حل دقیق برای معادلات فرکانسی ارتعاشات آزاد شعاعی و عرضی یک ورق دایره‌ای با شرایط مرزی مختلف

محمد حیدری‌رارانی[۱، *]، شهرام حسینی‌چالشتری[۲]، کیوان ترابی[۳]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۴/۲۱
پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۸/۱۷

واژگان کلیدی:
ارتعاشات شعاعی،
ارتعاشات عرضی،
ورق دایروی،
حل دقیق.

چکیده

در این تحقیق، معادله‌های فرکانسی ارتعاشات آزاد شعاعی و عرضی یک ورق دایره‌ای با سه نوع تکیه‌گاه آزاد، ساده و گیردار به صورت حل دقیق بسته استخراج شده است. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر ارتعاشات شعاعی و عرضی ورق دایره‌ای از اصل همیلتون استفاده شده است. در حالت ارتعاشات شعاعی، دو معادله دیفرانسیل وابسته به هم حاصل می‌شود که با استفاده از روش تجزیه هلمهولتز، آن دو معادله دیفرانسیل از یکدیگر مستقل می‌شوند و سپس با روش جداسازی متغیرها به صورت تحلیلی قابل حل خواهند بود. در حالت ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای، معادلات حاکم نیز با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل شده و یک رابطه دقیق بسته برای معادله فرکانسی به ازای هر شرط مرزی به دست می‌آید. در نهایت فرکانس‌های طبیعی حاصل از معادله‌های فرکانسی به دست آمده با نتایج المان محدود مقایسه گردیده است.

۱- مقدمه

مطالعه‌ی ارتعاشات ورق دایره‌ای به دلیل کاربرد زیاد آن در صنایع مختلف از جمله چرخش دیسک‌های دوار بسیار قابل توجه است. به همین دلیل برای طراحی سازه‌های مختلف باید فرکانس‌های طبیعی آنها در اختیار طراح باشد. تئوری‌های مختلفی برای تحلیل ارتعاشات ورق‌ها مطرح شده است. همچنین مطالعات زیادی در زمینه ارتعاشات عرضی و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات عرضی انجام شده است [۱]. ووا [۲] مطالعاتی بر روی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای با تنش اولیه‌ی بزرگ در حالت تکیه‌گاه کلی داشته است. جمعه‌زاده و سعیدی [۳] حل دقیق ارتعاشات آزاد ورق قطاعی همسانگرد را بر مبنای تئوری ورق میندلین بررسی کرده‌اند. فرگ و پن [۴ و ۵] پاسخ نیروی ورق مستطیلی محدود به تحریک نیروی متمرکز صفحه‌ای را بررسی کرده‌اند. باردل و همکاران [۶] ارتعاشات ورق مستطیلی همسانگرد با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش رایلی-ریتز را مطالعه کرده‌اند. ریزی و دویل [۷] روش طیفی را برای حل انتشار موج دو بعدی در محیط‌های نیمه متناهی و متناهی ارائه کردند. لو [۸] ارتعاشات کششی ورق دایره‌ای نازک همسانگرد نامحدود با لبه‌های آزاد را تحلیل کرده است. حسینی و همکاران [۹] حل دقیق ارتعاشات آزاد ورق ضخیم دایروی با استفاده از تئوری ورق ردی را بررسی کرده‌اند. بیسادی و همکاران [۱۰] ارتعاشات عرضی ورق حلقوی را با استفاده از تئوری

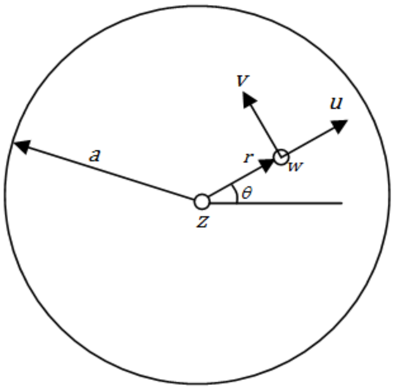
*. پست الکترونیک نویسنده مسئول: m.heidarirarani@eng.ui.ac.ir
۱. استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان
۳. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

ورق ردی مطالعه کرده‌اند. مک جی و همکاران [۱۱] تاثیر تنش مرزی بر روی ارتعاشات ورق قطاعی با لبه‌های شعاعی دلخواه را مورد بررسی قرار داده‌اند. چن و لیو ارتعاشات صفحه‌ای آزاد ورق نازک با شکل‌های مختلف و لبه‌های آزاد، شامل ورق دایره‌ای را بررسی کردند [۱۲]. ژو و همکاران [۱۳] ارتعاشات ورق نازک دایروی و حلقوی را با روش همیلتون مورد مطالعه قرار داده‌اند. بایر و ایدل [۱۴] ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای با ضخامت ثابت و شرایط مرزی مختلف را تحلیل کرده‌اند. حسینی و همکاران [۱۵] ارتعاشات عرضی ورق دایروی لایه‌ای ضخیم با هسته‌ی صلب را به صورت دقیق به دست آورده‌اند. همچنین حسینی و همکاران [۱۶] معادله فرکانسی دقیق ورق دایروی ضخیم با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم را محاسبه کرده‌اند. لی و یوان [۱۷] ارتعاشات آزاد ورق نازک گیردار را با استفاده از روش گرین مطالعه کرده‌اند. شریعت و همکاران [۱۸] تنوع ضخامت و ناهمگنی ماده بر روی ارتعاشات آزاد ورق دایروی را مورد بررسی قرار داده‌اند. هاشمی‌نژاد و همکاران [۱۹] حل نیمه تحلیلی ارتعاشات آزاد صفحه‌ای ورق بیضوی حلقوی هم کانون در بستر الاستیک را محاسبه کرده‌اند. در زمینه ارتعاشات ورق‌های ناهمسانگرد از جنس مواد تابعی مدرج نیز تحقیقاتی صورت گرفته است. شبان و علی‌پور [۲۰] حل نیمه تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. چاکراورتی و پراهان [۲۱] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی FGM در محیط گرمایی با شرایط مرزی کلی را تحلیل کرده‌اند. علی‌پور و شریعت [۲۲] ارتعاشات ورق FGM حلقوی روی بستر الاستیک را به روش تیلور و به صورت تحلیلی بررسی کرده‌اند.

در اکثر مطالعات انجام شده، ارتعاشات عرضی ورق‌ها با شرایط مرزی متفاوت بررسی شده است. در حالیکه ارتعاشات شعاعی ورق دایروی با شرایط مرزی مختلف به صورت حل بسته دقیق مورد مطالعه قرار نگرفته است. لذا در این مقاله ابتدا معادلات حاکم برای ارتعاشات شعاعی و عرضی ورق دایره‌ای استخراج و سپس یک رابطه بسته دقیق برای معادله فرکانسی هر نوع ارتعاش با شرایط مرزی آزاد، تکیه‌گاه ساده، گیردار استخراج شده است.

۲- بیان مساله و استخراج مدل ریاضی

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد شعاعی و عرضی ورق دایره‌ای با شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. شکل ۱ ورق دایره‌ای در سیستم مختصات قطبی را نشان می‌دهد. u و v و w به ترتیب جابجایی در راستاهای شعاعی، زاویه‌ای و عمودی هستند.



شکل ۱- ورق دایره‌ای در مختصات قطبی

۲-۱- ارتعاشات آزاد شعاعی ورق دایره‌ای

۲-۱-۱- معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد شعاعی ورق دایره‌ای

روابط کرنش- جابجایی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{۱}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \tag{۲}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \tag{۳}$$

بردار جابجایی $\vec{u}$ به صورت زیر است.

$$\vec{u} = ue_r + ve_\theta + we_z \tag{۴}$$

با قرار دادن روابط (۱) تا (۳) در قانون هوک داریم:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_r + \upsilon\varepsilon_\theta\right) = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\upsilon}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\upsilon u}{r}\right) \tag{۵}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_\theta + \upsilon\varepsilon_r\right) = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (۶)$$

$$\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} = G\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right) \quad (۷)$$

که E و υ به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون هستند. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برای رفتار تنش صفحه‌ای برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) hrdrd\theta \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \left(\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}\right) h\, r\, drd\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \left[\frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\upsilon}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\upsilon u}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right. \\ &+ \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) \\ &\left. + G\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right)^2\right] h\, r\, drd\theta \end{aligned} \quad (۹)$$

پس از استفاده از اصل همیلتون و تئوری حساب تغییرات، معادلات سیستم برای ارتعاشات شعاعی یک ورق دایروی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\upsilon}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta}\right. \\ &\left. - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2}\right) \\ &+ G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\ &+ G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

۲-۱-۲- روش حل

معادلات حاکم (۱۰) و (۱۱) به یکدیگر وابسته می‌باشند و با روش‌های تحلیلی موجود به سادگی قابل حل نیستند. لذا از یک روش جدید برای حذف وابستگی آنها به نام تجزیه هلمهولتز به صورت زیر استفاده می‌شود [۲۳ و ۲۴].

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla}\times\vec{H} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در معادلات فوق، Φ و H پتانسیل‌های برداری و اسکالر هستند. بنابراین مولفه‌های بردار جابجایی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (۱۳)$$

$$v = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (۱۴)$$

با جای‌گذاری معادلات (۱۳) و (۱۴) در معادلات (۱۰) و (۱۱) چهار معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial r}e_r &= E^*\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)e_r \end{aligned} \quad (۱۵)$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial \ddot{H}_z}{r\partial \theta}e_r &= G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 H_z}{\partial r^2\partial \theta} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 H_z}{\partial \theta^3}\right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial r\ \theta}\right)e_r \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial \ddot{\Phi}}{r\partial \theta}e_\theta &= E^*\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\partial \theta}\right. \\ &\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2\ \theta}\right)e_\theta \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial \ddot{H}_z}{\partial r}e_\theta &= G\left(\frac{\partial^3 H_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 H_z}{\partial r\partial \theta^2}\right. \\ &\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)e_\theta \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که در روابط فوق، $E^* = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}$ است. با ترکیب معادلات (۱۵) تا (۱۸)، معادلات زیر که بر حسب متغیرهای Φ و H_z هستند به‌دست می‌آیند.

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c_1^2}\ddot{\Phi} \quad (۱۹)$$

$$\nabla^2 H_z = \frac{1}{c_2^2} \ddot{H}_z \quad (۲۰)$$

که در معادلات فوق $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\upsilon^2)}$ و $c_2^2 = \frac{G}{\rho}$ هستند.

غالبا مسائل ارتعاشات دارای رفتار هارمونیک می‌باشند. از این جهت با توجه به خطی بودن معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق دایروی، تابع زمانی آن به صورت $\Phi = \hat{\Phi} e^{i\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + k_p^2 \hat{\Phi} = 0 \quad (۲۱)$$

در معادله ۲۱، $k_p = \omega/c_1$ می‌باشد.

معادله فوق با روش جداسازی متغیرها حل می‌شود.

$$\hat{\Phi} = X(r)\Theta(\theta) \quad (۲۲)$$

با قرار دادن معادله (۲۲) در معادله دینامیکی می‌توان معادلات دیفرانسیل معمولی را برحسب جابجایی شعاعی و محیطی بدست آورد.

$$X''\Theta + \frac{1}{r}X'\Theta + \frac{1}{r^2}X\,\Theta'' + k_p^2 X\,\Theta = 0$$
$$\Rightarrow r^2 \frac{X''}{X} + r\frac{X'}{X} + k_p^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = k^2 \quad (۲۳)$$

معادله (۲۳) نشان دهنده دو معادله دیفرانسیل بر حسب X و Θ است. با حل دو معادله و اعمال شرط مرزی دایره و با توجه به جواب مساله در صفحه اصلی ریمان، به علت هارمونیک بودن تابع Θ در دوره تناوب $T = 2\pi$ باید روابط زیر در نظر گرفته شود.

$$\Theta(\theta) = \sin(k\theta), \cos(k\theta) \quad (۲۴)$$

$$X(r) = C\,J_n(k_p r) \quad (۲۵)$$

با روشی مشابه، برای حل معادله (۲۰)، جوابی به فرم $H_z = \hat{H}_z e^{i\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین معادله (۲۰) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$\nabla^2 \hat{H}_z + k_s^2 \hat{H}_z = 0 \quad (۲۶)$$

که در معادله ۲۶، $k_s = \omega/c_2$.

همچنین در اینجا با استفاده از جداسازی متغیرها به دست می‌آید:

$$\hat{H}_z = Y(r)\Omega(\theta) \quad (۲۷)$$

و در نهایت $\Omega(\theta)$ و $Y(r)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\Omega(\theta) = \sin(k\theta), \cos(k\theta) \quad (۲۸)$$

$$Y(r) = D\,J_n(k_s r) \quad (۲۹)$$

حال با توجه به معادلات (۲۴) و (۲۵) و همچنین (۲۸) و (۲۹)، متغیرهای $\hat{\Phi}$ و $\hat{H}_z$ به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\hat{\Phi} = A\,J_n(k_p r)\cos(n\theta) \quad (۳۰)$$

$$\hat{H}_z = B\,J_n(k_s r)\sin(n\theta) \quad (۳۱)$$

با در نظر گرفتن $u = \hat{u} e^{i\omega t}$ و $v = \hat{v} e^{i\omega t}$ داریم:

$$\begin{vmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dJ_n(k_p r)}{dr}\cos(n\theta) & \frac{n}{r}J_n(k_s r)\cos(n\theta) \\ -\frac{n}{r}J_n(k_p r)\sin(n\theta) & \frac{dJ_n(k_s r)}{dr}\sin(n\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

در حالتی که ورق دایره‌ای در حالت گیردار باشد، شرایط مرزی آن در لبه دایره به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u\big|_{r=a} = 0,\; v\big|_{r=a} = 0 \quad (۳۳)$$

با اعمال شرط مرزی فوق در معادله (۳۲)، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر گردد. بنابراین معادله فرکانسی ارتعاشات شعاعی ورق دایره‌ای در حالت تکیه‌گاه گیردار به صورت زیر است.

$$\frac{dJ_n(k_p a)}{dr}\frac{dJ_n(k_s a)}{dr} - \frac{n^2}{a^2}J_n(k_p a)J_n(k_s a) = 0 \quad (۳۴)$$

در حالتی که ورق دایره‌ای در حالت تکیه‌گاه آزاد باشد، شرایط مرزی آن در حرکت صفحه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right)\right|_{r=a} = 0$$
$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=a} = 0 \quad (۳۵)$$

با اعمال شرایط مرزی در این حالت در معادله (۳۲) روابط ماتریس ضرایب شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \theta}+u \\ \frac{\partial u}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-\frac{n^2}{r}J_n(k_p r)+ & [n\frac{d\,J_n(k_s r)}{d\,r}+ \\ \frac{d\,J_n(k_p r)}{d\,r}] & \frac{n}{r}J_n(k_s r)] \\ k_p\frac{d^2 J_n(k_p r)}{d\,r^2} & [-\frac{n}{r^2}J_n(k_s r)+ \\ & \frac{n\,k_s}{r}\frac{d\,J_n(k_s r)]}{d\,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad (۳۶)$$

با قرار دادن ماتریس ضرایب برابر با صفر، معادله فرکانسی ارتعاشات شعاعی ورق دایره‌ای در حالت تکیه‌گاه آزاد به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &(-\frac{n^2}{r}J_n(k_p r)+\frac{d\,J_n(k_p r)}{d\,r}) \\ &\times(-\frac{n}{r^2}J_n(k_s r)+\frac{n}{r}\frac{d\,J_n(k_s r)}{d\,r}) \\ &-(n\frac{d\,J_n(k_s r)}{d\,r}+\frac{n}{r}J_n(k_s r)) \\ &\times(\frac{d^2 J_n(k_p r)}{d\,r^2})=0 \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

۲-۲- ارتعاشات آزاد عرضی ورق دایره‌ای

معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای به صورت زیر بیان می‌شود [۲۵ و ۲۶].

$$D\nabla^4 w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (۳۸)$$

با فرض جابجایی عرضی به صورت زیر، ترم زمان از معادله (۳۸) حذف می‌شود.

$$w(r,\theta,t)=W(r,\theta)e^{i\omega t} \qquad (۳۹)$$

با جایگذاری معادله (۳۹) در معادله (۳۸)، داریم:

$$(\nabla^4-\beta^4)W=0 \qquad (۴۰)$$

که $\beta^4=\frac{\rho h\omega^2}{D}$ است. معادله (۴۰) را می‌توان به صورت دو معادله دیفرانسیل خطی زیر تجزیه کرد.

$$\left(\nabla^2+\beta^2\right)W_1=0 \qquad (۴۱)$$

$$\left(\nabla^2-\beta^2\right)W_2=0 \qquad (۴۲)$$

که $W=W_1+W_2$. با استفاده از روش جداسازی متغیرها در معادله (۴۱) به صورت $W_1(r,\theta)=R_1(r)\Theta_1(\theta)$، داریم:

$$\frac{d^2\Theta_1}{d\theta^2}+k^2\Theta_1=0 \qquad (۴۳)$$

$$\frac{d^2R_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr}+\left(\beta^2-\frac{k^2}{r^2}\right)R_1=0 \qquad (۴۴)$$

با حل معادلات (۴۳) و (۴۴)، پاسخ W_1 محاسبه می‌شود. با روشی مشابه، W_2 نیز محاسبه شده و جواب کلی معادله دیفرانسیل به شکل معادله زیر بدست می آید.

$$W(r,\theta)=\left[A\,J_n(\beta r)+B\,I_n(\beta r)\right]\cos(n\theta) \qquad (۴۵)$$

شرایط مرزی گیردار برای ارتعاشات عرضی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} &W(a,\theta)=0 \\ &\frac{\partial W}{\partial r}(a,\theta)=0 \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

با جایگزینی معادلات (۴۶) در (۴۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n(\beta r) & I_n(\beta r) \\ \frac{dJ_n(\beta r)}{d\,r} & \frac{dI_n(\beta r)}{d\,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad (۴۷)$$

اگر ماتریس ضرایب در معادله (۴۷) را برابر با صفر قرار دهیم، معادله فرکانسی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} &\left[J_n(\beta r)\times\frac{dI_n(\beta r)}{d\,r}\right] \\ &-\left[I_n(\beta r)\times\frac{dJ_n(\beta r)}{d\,r}\right]=0 \end{aligned} \qquad (۴۸)$$

در حالت تکیه‌گاه ساده در ارتعاشات عرضی، شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$W(a,\theta)=0$$
$$M_r(a,\theta)=w_{,rr}+\frac{\upsilon}{r}w_{,r}+\frac{\upsilon}{r^2}w_{,\theta\theta}=0 \qquad (۴۹)$$

که در رابطه فوق، M_r نشان دهنده گشتاور خمشی است. با جایگذاری شرایط مرزی (۴۹) در معادله (۴۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} W \\ M_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_n(\beta r) & I_n(\beta r) \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2} \\ +\dfrac{\upsilon}{r}\dfrac{d\,J_n(\beta r)}{dr} \\ -\dfrac{\upsilon n^2}{r^2}J_n(\beta r)\end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2I_n(\beta r)}{dr^2} \\ +\dfrac{\upsilon}{r}\dfrac{d\,I_n(\beta r)}{dr} \\ -\dfrac{\upsilon n^2}{r^2}I_n(\beta r)\end{array}\right\} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب در معادله (۵۰)، معادله فرکانسی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$J_n(\beta r)\left[\frac{d^2I_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{\upsilon}{r}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}-\frac{\upsilon n^2}{r^2}I_n(\beta r)\right]-I_n(\beta r)\left[\frac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{\upsilon}{r}\frac{d\,J_n(\beta r)}{dr}-\frac{\upsilon n^2}{r^2}J_n(\beta r)\right]=0 \qquad (۵۱)$$

در حالت تکیه‌گاه آزاد در ارتعاشات عرضی، شرایط مرزی به شکل زیر هستند.

$$M_r(a,\theta)=0$$
$$V(a,\theta)=w_{,rrr}+\frac{1}{r}w_{,rr}+\frac{1}{r^2}w_{,r}+\frac{(2-\upsilon)}{r}w_{,r\theta\theta}-\frac{(3-\upsilon)}{r^3}w_{,\theta\theta}=0 \qquad (۵۲)$$

در روابط بالا، V نشان دهنده نیروی برشی در ورق است. با اعمال شرایط مرزی (۵۲) در معادله (۴۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} M_r \\ V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$C_1=\frac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{\upsilon}{r}\frac{d\,J_n(\beta r)}{dr}-\frac{\upsilon n^2}{r^2}J_n(\beta r)$$

$$C_2=\frac{d^2I_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{\upsilon}{r}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}-\frac{\upsilon n^2}{r^2}I_n(\beta r)$$

$$C_3=\frac{d^3J_n(\beta r)}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}-\frac{n^2(2-\upsilon)}{r}\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}+\frac{n^2(3-\upsilon)}{r^3}J_n(\beta r)$$

$$C_4=\frac{d^3I_n(\beta r)}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2I_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}-\frac{n^2(2-\upsilon)}{r}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}+\frac{n^2(3-\upsilon)}{r^3}I_n(\beta r) \qquad (۵۳)$$

با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله فرکانسی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای در حالت تکیه‌گاه آزاد به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{\upsilon}{r}\frac{d\,J_n(\beta r)}{dr}-\frac{\upsilon n^2}{r^2}J_n(\beta r)\right]\times\left[\frac{d^3I_n(\beta r)}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2I_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}-\frac{n^2(2-\upsilon)}{r}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}+\frac{n^2(3-\upsilon)}{r^3}I_n(\beta r)\right]-\left[\frac{d^2I_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{\upsilon}{r}\frac{d\,I_n(\beta r)}{dr}-\frac{\upsilon n^2}{r^2}I_n(\beta r)\right]\times\left[\frac{d^3J_n(\beta r)}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}-\frac{n^2(2-\upsilon)}{r}\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}+\frac{n^2(3-\upsilon)}{r^3}J_n(\beta r)\right]=0 \qquad (۵۴)$$

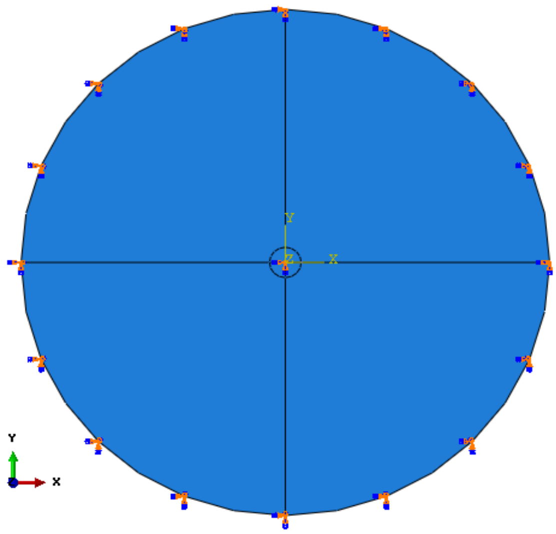
۳- مدلسازی المان محدود

در این تحقیق، یک ورق دایره‌ای به شعاع ۰/۵ متر و ضخامت 5 mm از جنس آلومینیوم با خواص مکانیکی شامل مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب پواسون به ترتیب برابر با ۷۱ GPa ، ۲۷۰۰ kg/m^3 و ۰/۳۳ مدلسازی شده است. در بررسی ارتعاشات آزاد شعاعی، به دلیل اینکه

ارتعاش در داخل صفحه قرار دارد، از المان CPS4R چهار گرهی، که بتواند حرکت داخل صفحه را مدل کند استفاده شده است. اما برای ارتعاشات عرضی از المان پوسته S4R چهارگرهی، که قابلیت مدلسازی حرکت خارج صفحه را دارد استفاده شده‌است. در همه تحلیل‌ها، ۱۵۳۸۸ المان ساختار یافته استفاده شده‌است.

تحلیل‌ها نشان می‌دهند که دقت نتایج شبیه‌سازی با استفاده از المان مربعی، نسبت به المان مثلثی بیشتر است. المان مربعی به دلیل داشتن تعداد گره بیشتر در یک المان، شبیه سازی با دقت بیشتری نسبت به المان مثلثی انجام می‌دهد. به همین دلیل در این مقاله، نتایج حاصل از تحلیل با استفاده از المان مربعی ذکر شده‌است.

در ارتعاشات عرضی، شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار بررسی شده‌اند. در ارتعاشات شعاعی، شرایط مرزی ساده و گیردار کاملا شبیه یکدیگر هستند. لذا تنها شرایط مرزی آزاد و گیردار بررسی شده‌اند. در شکل ۲ تصویری از ورق مدلسازی شده در نرم‌افزار المان محدود آباکوس نشان داده شده‌است. برای تولید مش‌های بهتر، پوسته به قسمت‌های مختلف تقسیم بندی شده‌است.



شکل ۲- مدل ورق دایره‌ای تقسیم بندی شده در نرم افزار المان محدود آباکوس

۴- نتایج و بحث

ریشه‌های معادله‌های فرکانسی (۳۴)، (۳۷)، (۴۸)، (۵۱) و (۵۴) با استفاده از روش نیوتن-رافسون محاسبه شده‌اند.

فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد شعاعی و عرضی یک ورق دایره‌ای با شرایط مرزی مختلف محاسبه شده از روش تحلیلی و عددی در جداول ۱ تا ۵ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. دقت نتایج در حالت تکیه‌گاه گیردار، در ارتعاشات عرضی و طولی، دارای دقت قابل قبولی است؛ در حالیکه میزان خطا در حالت تکیه‌گاه ساده، بیشتر بوده و در حالت تکیه‌گاه آزاد خطاهای بزرگتری مشاهده می‌شود. یکی از ضعف‌های روش المان محدود، عدم دقت کافی در مسائل با شرایط مرزی مشتق مرتبه بالا است. با توجه به معادلات (۴۶)، (۴۹) و (۵۲)، تکیه‌گاه‌های گیردار، ساده و آزاد، به ترتیب دارای مشتق‌های مرتبه اول، دوم و سوم هستند. در نتیجه دقت نتایج در تکیه‌گاه گیردار بیشتر از تکیه‌گاه ساده بوده و هر دو، دقت بیشتری نسبت به تکیه‌گاه آزاد دارند.

جدول ۱- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات شعاعی ورق دایره‌ای گیردار

شماره مد (n)	المان محدود	ریشه‌های معادله (۳۴)	اختلاف*، ٪
۰	۳۸۳۴/۲	۳۸۳۴/۹	۰/۰۲
۱	۳۳۶۱/۵	۳۳۶۱/۷	۰/۰۱
۲	۵۲۱۸/۴	۵۲۱۹/۴	۰/۰۲
۳	۶۷۶۱/۴	۶۷۶۳/۸	۰/۰۴
۴	۸۱۲۶/۳	۸۱۳۰/۵	۰/۰۵
۵	۹۳۹۴/۱	۹۴۰۱/۲	۰/۰۷

*درصد اختلاف= تئوری/(تئوری-المان محدود)

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات شعاعی ورق دایره‌ای بدون تکیه‌گاه (آزاد)

شماره مد (n)	المان محدود	ریشه‌های معادله (۳۷)	اختلاف، ٪
۱	۵۱۳۸/۳	۵۱۳۹/۸	۰/۰۳
۲	۲۳۴۸/۲	۲۳۰۱/۸	۲/۰۲
۳	۳۶۰۷/۶	۳۶۱۴/۲	۰/۱۸
۴	۴۷۰۰/۴	۴۸۱۵/۲	۲/۳۸
۵	۵۷۲۵/۳	۵۹۶۷/۲	۴/۰۵

در شکل‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ به ترتیب شکل مودهای ارتعاشات شعاعی با شرط مرزی گیردار، شعاعی با شرط مرزی آزاد، عرضی با شرط مرزی گیردار، عرضی با شرط مرزی ساده و عرضی با شرط مرزی آزاد نشان داده شده است.

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای گیردار

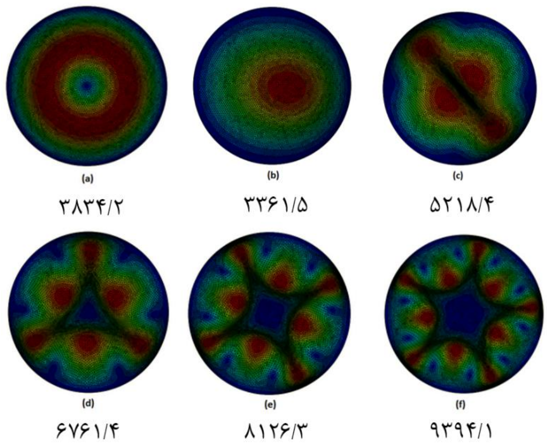
شماره مد (n)	المان محدود	ریشه‌های معادله (۴۸)	اختلاف، ٪
۱	۱۰۹/۲۳	۱۰۶/۱۲	۲/۹۳
۲	۱۷۴/۰۹	۱۷۴/۰۷	۰/۰۱
۳	۲۵۴/۷۱	۲۵۴/۷۲	۰/۰۱
۴	۳۴۷/۷۸	۳۴۷/۷۴	۰/۰۱
۵	۴۵۳/۱۴	۴۵۲/۹۴	۰/۰۴

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه ساده

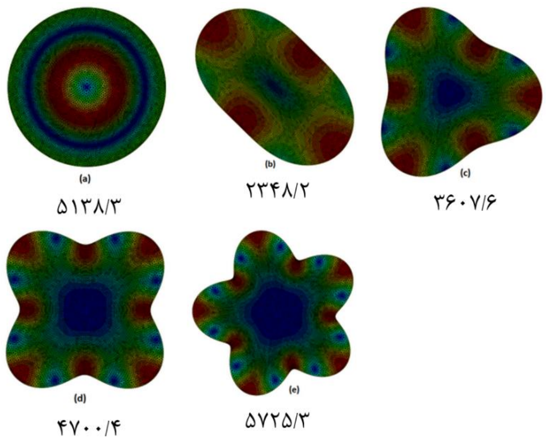
شماره مد (n)	المان محدود	ریشه‌های معادله (۵۱)	اختلاف، ٪
۱	۷۲/۰۰	۶۷/۷	۶/۳۵
۲	۱۲۸/۰۵	۱۲۶/۲۲	۱/۴۴
۳	۱۹۹/۶۹	۱۹۷/۸۴	۰/۹۳
۴	۲۸۴/۱۰	۲۸۲/۱۴	۰/۶۹
۵	۳۸۱/۰۲	۳۷۸/۷۹	۰/۵۸

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای بدون تکیه‌گاه (آزاد)

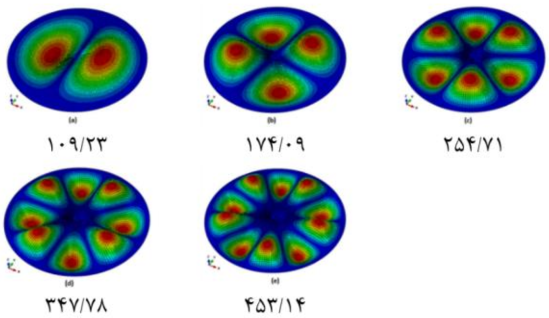
شماره مد (n)	المان محدود	ریشه‌های معادله (۵۴)	اختلاف، ٪
۱	۱۰۵/۲۴	۹۵/۳۹	۱۰/۳۲
۲	۱۷۵/۸۴	۱۶۶/۰۳	۵/۹۰
۳	۲۶۴	۲۴۹/۷۳	۵/۷۱
۴	۳۶۶/۰۷	۳۴۶/۲۹	۵/۷۱
۵	۴۸۱/۵۷	۴۵۵/۴۶	۵/۷۳



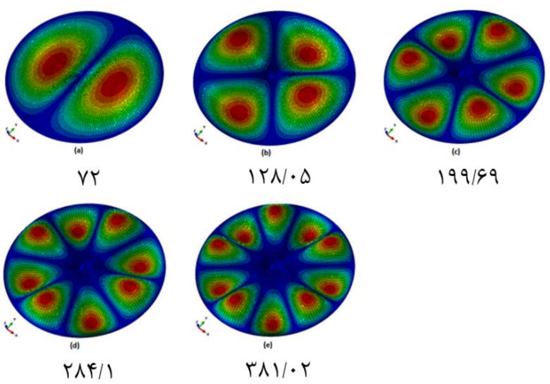
شکل ۱- ارتعاشات شعاعی با تکیه گاه گیردار



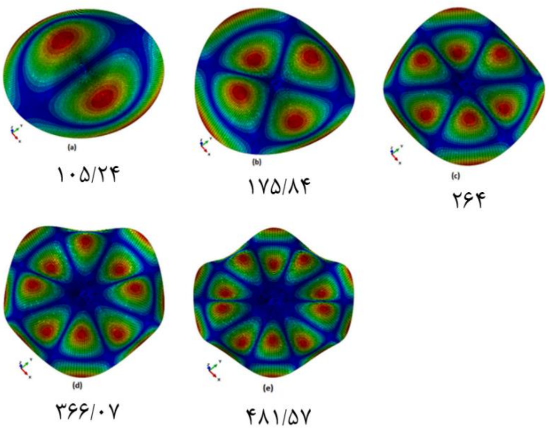
شکل ۴- ارتعاشات شعاعی در حالت تکیه‌گاه آزاد



شکل ۵- ارتعاشات عرضی با تکیه گاه گیردار



شکل ۶- ارتعاشات عرضی با تکیه‌گاه ساده



شکل ۷- ارتعاشات عرضی با تکیه‌گاه آزاد

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد شعاعی و عرضی یک ورق دایروی همسانگرد همگن با شرایط مرزی مختلف در لبه به صورت کاملا تحلیلی حل شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات شعاعی ورق با استفاده از اصل همیلتون به دست آورده شده است. به دلیل وابستگی معادلات دیفرانسیل به یکدیگر، از روش تجزیه هلمهولتز برای مستقل کردن معادلات استفاده شد. سپس معادلات با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل شدند. در نهایت، به ازای هر شرط مرزی یک معادله فرکانسی دقیق استخراج گردید. ریشه‌های معادله‌های فرکانسی که همان فرکانس‌های طبیعی ورق هستند با استفاده از روش نیوتن-رافسون محاسبه شد. نتایج حل تحلیلی با نتایج مدلسازی المان محدود مقایسه و ارزیابی شده است. نتایج تحلیلی و المان محدود برای تکیه‌گاه‌های گیردار و ساده همخوانی نسبتا خوبی دارند. اما در حالت تکیه‌گاه آزاد، اختلاف فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از حل تحلیلی و المان محدود برای پنج مد اول در حدود ۵-۱۰ درصد می‌باشد. دلیل وجود اختلاف زیاد در برخی از مدها، ضعف روش المان محدود در اعمال شرایط مرزی واقعی با مشتقات مرتبه‌های بالاتر است.

۶- مراجع

[1] Leissa, A. (1993). “Vibration of Plates”. Acoustical Society of America, Woodbury, NY.

[2] Wah, T. (1961). “Vibration of circular plate”. Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 34, pp. 275–281.

[3] Jomezadeh, E., Saidi, A.R. (2009). “Analytical solution for free vibration of transversely isotropic sector plates using a boundary layer function”. Thin-Walled Structures, Vol. 47, pp. 82–88.

[4] Farag, N.H., Pan J. (1998). “Free and forced in-plane vibration of rectangular plates”. Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 103, pp. 408–413.

[5] Farag, N.H., Pan J. (1998). “Free and forced in-plane vibration of rectangular plates”. Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 103, pp. 408–413.

[6] Bardell, N.S., Langley J.M., Dunsdon. (1996). “On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 191, pp. 459–467.

[7] Rizzi, S.A., Doyle J.F., Doyle. (1992). “Spectral analysis of wave motion in plane solids with boundaries, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers”. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, pp. 133–140.

[8] Love, A.E.H. (1944). “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”. fourth ed., Dover, New York.

[9] Hosseini-Hashemi, Sh., Es’haghi M., Rokni Damavandi Taher, H. (2010). “An exact analytical solution for freely vibrating piezoelectric coupled circular/annular thick plates using Reddy plate theory”. Composite Structures, Vol. 92, pp. 1333–1351.

[10] Bisadi, H., Es’haghi, M., Rokni, H., Ilkhani, M. (2012). “Benchmark solution for transverse vibration of annular Reddy plates”. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 56, pp. 35–49.

[11] McGee III, O.G., Kim J.W., Kim, Y.S. (2010). “Influence of boundary stress singularities on the vibration of clamped and simply-supported sectorial plates with arbitrary radial edge conditions”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, pp. 5563-5583.

[12] Chen, S.S.H., Liu T.M. (1975). “Extensional vibration of thin plates of various shapes”. Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 58.

[13] Zhou, Z.H., Wong K.W., Xu, X.S., Leung, A.Y.T. (2011). “Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, pp. 1005-1017.

[14] Helmut F. Bauer., Werner Eidel. (2010). “Transverse vibration and stability of spinning circular plates of constant thickness and different boundary conditions”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 300, pp. 877–895.

[15] Hosseini-Hashemi, Sh., Rezaee V., Atashipour, S.R., Girhammar, U.A. (2012). “Accurate free vibration analysis of thick laminated circular plates with attached rigid core”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, pp. 5581-5596.

[16] Hosseini-Hashemi, Sh., Es’haghi M., Rokni Damavandi Taher, H, Fadaie, M. (2010). “Exact closed-form frequency equations for thick circular plates using a third-order shear deformation theory”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, pp. 3382-3396.

[17] Shanqing, Li., Hong Yuan (2012). “Green quasifunction method for free vibration of clamped thin plates”. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 25, pp. 37–45.

[18] Shariyat, M., Jafari A. A., Alipour, M. M. (2013). “Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circularplates”. Acta Mechanica solida sinica, Vol. 26, pp. 83–98.

[19] Hasheminejad, Seyyed M., Ghaheri Ali., Rezaei, Shahed. (2012). “Semi-analytic solutions for the free in-plane vibrations of confocal annular elliptic plates with elastically restrained edges”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 331, pp. 434-456.

[20] Shaban, M., Alipour M. M. (2011). “Semi-analytical solution for free vibrationof thick functionally graded plates rested onelastic foundation with elastically restrained edge”. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 24, pp. 340–354.

[21] Chakraverty, S., Pradhan K.K. (2014). “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”. Aerospace Science and Technology, Vol. 36, pp. 132–156.

[22] Alipour, M.M., Shariyat M. (2014). “An analytical global–local taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by nonuniform elastic foundations”. Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. 14, pp. 6-24.

[23] Doyle, J.F. (1997). “Wave Propagation in Structures”. Springer, New York.

[24] Achenbach, J.D. (1973). “Wave Propagation in Elastic Solid”. North-Holland Publishing, Amsterdam.

[25] Soedel, W. (1981). “Vibrations of Shells and Plates”. Marcel Dekker, New York.

[26] Szilard, R. (1974). “Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.