه‌های مختلف، حالت‌های جریان و شرایط مرزی متفاوت صورت پذیرفت. با توجه به طبیعت غیرخطی مسائل تولید آنتروپی، کارهای تحلیلی کمی در این زمینه انجام گرفته است. ایباز روش حداقل‌سازی تولید آنتروپی را با در نظر گرفتن اتلاف ژول، علاوه بر انتقال گرما و ویسکوزیته به منظور بهینه‌سازی جریان MHD بین دو دیوار موازی بی‌نهایت با رسانایی الکتریکی محدود را بکار برد [۱۶]. در تحقیقی که بسیار شبیه به کار حاضر می‌باشد، آریکوگلو و همکاران اثر لغزش و اتلاف ژول بر تولید آنتروپی را در یک دیسک دوار در

کاربرد نداشته و شکل رابطه تغییر خواهد کرد. خواص ترموفیزیکی سیال پایه (آب) و نانوذرات مختلف در جدول ۱ آورده شده است [۲۰].

جدول ۱: خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانوذرات مختلف [۲۰]

رسانایی حرارتی $k (W/mK)$	چگالی $\rho (kg/m^3)$	گرمای ویژه در فشار ثابت $c_p (J/kgK)$	خواص فیزیکی
۰/۶۱۳	۹۹۷/۱	۴۱۷۹	فاز سیال (آب)
۴۰۰	۸۹۳۳	۳۸۵	Cu مس
۷۶/۵	۶۳۲۰	۵۳۱/۸	اکسید مس CuO
۴۰	۳۹۷۰	۷۶۵	اکسید آلومینیوم Al ₂ O ₃
۸/۹۵۳۸	۴۲۵۰	۶۸۶/۲	دی اکسید تیتانیوم TiO ₂

شرایط مرزی متناسب با مساله در حضور مکش یکنواخت از صفحه v_0 به صورت (۵) بیان می‌شود:

در رابطه‌ی (۵)، A طول لغزش به‌عنوان یک ثابت متناسب با سرعت لغزش و b یک پارامتر ثابت می‌باشند. با معرفی تابع جریان بی‌بعد $\psi(x, y)$ به صورت (۶)، معادله پیوستگی ارضا خواهد شد.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a x f'(\eta), \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -(v_f a)^{1/2} f(\eta),$$

شکل بی‌بعد مؤلفه‌های سرعت جریان و توزیع دمای معادلات بقایی (۱) تا (۳)، با استفاده از تبدیلات تشابهی و تعریف پارامتر تشابهی η به صورت زیر در می‌آیند.

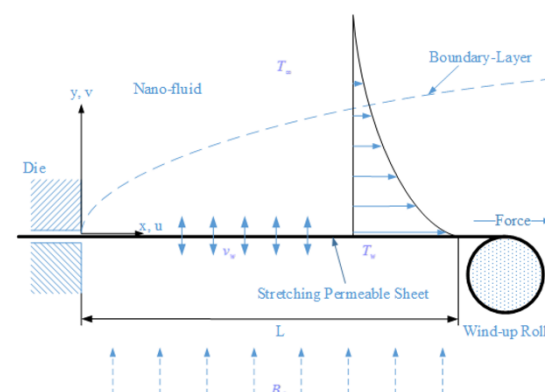
$$\eta = \left(\frac{a}{v_f} \right)^{1/2} y$$

$$\psi = \left(v_f a \right)^{1/2} x f(\eta) \quad (7)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

با استفاده از معادله‌ی (۴) و همچنین تبدیلات تشابهی معادله‌ی (۷) و جایگذاری آن‌ها در معادلات (۱) تا (۳)،

است و همچنین، رسانایی گرمایی مؤثر نانوسیال و ظرفیت حرارتی نانوسیال می‌باشند.



شکل ۱. پیکربندی جریان بر روی صفحه گسترش یافته و مختصات هندسی مساله

معادلات بقایی پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی برای جریان لایه-مرزی غیرقابل تراکم آرام MHD در یک نانوسیال به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu_{nf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B^2 u, \quad (3)$$

$$\left(\rho c_p \right)_{nf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

که در روابط فوق u و v مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y ، ضریب پخش الکتریکی، B میدان مغناطیسی یکنواخت، c_p گرمای ویژه در فشار ثابت، k رسانندگی گرمایی و T دمای سیال می‌باشند. در روابط فوق، μ_{nf} و ρ_{nf} لزجت دینامیکی و چگالی نانوسیال می‌باشند که عبارت μ_{nf} توسط برینکمن [۱۹] به صورت (۴) ارائه شده است و همچنین، رسانایی گرمایی مؤثر نانوسیال و ظرفیت حرارتی نانوسیال می‌باشند.

که در آن، μ_f لزجت کسر سیال، ϕ کسر حجمی نانوسیال، ρ_f و ρ_s به ترتیب، چگالی کسر سیال و کسر جامد می‌باشند. لازم به ذکر است که استفاده از رابطه‌ی فوق برای محاسبه‌ی k_{nf} محدود به نانو ذرات کروی شده است و برای هندسه‌های دیگر نانوسیالات رابطه‌ی فوق

سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی (۸) و (۹) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} (\rho c_p)_{nf} &= (1-\varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_s, & \rho_{nf} &= (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s, \\ \frac{k_{nf}}{k_f} &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\varphi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \varphi(k_f - k_s)}, & \mu_{nf} &= \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}}, \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} u &= u_w + A \frac{\partial u}{\partial y}, & v &= v_0, & T &= T_w(x) = T_\infty + b x, & \text{at } y &= 0, \\ u &\rightarrow 0, & T &\rightarrow T_\infty, & \text{as } y &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (۵)$$

$$\frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} f'''(\eta) + (1-\varphi + \varphi(\rho_s/\rho_f))(f(\eta)f''(\eta) - f'^2(\eta)) - M f'(\eta) = 0, \quad (۸)$$

$$\frac{k_{nf}/k_f}{1-\varphi + \varphi((\rho c_p)_s/(\rho c_p)_f)} \theta''(\eta) + Pr(f(\eta)\theta'(\eta) - f'(\eta)\theta(\eta)) = 0, \quad (۹)$$

$$\begin{aligned} f(\eta) &= f_w, & f'(\eta) &= 1 + k f''(\eta), & \theta(\eta) &= 1, & \text{at } \eta &= 0, \\ f'(\eta) &\rightarrow 0, & \theta(\eta) &\rightarrow 0, & \text{as } \eta &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\dot{S}_{gen}^m = \frac{k_{nf}}{T_\infty^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu_{nf}}{T_\infty} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{\sigma B_0^2}{T_\infty} u^2, \quad (۱۱)$$

$$\dot{S}_{gen}^m = \frac{k_{nf}}{T_\infty^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu_{nf}}{T_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma B_0^2}{T_\infty} u^2, \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} N_G &= \frac{\dot{S}_{gen}^m}{\dot{S}_0^m} = \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{1}{X^2} \theta(\eta)^2 + \frac{k_{nf}}{k_f} \text{Re}_L \theta'(\eta)^2 + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \frac{Br \text{Re}_L}{\Omega} f''(\eta)^2 + \frac{Br Ha^2}{\Omega} f'(\eta)^2, \\ &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\varphi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \varphi(k_f - k_s)} \left(\frac{1}{X^2} \theta(\eta)^2 + \text{Re}_L \theta'(\eta)^2 \right) + \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{Br \text{Re}_L}{\Omega} f''(\eta)^2 + \frac{Br Ha^2}{\Omega} f'(\eta)^2, \end{aligned} \quad (۱۳)$$

آنتروپی (۱۲) به کار برده می‌شود که در نتیجه معادله عدد تولید آنتروپی به فرم (۱۳) در می‌آید.

که در آن $Br = \frac{\mu_f u_p^2}{k_f \Delta T} = \frac{\mu_f a^2 x}{k_f b}$ عدد برینکمن،

مختصه $X = \frac{x}{L}$ عدد رینولدز، $Re_L = \frac{u_L L}{\nu_f} = \frac{a L^2}{\nu_f}$

طولی بی‌بعد، $Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}$ عدد هارتمن،

پارامتر اختلاف دمایی بی‌بعد و $\Omega = \frac{\Delta T}{T_\infty}$

نرخ مشخصه تولید آنتروپی $\dot{S}_0^m = \frac{k_f \Delta T^2}{L^2 T_\infty^2} = \frac{k_f b^2 x^2}{L^2 T_\infty^2}$

می‌باشند. عدد تولید آنتروپی متوسط معیار مهمی از تولید آنتروپی محلی می‌باشد که می‌تواند توسط رابطه (۱۴) محاسبه شود:

$$N_{G, av} = \frac{1}{V} \int_0^m \int_0^1 N_G dX d\eta, \quad (14)$$

که ∇ حجم در نظر گرفته شده، می‌باشد. به‌منظور در نظر گرفتن اثرات لایه-مرزی سرعت و دما، محاسبات تولید آنتروپی حجمی در دامنه‌ی محدود بزرگی انجام شده است. بنابراین، انتگرال‌گیری از معادله (۱۴) در بازه $0 \leq X \leq 1$ و $0 \leq \eta \leq m$ صورت می‌گیرد که در آن m عددی بزرگ در نظر گرفته می‌شود.

۳-۲- ضریب اصطکاک سطحی و عدد ناسلت

به جرات می‌توان هدف اصلی تمامی مسائل انتقال حرارت را به دست آوردن ضریب اصطکاک سطحی C_f و همچنین عدد ناسلت محلی Nu_x ، به‌عنوان دو پارامتر مهندسی مهم، دانست.

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_f U_\infty^2}, \quad (15)$$

$$Nu_x = \frac{x q_w}{k_f (T_w - T_\infty)}, \quad (16)$$

که در روابط (۱۵) و (۱۶)، $\tau_w = \mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ ضریب

اصطکاک سطحی یا تنش برشی دیواره و

در روابط (۸) و (۹)، $M = \sigma B_0^2 / a \rho_f$ پارامتر مغناطیسی و $Pr = \nu_f (\rho c_p)_f / k_f$ عدد پرائتل می‌باشند. شرایط مرزی تبدیل یافته نیز به‌صورت (۱۰) در می‌آیند.

که در آن $f_w = -v_0 / \sqrt{\nu_f a}$ پارامتر مکش و $k = A (a / \nu_f)^{1/2}$ پارامتر سرعت لغزشی می‌باشند.

۳- پارامترهای فیزیکی مهندسی

۳-۱- بررسی تولید آنتروپی

با توجه به مراجع [۱۱] و [۲۱]، نرخ حجمی تولید آنتروپی محلی در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت به‌صورت رابطه (۱۱) به دست می‌آید. با در نظر گرفتن فرضیات ساده کننده لایه‌مرزی، فرم کاهش‌یافته‌ی رابطه (۱۱) به‌صورت رابطه (۱۲) خواهد بود.

معادله‌ی (۱۲) نشان می‌دهد که عبارت تولید آنتروپی مشتمل بر سه بخش می‌باشد: بخش اول، اثرات رسانایی که متناسب با تولید آنتروپی محلی به سبب برگشت‌ناپذیری ناشی از انتقال حرارت می‌باشد. این بخش شامل تولید آنتروپی به سبب انتقال حرارت هدایت از سطح صفحه می‌باشد. بخش دوم، اثرات ویسکوز است که به سبب برگشت‌ناپذیری ناشی از اصطکاک سیال است و بخش آخر نیز دلالت بر اثرات میدان مغناطیسی دارد که به علت حرکت سیال با قابلیت هدایت الکتریکی در میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود.

جریان باقابلیت هدایت الکتریکی در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی سبب القای نیرویی به جریان سیال می‌شود، این نیرو می‌تواند سبب به حرکت درآوردن سیال شود.

عدد تولید آنتروپی که فرم بی‌بعد نرخ تولید آنتروپی است، نشان‌دهنده‌ی نسبت بین نرخ واقعی تولید آنتروپی (\dot{S}_{gen}^m) و نرخ مشخصه تولید آنتروپی است. پارامترهای تبدیل تشابه‌ی (۶-۷) به‌منظور بی‌بعد کردن معادله‌ی تولید

$$(1-q)\mathcal{L}_\theta[\hat{\theta}(\eta;q) - \theta_0(\eta)] = q\hbar\mathcal{H}_\theta(\eta)\mathcal{N}_\theta[\hat{f}(\eta;q), \hat{\theta}(\eta;q)]. \quad (26)$$

که در آن \hbar پارامتر کمکی غیر صفر است. توابع $\mathcal{H}_f(\eta)$ و $\mathcal{H}_\theta(\eta)$ برابر با $e^{-\eta}$ انتخاب می‌شوند. با i بار مشتق‌گیری از معادلات مرتبه صفر نسبت به q و تقسیم آن بر $i!$ در $q=0$ معادلات مرتبه i به صورت (۲۷) و (۲۸) به دست می‌آیند.

$$\mathcal{L}_f[f_i(\eta) - \chi_i f_{i-1}(\eta)] = \hbar\mathcal{H}_f(\eta)R_{f,i}(\eta), \quad (27)$$

$$\mathcal{L}_\theta[\theta_i(\eta) - \chi_i \theta_{i-1}(\eta)] = \hbar\mathcal{H}_\theta(\eta)R_{\theta,i}(\eta), \quad (28)$$

روابط مربوط به $R_{f,i}(\eta)$ و $R_{\theta,i}(\eta)$ در روابط (۲۹) و (۳۰) ذکر شده‌اند.

در نهایت با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\hat{f}(\eta;q) = f_0(\eta) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\eta)q^i, \quad (31)$$

$$\hat{\theta}(\eta;q) = \theta_0(\eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(\eta)q^i, \quad (32)$$

و نیز داریم که

$$\chi_i = \begin{cases} 0 & i \leq 1 \\ 1 & i > 1 \end{cases} \quad (33)$$

سیستم معادلات با شرایط مرزی مربوطه با استفاده از نرم‌افزار MATHEMATICA حل می‌شوند. مقادیر مناسب \hbar تأثیر فراوانی بر نرخ همگرایی دارد. مقادیر مناسب پارامتر مزبور از ناحیه‌ی مناسب افقی انتخاب می‌شود. شکل ۲ منحنی \hbar حل آنالیز هموتوپیی با ۲۰ مرحله را نمایش می‌دهد. مقادیر بهینه‌ی \hbar باید از ناحیه‌ی خطوط مستقیم و صاف موازی با محور افقی انتخاب شوند. به منظور دستیابی به مقدار بهینه‌ی پارامتر \hbar ، خطای باقی‌مانده متوسط به صورت (۳۴) و (۳۵) تعریف می‌شوند:

$$q_w = -k_{nf} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

شار حرارتی سطحی می‌باشد. با

جایگذاری پارامترهای مذکور در روابط (۱۵) و (۱۶) به شکل نهایی روابط فیزیکی حاکم به صورت (۱۷) و (۱۸) خواهیم رسید.

$$C_f Re_x^{1/2} = \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} f''(0), \quad (17)$$

$$Nu_x / Re_x^{1/2} = -\frac{k_{nf}}{k_f} \theta'(0), \quad (18)$$

که در آن $Re_x = \frac{u_w x}{\nu_f} = \frac{a x^2}{\nu_f}$ عدد رینولدز محلی می‌باشد.

۴- روش آنالیز هموتوپیی

در این روش تقریب‌های اولیه طوری انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی ارضا شوند (به منظور مطالعه بیشتر جزئیات روش آنالیز هموتوپیی به مراجع [۲۲، ۲۳] مراجعه شود).

$$f_0(\eta) = \left(\frac{1}{k+1} \right) (1 - e^{-\eta}) + f_w, \quad (19)$$

$$\theta_0(\eta) = e^{-\eta}, \quad (20)$$

در مرحله‌ی بعد باید اپراتورهای خطی برای هر کدام از معادلات انتخاب شوند. بهتر است این اپراتورهای خطی طوری انتخاب شوند که تقریب‌های اولیه، آن‌ها را ارضا کنند.

$$\mathcal{L}_f(f) = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_\theta(\theta) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad (22)$$

اپراتورهای غیرخطی برای تشکیل روابط آنالیز هموتوپیی به صورت روابط (۲۳) و (۲۴) تعریف می‌شوند.

معادلات تغییر شکل یافته‌ی مرتبه صفر به شکل (۲۵) و (۲۶) تبدیل می‌شوند.

$$(1-q)\mathcal{L}_f[\hat{f}(\eta;q) - f_0(\eta)] = q\hbar\mathcal{H}_f(\eta)\mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta;q), \hat{\theta}(\eta;q)], \quad (25)$$

$$\mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta; q)] = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta; q)}{\partial \eta^3} + \left(1 - \varphi + \varphi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right) \left(\hat{f}(\eta; q) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; q)}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta; q)}{\partial \eta}\right)^2 \right) - M \frac{\partial \hat{f}(\eta; q)}{\partial \eta}, \quad (23)$$

$$\mathcal{N}_\theta[\hat{f}(\eta; q), \hat{\theta}(\eta; q)] = \frac{k_{nf}/k_f}{1 - \varphi + \varphi \left(\frac{\rho c_p}{\rho c_p}\right)_s / \left(\frac{\rho c_p}{\rho c_p}\right)_f} \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta; q)}{\partial \eta^2} + Pr \left(\hat{f}(\eta; q) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta; q)}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{f}(\eta; q)}{\partial \eta} \hat{\theta}(\eta; q) \right), \quad (24)$$

$$R_{f,i}(\eta) = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{\partial^3 f_{i-1}(\eta)}{\partial \eta^3} + \left(1 - \varphi + \varphi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right) \sum_{j=0}^{i-1} \left(f_j(\eta) \frac{\partial^2 f_{i-1-j}(\eta)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f_j(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{i-1-j}(\eta)}{\partial \eta} \right) - M \frac{\partial f_{i-1}(\eta)}{\partial \eta}, \quad (29)$$

$$R_{\theta,i}(\eta) = \frac{k_{nf}/k_f}{1 - \varphi + \varphi \left(\frac{\rho c_p}{\rho c_p}\right)_s / \left(\frac{\rho c_p}{\rho c_p}\right)_f} \frac{\partial^2 \theta_{i-1}(\eta)}{\partial \eta^2} + Pr \sum_{j=0}^{i-1} \left(f_j(\eta) \frac{\partial \theta_{i-1-j}(\eta)}{\partial \eta} - \theta_j(\eta) \frac{\partial f_{i-1-j}(\eta)}{\partial \eta} \right), \quad (30)$$

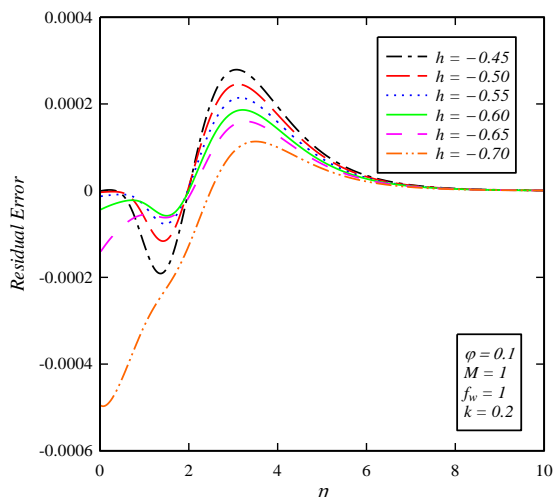
$$Res_f = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + \left(1 - \varphi + \varphi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right) \left(f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} - \left(\frac{df(\eta)}{d\eta}\right)^2 \right) - M \frac{df(\eta)}{d\eta}, \quad (34)$$

$$Res_\theta = \frac{k_{nf}/k_f}{1 - \varphi + \varphi \left(\frac{\rho c_p}{\rho c_p}\right)_s / \left(\frac{\rho c_p}{\rho c_p}\right)_f} \frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} + Pr \left(f(\eta) \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} - \frac{df(\eta)}{d\eta} \theta(\eta) \right), \quad (35)$$

۵- بحث و نتایج

معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی (۸) تا (۹) با توجه به شرایط مرزی (۱۰) به صورت تحلیلی با استفاده از روش آنالیز هموتوبی برای مقادیر مختلف پارامترهای مغناطیسی، کسر حجمی نانوذره، مکش و سرعت لغزشی حل شده است. در این بخش چهار نوع نانوذره در نظر گرفته شده است که عبارتند از: مس Cu ، اکسید مس CuO ، اکسید

به منظور دستیابی به حداکثر دقت مورد نظر در این مقاله، خطای باقی مانده متوسط حاصل از حل آنالیز هموتوبی با ۲۰ مرحله برای معادله (۳۴) در شکل ۳ ترسیم شده است. مقایسه‌ای بین برخی از نتایج حاصل در این مقاله و مقالات چاپ شده‌ی [۲۴-۲۷] در جدول ۲ انجام شده است که نتایج نشان دهنده‌ی تطابق بسیار خوبی بین نتایج به دست آمده، می‌باشد.



شکل ۳. خطای باقی مانده متوسط تابع $f(\eta)$ در معادله ۳۴

جدول ۲. مقایسه نتایج نرخ انتقال برای مقادیر مختلف عدد

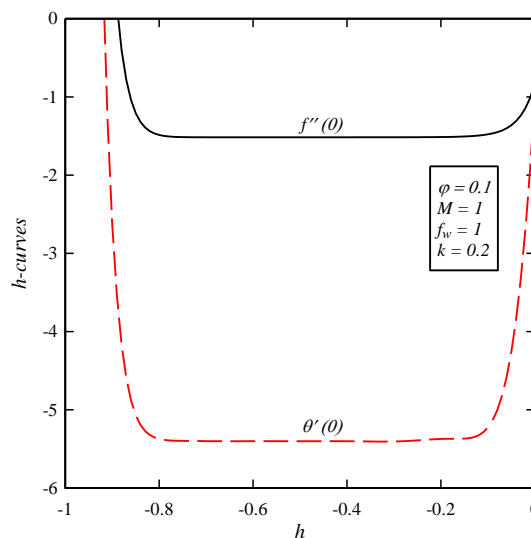
پرانتل در حالت $\varphi = M = f_w = k = 0$

عدد پرانتل	مرجع [۲۵]	مرجع [۲۶]	مرجع [۲۴]	مرجع [۲۷]	مطالعه حاضر
۰/۷۲	۸۰۵	۱۸۰۸۶	۱۸۰۸۶	۱۸۰۸۶۸	۸۰۸۶۳۱۳۵
۰/۸	۰	۰	۰	۰	۰/
۱/۰۰	۹۹۶	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰	۱	۱	۱	۱/۰
۳/۰۰	۹۱۴	۱۹۲۳۷	۱۹۲۳۷	۱۹۲۳۷	۹۲۳۶۸۲۵۹
۱/۴	۱	۱	۱	۱	۱/
۷/۰۰	۷۰۰	۱۰۷۲۳	۱۰۷۲۳	۱۰۷۲۳	۰۷۲۲۵۰۲
۳/۶	۳	۳	۳	۳	۳/۱
۱۰/۰	-	۱۷۲۰۷	۱۷۲۰۷	۱۷۲۰۷	۷۲۰۶۷۳۹۰
		۳	۳	۳	۳/

شکل ۶ و ۷ نشان دهنده تأثیر پارامتر مغناطیسی بر مؤلفه سرعت و همچنین منحنی توزیع دما می باشند. نیروی درگ مانند که نیروی لورنتز^۲ نامیده می شود، به سبب اعمال میدان مغناطیسی عمودی به سیال با قابلیت رسانایی الکتریکی به وجود می آید. این نیرو تمایل به کاهش سرعت جریان نزدیک صفحه به همراه افزایش دمای آن را دارد. بنابراین، مقدار سرعت کاهش و ضخامت لایه-مرزی حرارتی با افزایش پارامتر مغناطیسی، افزایش می یابد. لازم به ذکر است که مقاومت بزرگی بر روی ذرات سیال که موجب

آلومینیوم Al_2O_3 و دی اکسید تیتانیوم TiO_2 . آب نیز به عنوان سیال پایه در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که مس Cu در تمامی شکل ها، به جز شکل هایی که به بررسی نوع نانوذره می پردازند، به عنوان نانوذره در نظر گرفته شده است. عدد پرانتل نیز برابر با $6/2$ که نشان دهنده ی عدد پرانتل آب در دمای 20 درجه ی سانتی گراد می باشد، در نظر گرفته شده است [۲۰]. همچنین، مقدار کسر حجمی نانوذره از صفر که نشان دهنده ی سیال نیوتنی معمولی^۱ می باشد تا $0/2$ تغییر خواهد نمود.

شکل ۴ و ۵ به بررسی تأثیر کسر حجمی نانوذره بر روی منحنی سرعت و منحنی توزیع دما می پردازند. نتایج نشان می دهند که با افزایش کسر حجمی نانوذره، مقدار مؤلفه سرعت کاهش می یابد. این پدیده به این دلیل رخ می دهد که حضور نانو ذرات منجر به نازک تر شدن بیشتر ضخامت لایه-مرزی سرعت خواهد شد. از طرفی دیگر، با افزایش کسر حجمی نانوذره، رسانایی حرارتی و به تبع آن ضخامت لایه-مرزی حرارتی افزایش می یابد.

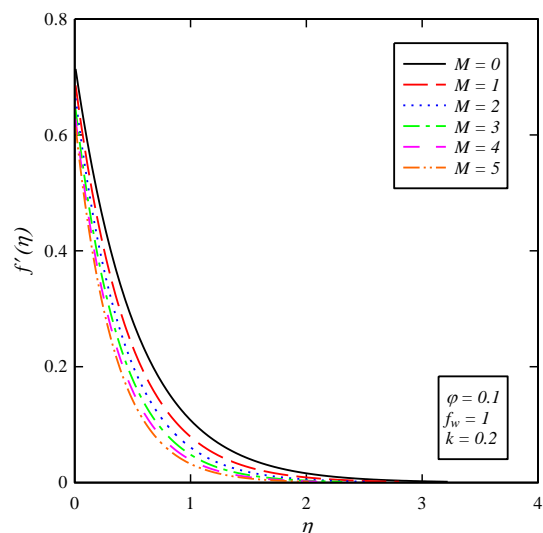


شکل ۲. منحنی \tilde{h} حل بیست مرحله ای آنالیز هموتوپیی.

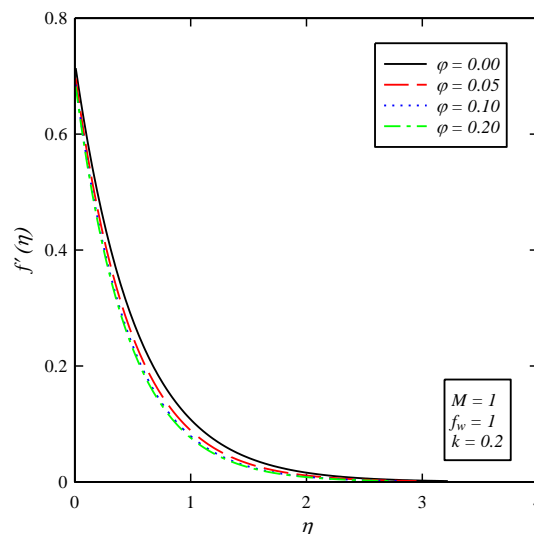
² Lorentz force

¹ Regular Newtonian fluid

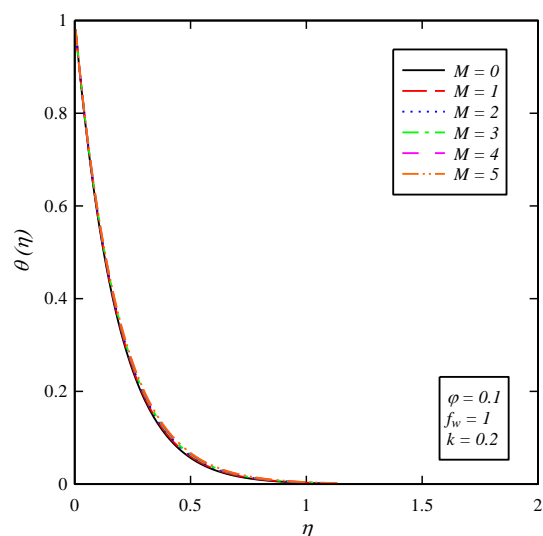
تولید گرما در سیال می‌شود، با افزایش پارامتر مغناطیسی به وجود می‌آید.



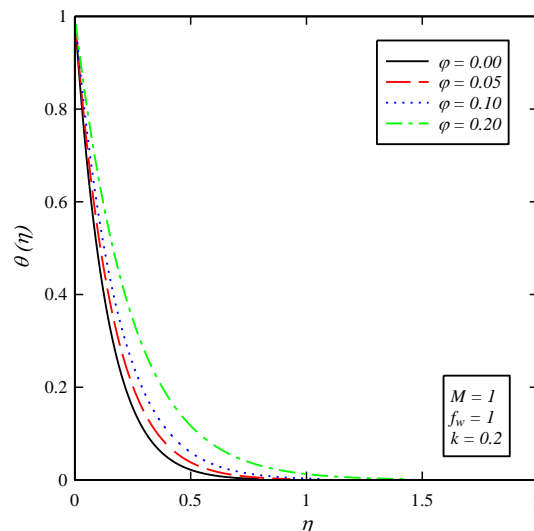
شکل ۶. تأثیر پارامتر مغناطیسی بر روی منحنی سرعت



شکل ۴. تأثیر پارامتر کسر حجمی نانوذرات بر روی منحنی سرعت



شکل ۷. تأثیر پارامتر مغناطیسی بر روی منحنی توزیع دما

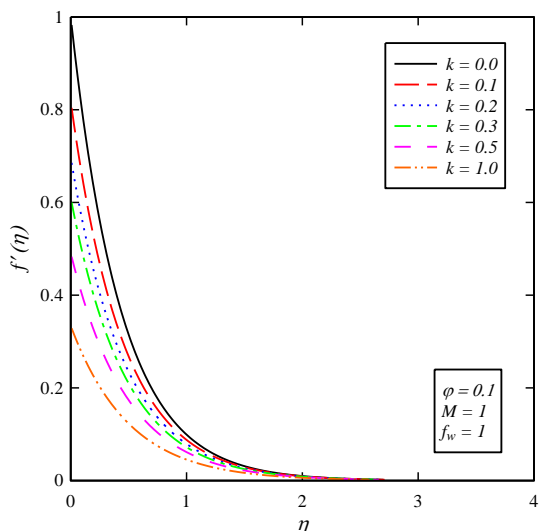


شکل ۵. تأثیر پارامتر کسر حجمی نانوذرات بر روی منحنی توزیع دما

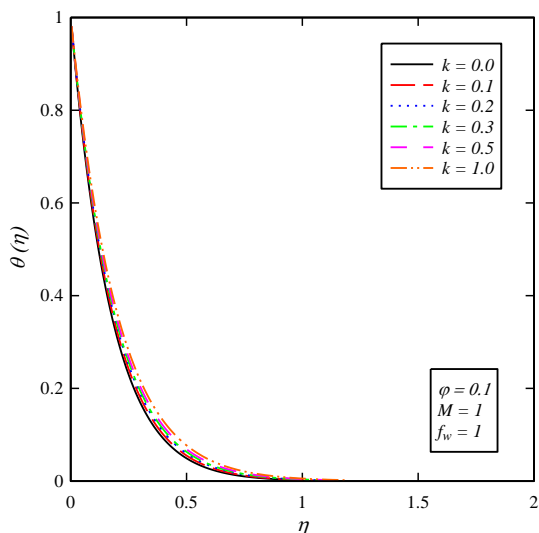
شکل ۱۰ و ۱۱ نشان‌دهنده تأثیر پارامتر سرعت لغزشی بر روی منحنی سرعت و همچنین منحنی توزیع دما می‌باشند. مشاهده می‌شود که سرعت شدیداً به مقدار پارامتر سرعت لغزشی وابسته می‌باشد و با افزایش پارامتر سرعت لغزشی، سرعت کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، مقدار کمتری از جریان در تمامی جهات سرعت در حضور جریان لغزشی، به حرکت در می‌آیند و همچنین حرارت تولید شده نزدیک سطح دیسک در شرایط لغزشی افزایش می‌یابد.

نتایج عددی ضریب اصطکاک سطحی $C_f Re_x^{1/2}$ برای بازه‌ی گسترده‌ای از کسر حجمی نانوذره و چهار نوع مختلف نانوذره در شکل ۱۲ نشان داده شده است. همان‌طور که

شکل ۸ و ۹ نشان‌دهنده تأثیر پارامتر مکش بر روی منحنی توزیع سرعت و همچنین منحنی توزیع حرارت می‌باشند. هنگامی که در سطح دیسک مکش به وجود می‌آید، منحنی سرعت کاهش می‌یابد، زیرا وقتی مقداری از سیال به خاطر مکش به داخل دیواره کشیده می‌شود، لایه-مرزی نازک‌تر خواهد شد. کاهش تدریجی در ضخامت لایه-مرزی حرارتی برای مقادیر بزرگ پارامتر مکش ایجاد می‌شود.

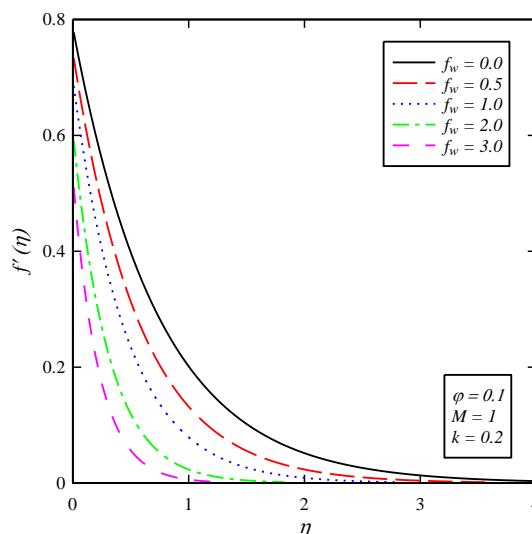


شکل ۱۰. تأثیر پارامتر سرعت لغزشی بر روی منحنی سرعت

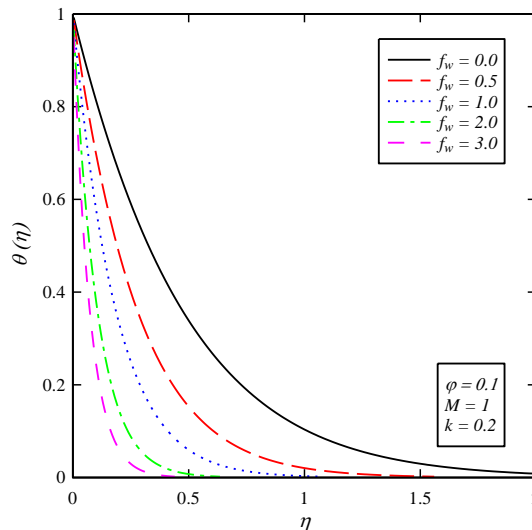


شکل ۱۱. تأثیر پارامتر سرعت لغزشی بر روی منحنی توزیع دما
 شکل‌های ۱۳ تا ۱۸ نتایج عدد تولید آنتروپی متوسط را به‌عنوان تابعی از پارامترهای مغناطیسی، مکش، سرعت لغزشی، عدد رینولدز، عدد برینکمن و عدد هارتمن برای بازه‌ی گسترده‌ای از پارامتر کسر حجمی نانوذره نشان می‌دهند. نتایج نشان‌دهنده‌ی افزایش عدد تولید آنتروپی متوسط با افزایش پارامتر مغناطیسی، پارامتر کسر حجمی نانوذره، پارامتر مکش، عدد رینولدز، عدد برینکمن عدد هارتمن و همچنین کاهش پارامتر سرعت لغزشی می‌باشند. همان‌طور که از معادله (۱۳) مشخص است، با افزایش عدد رینولدز، برگشت‌ناپذیری به سبب انتقال حرارت هدایت از

نتایج نشان می‌دهد، با افزایش کسر حجمی نانوذره، مقدار قدر مطلق ضریب اصطکاک سطحی افزایشی کاهشی خطی خواهد داشت. بیشترین ضریب اصطکاک سطحی مربوط به نانوذرات مس می‌باشد، به دلیل اینکه مس در بین نانوذرات در نظر گرفته‌شده، بالاترین چگالی را دارد. در نقطه‌ی مقابل مس، اکسید آلومینیوم قرار دارد. رفتار مشاهده‌شده در این بخش، مشابه رفتاری است که ازتپ و ابو-ندا^۱ [۲۰] و بچوک^۲ و همکاران [۲۸] گزارش کرده بودند.



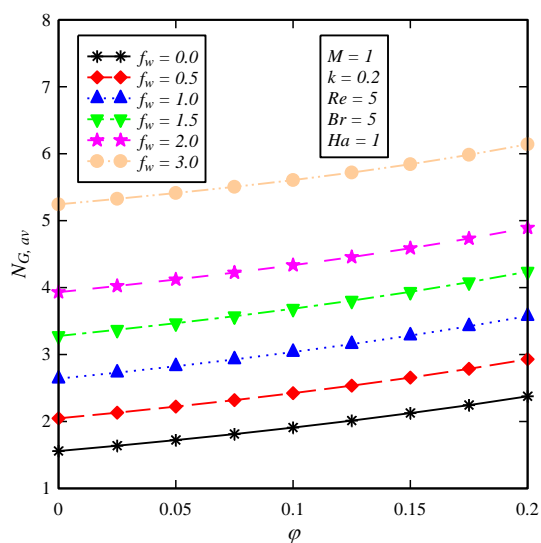
شکل ۸. تأثیر پارامتر مکش بر روی منحنی سرعت



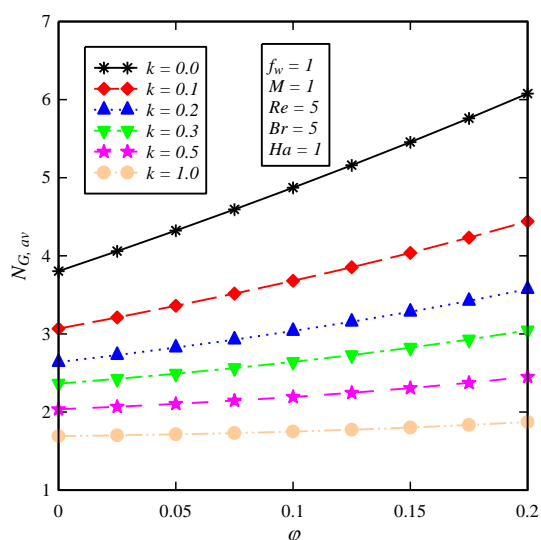
شکل ۹. تأثیر پارامتر مکش بر روی منحنی توزیع دما

² Bachok

¹ Oztop & Abu-Nada

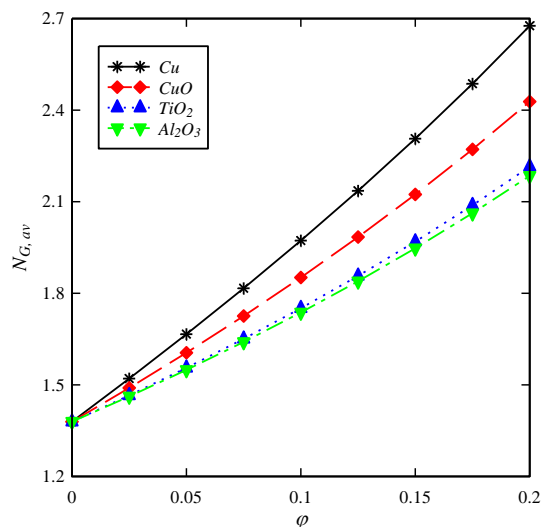


شکل ۱۴. تأثیر پارامتر مکش بر روی متوسط تولید آنتروپی برحسب کسر حجمی نانوذره

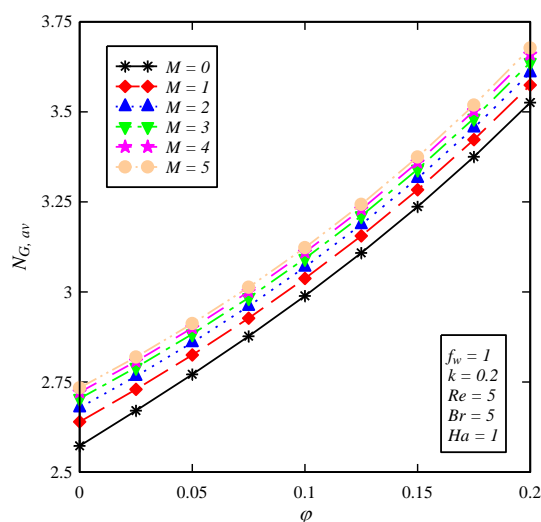


شکل ۱۵. تأثیر پارامتر سرعت لغزشی بر روی متوسط تولید آنتروپی برحسب کسر حجمی نانوذره

سطح صفحه و اصطکاک سیال و به تبع آن تولید آنتروپی متوسط افزایش می‌یابد. همچنین، مشاهده می‌شود که با افزایش عدد برینکمن، تولید آنتروپی به سبب اتلاف ژول و اصطکاک سیال افزایش می‌یابد و در آخر نیز با افزایش عدد هارتمن تولید آنتروپی به سبب اتلاف ژول و به تبع آن تولید آنتروپی متوسط افزایش می‌یابد.



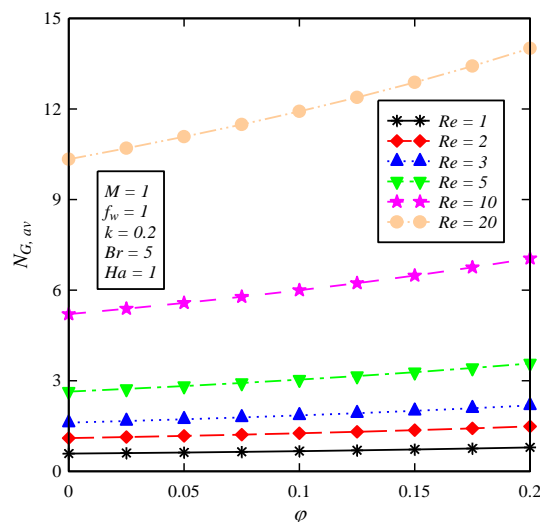
شکل ۱۲. تغییرات ضریب اصطکاک سطحی برحسب کسر حجمی نانوذره برای نانوذرات مختلف



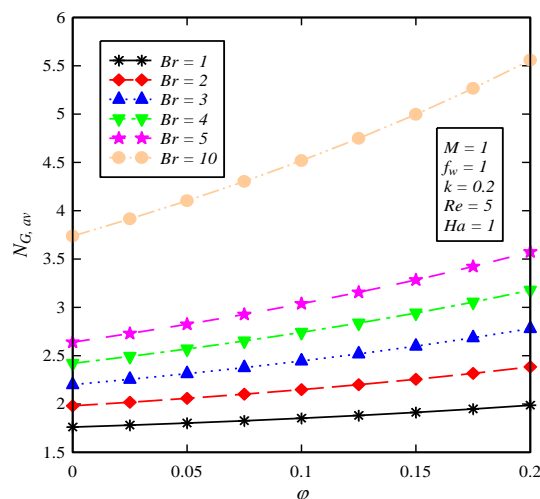
شکل ۱۳. تأثیر پارامتر مغناطیسی بر روی متوسط تولید آنتروپی برحسب کسر حجمی نانوذره

۶- نتیجه‌گیری

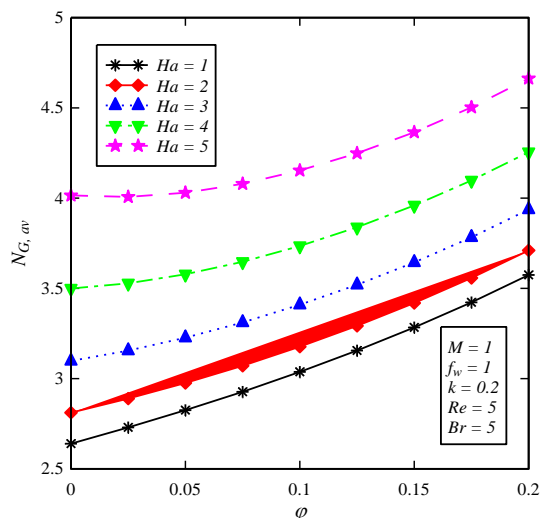
در این مقاله، روابط ریاضی به‌منظور مطالعه‌ی تولید آنتروپی در جریان MHD عبور کننده از یک دیسک دوار متخلخل با خواص فیزیکی متغیر ارائه شده است. فرم بی‌بعد معادلات بقایی حاکم در این مساله به صورت عددی به کمک روش پرتابی و رانج- کوتا حل و مطابقت مناسبی بین نتایج حاصل از این مقاله و داده‌های موجود مشاهده شده است. تأثیر پارامترهای فیزیکی مختلف در این مساله همچون اثر متقابل مغناطیسی، اختلاف دمایی، مکش و عدد پرانتل بر روی منحنی‌های توزیع سرعت در جهت‌های سه‌گانه‌ی شعاعی، مماسی و محوری و نیز توزیع دما مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، به منظور دستیابی به هدف اصلی قانون دوم ترمودینامیک که حداقل کردن آنتروپی تولید شده می‌باشد، اثرات پارامترهای فوق‌الذکر و همچنین عدد رینولدز و عدد برینکمن بر روی عدد تولید آنتروپی متوسط بررسی شده به طوری که نتایج به دست آمده نشان می‌دهند با کاهش پارامترهای اثر متقابل مغناطیسی، اختلاف دمایی، مکش و عدد برینکمن و یا افزایش عدد رینولدز، هدف اصلی قانون دوم ترمودینامیک محقق خواهد شد. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رود، در تمامی حالات مورد بررسی سطح دیسک به‌عنوان منبع بزرگی از برگشت‌ناپذیری عمل خواهد کرد.



شکل ۱۶. تأثیر عدد رینولدز بر روی متوسط تولید آنتروپی بر حسب کسر حجمی نانوذره



شکل ۱۷. تأثیر عدد برینکمن بر روی متوسط تولید آنتروپی بر حسب کسر حجمی نانوذره



شکل ۱۸. تأثیر عدد هارتمن بر روی متوسط تولید آنتروپی بر حسب کسر حجمی نانوذره

۷- مراجع

- [1] Zhou, D.W., (2004). "Heat transfer enhancement of copper nanofluid with acoustic cavitation". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 3109-3117.
- [2] Choi, S.U.S., Eastman J.A., (1995). "Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles". *Materials Science*, Vol. 231, pp. 99-105.
- [3] Eastman, J.A., Choi U.S., Li S., Soyez G., Thompson L.J., DiMelfi R.J., (1999). "Novel thermal properties of nanostructured materials". *Materials Science Forum*, Vol. 312-314, pp. 629-634.
- [4] Xuan, Y., Roetzel W., (2000). "Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3701-3707.
- [5] Rashidi, M.M., Abelman S., Freidoonimehr N., (2013). "Entropy generation in steady MHD flow due to a rotating porous disk in a nanofluid". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 62, pp. 515-525.
- [6] Liao, S.J., *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*. 2004: Chapman & Hall/CRC.
- [7] Mustafa, M., Hayat T., Pop I., Asghar S., Obaidat S., (2011). "Stagnation-point flow of a nanofluid towards a stretching sheet". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, pp. 5588-5594.
- [8] Abbas, Z., Wang Y., Hayat T., Oberlack M., (2010). "Mixed convection in the stagnation-point flow of a Maxwell fluid towards a vertical stretching surface". *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, pp. 3218-3228.
- [9] Rashidi, M.M., Ali M., Freidoonimehr N., Nazari F., (2013). "Parametric analysis and optimization of entropy generation in unsteady MHD flow over a stretching rotating disk using artificial neural network and particle swarm optimization algorithm". *Energy*, Vol. 55, pp. 497-510.
- [10] Rashidi, M.M., Freidoonimehr N., Hosseini A., Bég O.A., Hung T.K., (2014). "Homotopy simulation of nanofluid dynamics from a non-linearly stretching isothermal permeable sheet with transpiration". *Meccanica*, Vol. 49, pp. 469-482.
- [11] Bejan, A., (1980). "Second law analysis in heat transfer". *Energy*, Vol. 5, pp. 720-732.
- [12] Çengel, Y.A., Boles M.A., *Thermodynamics: an engineering approach*. 2006: McGraw-Hill Higher Education.
- [13] Bejan, A., *Second-Law Analysis in Heat Transfer and Thermal Design*, in *Advances in Heat Transfer*, P.H. James, F.I. Thomas, Editors. 1982, Elsevier. p. 1.ΔA-
- [14] Bejan, A., *Entropy generation minimization: the method of thermodynamic optimization of finite-size systems and finite-time processes*. 1996: CRC Press.
- [15] Bejan, A., (1979). "A Study of Entropy Generation in Fundamental Convective Heat Transfer". *Journal of Heat Transfer*, Vol. 101, pp. 718-725.
- [16] Ibáñez, G., Cuevas S., López de Haro M., (2006). "Optimization of a magnetohydrodynamic flow based on the entropy generation minimization method". *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 295-301.
- [17] Arikoglu, A., Ozkol I., Komurgoz G., (2008). "Effect of slip on entropy generation in a single rotating disk in MHD flow". *Applied Energy*, Vol. 85, pp. 1225-1236.
- [18] Aïboud, S., Saouli S., (2010). "Second Law Analysis of Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet Subject to a Transverse Magnetic Field with Heat and Mass Transfer". *Entropy*, Vol. 12, pp. 1867-1884.
- [19] Brinkman, H.C., (1952). "The viscosity of concentrated suspensions and solutions". *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 20, pp. 571-571.
- [20] Oztop, H.F., Abu-Nada E., (2008). "Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 29, pp. 1326-1336.

- [21] Aïboud ,S., Saouli S., (2010). "Entropy analysis for viscoelastic magnetohydrodynamic flow over a stretching surface". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, pp. 482-489.
- [22] Liao, S.J., (2004). "On the homotopy analysis method for nonlinear problems". *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 147, pp. 499-513.
- [23] Liao, S., (2004). "On the homotopy analysis method for nonlinear problems". *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 147, pp. 499-513.
- [24] Ali, M.E., (1994). "Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface". *Wärme - und Stoffübertragung*, Vol. 29, pp. 227-234.
- [25] Ishak, A., Nazar R., Pop I., (2009). "Boundary layer flow and heat transfer over an unsteady stretching vertical surface". *Meccanica*, Vol. 44, pp. 369-375.
- [26] Grubka, L.J., Bobba K.M., (1985). "Heat Transfer Characteristics of a Continuous, Stretching Surface With Variable Temperature". *Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 248-250.
- [27] Mahdy, A., (2012). "Unsteady mixed convection boundary layer flow and heat transfer of nanofluids due to stretching sheet". *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 249, pp. 248-255.
- [28] Bachok, N., Ishak A., Pop I., (2012). "Flow and heat transfer characteristics on a moving plate in a nanofluid". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, pp. 642-648.