مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع به روش تحلیلی

محمدمهدی جلیلی[۱،*]، محمد مصعب درعلی‌زاده[۲]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۱۲/۲۶
پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۹/۰۷

واژگان کلیدی:
میکروسکوپ نیروی اتمی،
محیط مایع،
ارتعاشات غیرخطی،
پاسخ فرکانسی.

چکیده

میکروسکوپ نیروی اتمی ابزاری قدرتمند در زمینه تصویربرداری و شناسایی مواد در ابعاد نانو است. عملکرد این وسیله در محیط مایع دارای مزیت‌های فراوانی است که می‌توان به قابلیت تصویربرداری از نمونه‌های بیولوژیکی، کاهش نیروی واندروالس و حذف نیروهای مویینگی اشاره کرد. با توجه به اینکه شناخت رفتار دینامیکی این وسیله در محیط مایع در شرایط مختلف ضروری است، در این مقاله به‌صورت تحلیلی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه رفتار دینامیکی آن به‌صورت یک میکروتیر یک‌سر گیردار بررسی شده است. به این منظور معادله حرکت میکروتیر با استفاده از مدل تیر پیوسته به دست آمده و نیروی هیدرودینامیکی ناشی از سیال به‌صورت جرم و میرایی افزوده وارد معادله شده است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و استفاده از روش تقریبی گالرکین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت تیر به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و در نهایت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادله پاسخ فرکانسی میکرو تیر در نزدیکی فرکانس‌های تشدید آن به دست آمده است. همچنین تأثیر ویسکوزیته سیال و ابعاد تیر روی پاسخ فرکانسی تیر مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این، چون در سیستم‌های غیرخطی علاوه بر تشدید در اطراف فرکانس طبیعی سیستم خطی‌شده، امکان وجود تشدید در کسری از فرکانس طبیعی یا مضارب آن وجود دارد. بنابراین در این مقاله، تشدید در اطراف فرکانس‌هایی غیر از فرکانس طبیعی سیستم خطی‌شده مورد بررسی قرار گرفته و وجود دو فرکانس تشدید کمتر از فرکانس طبیعی نشان داده شده است.

۱- مقدمه

میکروسکوپ نیروی اتمی از دسته میکروسکوپ‌های پروب روبشی است که در سال ۱۹۸۶ اختراع شد [۱]. این وسیله به‌عنوان ابزاری پرکاربرد در زمینه نانوتکنولوژی شناخته می‌شود که عملکرد آن بسته به فاصله سوزن میکروکانتیلور از سطح نمونه به ۳ دسته کلی تماسی، شبه تماسی و غیرتماسی تقسیم می‌شود. این وسیله نقش مهمی در تصویربرداری از نمونه‌های بیولوژیک دارد که مستلزم عملکرد آن در محیط مایع است. همچنین عملکرد آن در محیط مایع دارای مزیت‌های دیگری از قبیل حذف نیروهای مویینگی و کاهش نیروی واندروالس است [۲].

استفاده از عملکرد میکروسکوپ نیروی اتمی در مد تماسی برای نمونه‌های نرم بیولوژیکی به‌علت ایجاد نیروی تماسی مضر است. از این رو استفاده از مد شبه‌تماسی یا ضربه‌ای برای تصویربرداری از نمونه‌های نرم بسیار رایج است [۳]. وجود مایع و نیروهای هیدرودینامیکی ناشی از آن باعث می‌شود مدل دینامیکی میکروتیر متفاوت با عملکرد آن در محیط هوا شود. با توجه به اهمیت فرکانس و دامنه تشدید در این وسیله ارائه یک مدل دینامیکی مناسب برای آن به‌منظور تحلیل دقیق‌تر سیستم و کنترل آن نیاز است. مطالعات و مدل‌سازی‌های ارائه‌شده نشان می‌دهد ویسکوزیته سیال پیرامون میکروکانتیلور نقش کلیدی بر

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: jalili@yazd.ac.ir
۱. استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد
۲. کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

روی پاسخ فرکانسی آن دارد [۴]. این در حالی است که آثار ویسکوزیته روی تیر در ابعاد ماکرو قابل صرف‌نظرکردن است [۵]. هان و همکارانش نمونه‌های جدیدی از میکروسکوپ نیروی اتمی غیرتماسی را با نام مود مغناطیسی معرفی کردند. در این روش سطح میکروتیر با استفاده از یک ماده مغناطیسی پوشانده می‌شود و سپس با استفاده از یک میدان مغناطیسی به‌صورت مستقیم تحریک می‌شود [۶].

میکروسکوپ نیروی اتمی در حالت مد ضربه‌ای در محیط مایع اولین بار توسط پوتمن و همکارانش به‌کار گرفته شد [۷]. آن‌ها پاسخ فرکانسی منحنی‌های نزدیک‌شدن سوزن به نمونه را اندازه‌گیری کردند. هانسما و همکارانش برای اولین بار از نوسان سطح نمونه به‌جای کانتیلیور برای تصویربرداری از نمونه‌های زیستی استفاده کردند [۸]. سادر برای میکروتیرهای در محیط مایع با طول خیلی بزرگ‌تر از عرض و دامنه ارتعاشی کوچک یک مدل مناسب ارائه کرد [۹]. مهدوی و همکارانش اثر میرایی سیال را که باعث غیرخطی‌شدن سیستم می‌شود به‌کمک مدل جرم متمرکز بررسی کردند [۱۰]. سونگ و بوشان با استفاده از مدل تیر المان محدود دینامیک کانتیلیور را شبیه‌سازی کردند. آن‌ها نیروی هیدرودینامیکی ناشی از سیال را به‌صورت جرم و میرایی افزوده مدل‌سازی کردند [۱۱]. تین با استفاده از روش جمع آثار مودال پاسخ ارتعاشی میکروتیر را در مد ضربه‌ای به‌دست آورد. او نیروهای برهم‌کنش بین نمونه و پروب را به‌صورت بار گسترده و نیروی هیدرودینامیکی از طرف سیال را به‌صورت جرم و میرایی افزوده مدل‌سازی کرد [۱۲]. در مقاله بیر و همکارانش دینامیک میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع با در نظر گرفتن برهم‌کنش بین سوزن و سطح نمونه و دامنه نوسانی زیر نانومتر بررسی شد و با نتایج تجربی موردمقایسه قرار گرفت [۱۳].

در پژوهشی که توسط هروزو و گارسیا صورت گرفت، میکروتیر در دو محیط هوا و مایع انجام شد، بررسی آن‌ها نشان داد که منحنی‌های رزونانسی در هردو روش تحریک مکانیکی و مغناطیسی بستگی به نوع تحریک دارند [۱۴]. حبیب‌نژاد و همکارانش منحنی‌های پاسخ فرکانسی را برای میکروتیر در محیط مایع برای میکروتیرهای با ابعاد متفاوت به دست آوردند. آنها معادلات غیرخطی به‌دست‌آمده را با استفاده از روش عددی حل کردند [۱۵].

مندز و همکارانش به کمک شبیه سازی عددی با استفاده از دینامیک سیالات محاسباتی، نیروی ناشی از حضور سیال روی یک میکروتیر v شکل را تحت سرعت‌های مختلف و فاصله مشخص تا نمونه، محاسبه کردند. نتایج آنها انطباق خوب بین نتایج تجربی و پیش بینی‌های عددی را نشان داد [۱۶].

حبیب نژاد و قادری در مقاله خود به بررسی آنالیز حساسیت حرکت ارتعاشات غیر خطی میکروتیر پیزوالکتریک میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع با استفاده از روش آماری سوبل پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد حساسیت میکروتیر نسبت به عامل غیرخطی نیروی برهم‌کنش بین سوزن و سطح نمونه، در محیط مایع کمتر از محیط هوا است [۱۷].

همچنین فرخ پیام و فتحی‌پور اثر جرم سوزن را روی پاسخ ارتعاشی میکروتیر بررسی کردند. به این منظور آن‌ها بر اساس معادلات به‌دست‌آمده بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی و با در نظر گرفتن جرم سوزن و نیروی هیدرودینامیکی سیال به‌عبارتی برای محاسبه فرکانس تشدید میکروتیر در محیط سیال دست یافتند. نتایج آن‌ها نشان داد جرم سوزن در محیط مایع در مقایسه با محیط هوا تأثیر چندانی روی فرکانس تشدید ندارد [۱۸].

در پژوهشی دیگر، حبیب نژاد و همکارانش با استفاده از الگوریتم نیومارک معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت میکروتیر در محیط مایع را حل کردند و نشان دادند که با کاهش فاصله بین میکروتیر و سطح نمونه، دامنه ارتعاشات میکروتیر کم می‌شود. آن‌ها نشان دادند تأخیر زمانی در توپوگرافی سطح نمونه در محیط مایع به‌طور قابل‌توجهی نسبت به محیط هوا کمتر است [۱۹].

با توجه به اینکه تحلیل ارتعاشات میکروتیر در محیط مایع تاکنون به روش تحلیلی به‌منظور رسیدن به فرم بسته پاسخ فرکانسی انجام نگرفته است، در این مقاله با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر حرکت میکروتیر به روش تحلیلی حل شده است. داشتن پاسخ فرکانسی به‌صورت فرم بسته دارای اهمیت فراوان است که از جمله مزایای آن می‌توان به استفاده از آن به‌عنوان تابع تبدیل و کاربرد آن در آنالیز حساسیت سیستم اشاره کرد. در این مدل‌سازی معادلات حرکت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع تحت تحریک نیروی مغناطیسی با استفاده از مدل تیر پیوسته به دست آمده است. به‌طور کلی حرکت تیر در محیط مایع باعث

می‌شود که سیال مجاور در راستای طول تیر نیز به حرکت واداشته شود. بنابراین علاوه بر جرم تیر، جرم سیال نیز روی حرکت تیر تأثیر می‌گذارد. از طرف دیگر، یک نیروی میرایی اضافی ناشی از خصوصیات ویسکوزیته سیال روی حرکت تیر تأثیرگذار است. محققان این نیروها را به‌صورت تابعی از شتاب و سرعت میکروتیر تخمین زده‌اند [۱۲]. نیروی ناشی از سیال با استفاده از جرم و میرایی افزوده وارد معادله حرکت شده است. سپس معادله حرکت به‌شکل بی‌بعد نوشته شده و با استفاده از روش تقریبی گالرکین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت تیر به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در نهایت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات غیرخطی، معادله پاسخ فرکانسی میکروتیر به دست آمده است. با استفاده از پاسخ‌های به‌دست‌آمده تأثیر ویسکوزیته سیال و ابعاد تیر روی نمودار پاسخ فرکانسی تیر مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه پایداری ارتعاشات میکروتیر و وجود نقاط پرش موردبررسی قرار گرفته است. همچنین با توجه به امکان وجود فرکانس‌های تشدید دور از فرکانس طبیعی، فرکانس‌های تشدید دیگر نیز بررسی شده‌اند.

۲- مدل‌سازی

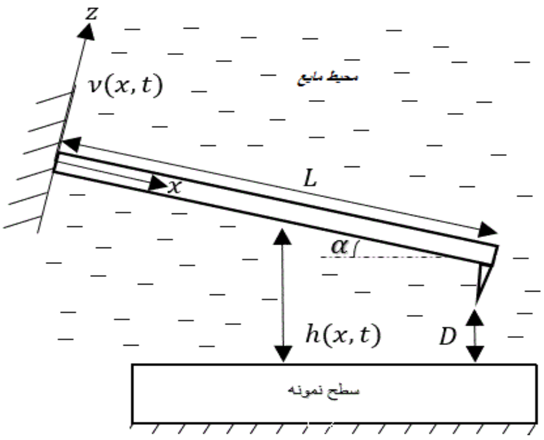
۲-۱- معادله حاکم بر حرکت تیر

برای مدل‌سازی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی می‌توان از دو روش مدل متمرکز و مدل پیوسته استفاده کرد. مقایسه نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های انجام شده با نتایج آزمایشگاهی نشان داده است که مدل پیوسته از دقت بسیار بهتری نسبت به مدل متمرکز برخوردار است [۲۰]. در این مقاله برای مدل‌سازی میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی از مدل تیر پیوسته استفاده شده است. مدل استفاده‌شده برای این تیر در شکل (۱) نشان داده شده است. مطابق این شکل میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی به عنوان یک تیر الاستیک کوچک در نظر گرفته شده است. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت برای این تیر به‌صورت رابطه (۱) است [۲۱].

که شرایط مرزی آن، شرایط مرزی تیر یک سر گیردار، یک سر آزاد در نظر گرفته شده است. مطابق رابطه (۲)، $f(x,t)$ شامل نیروی ناشی از طرف سیال، نیروی واندروالس اعمالی روی سوزن میکروکانتیلور و نیروی تحریک مغناطیسی اعمالی روی میکروتیر است.

$$\rho A\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+c\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\left(r_1\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)\right]=f(x,t) \quad (۱)$$

$$f(x,t)=f_{ext}(x,t)+f_{liq}(x,t)+f_{vdw}(x,t) \quad (۲)$$



شکل ۱: مدل تیر میکروسکوپ نیروی اتمی

محاسبه دقیق نیروی هیدرودینامیکی از طرف سیال بسیار مشکل است. محققان این نیرو را به‌صورت تابعی از شتاب و سرعت میکروتیر تخمین زده‌اند. مطابق رابطه (۳)، نیروی فوق به‌صورت جرم و میرایی افزوده وارد معادله حرکت می‌شود [۱۲]. در نتیجه، فرم نهایی معادله حاکم بر حرکت میکروتیر مرتعش در محیط مایع به‌صورت معادله (۴) به دست می‌آید.

$$f_{liq}(x,t)=-\rho_a A\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}-c_a\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (۳)$$

$$(\rho+\rho_a)A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(c+c_a)\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\left(r_1\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right]=f_{ext}(x,t)+f_{vdw}(x,t)\delta(x-L) \quad (۴)$$

همچنین چگالی جرمی افزوده و ضریب میرایی هیدرودینامیکی ناشی از سیال با استفاده از روابط زیر قابل‌محاسبه است [۱۲].

$$\rho_a=\frac{1}{12}\pi\rho_{liq}\frac{b}{\bar{h}}+\frac{3}{4}\frac{\pi}{\bar{h}}\sqrt{\frac{2\rho_{liq}\eta}{\Omega_{ext}}} \quad (۵)$$

$$c_a=c_\infty+c_s \quad (۶)$$

$$c_s=\frac{\eta b^3}{h(x,t)^3},c_\infty=3\pi\eta+\frac{3}{4}\pi b\sqrt{2\rho_{liq}\eta\Omega_{ext}} \quad (۷)$$

$$h(x,t)=D+l\cos\alpha+(L-x)\sin\alpha$$
$$+v(x,t)\cos\alpha \quad (۸)$$

نیروی واندروالس بین سوزن و سطح نمونه و نیروی تحریک مغناطیسی به‌ترتیب با استفاده از رابطه‌های (۹) و (۱۰) به‌دست می‌آیند که در آن H_1 و H_2 ثابت‌های هاماکر هستند [۲۲]:

$$f_{vdw}=\frac{H_1}{(z_0-v(L,t))^2}-\frac{H_2}{30(z_0-v(L,t))^8} \quad (۹)$$

$$f_{ext}=K.\sin\Omega t \quad (۱۰)$$

۲-۲- بی‌بعدسازی معادله حاکم بر حرکت تیر

برای حل معادله (۴)، ابتدا با استفاده از روش پی باکینگهام پارامترهای بی‌بعد تیر مطابق با رابطه (۱۱) به دست آمده‌اند [۲۳].

$$D^*=\frac{D}{L},l^*=\frac{l}{L},A^*=\frac{A_b}{L^2},I^*=\frac{I}{L^4},x^*=\frac{x}{L},$$
$$c^*=\frac{c}{L\sqrt{E\rho}},\eta^*=\frac{\eta}{L\sqrt{E\rho}},h^*=\frac{h(x^*,t^*)}{L},$$
$$f^*=\frac{f(x^*,t^*)}{EL},t^*=\frac{t}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}},r_1^*=\frac{r}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (۱۱)$$
$$\Omega^*=L\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega_{ext},H_1^*=\frac{H_1}{EL^4},H_2^*=\frac{H_1}{EL^{10}},$$
$$v^*=\frac{v(x^*,t^*)}{L}$$

با استفاده از این پارامترها شکل بی‌بعد معادله حرکت مطابق رابطه (۱۲) به دست می‌آید.

$$\left(1+\frac{\rho_a}{\rho}\right)A^*\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}}+\left(c^*+c_a^*\right)\frac{\partial v^*}{\partial t^*}+I^*r_1^*\frac{\partial^5 v^*}{\partial x^{*4}\partial t^*}$$
$$+I^*\frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}}=f^*_{ext}(x,t)+f^*_{vdw}(x,t)\delta(x-L) \quad (۱۲)$$

۲-۳- حل معادله حرکت

برای حل معادله حرکت به روش مقیاس‌های چندگانه [۲۷] ابتدا لازم است معادله دیفرانسیل حرکت با مشتقات جزئی به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود. برای این منظور ابتدا با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع خیز تیر به‌صورت زیر در نظرگرفته می‌شود [۲۴].

$$v^*(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x).T_i(t) \quad (۱۳)$$

برای تبدیل معادله به فرم یک معادله دیفرانسیل معمولی از روش گالرکین استفاده شده است. در این روش یک یا چند شکل مود به‌عنوان تابع مکانی خیز در نظر گرفته می‌شوند. شکل مود مورداستفاده باید شرایط مرزی تیر را ارضا کند. با توجه به اینکه میکروتیر تحت شرایط تحریک با فرکانس تشدید اول است، شکل مود غالب آن تنها مود اول است [۲۵]. در این پژوهش این شکل مود به‌صورت یک چندجمله‌ای درجه چهار به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است [۲۶]:

$$\phi(x)=\frac{x^4}{12l^4}-\frac{x^3}{3l^3}+\frac{x^2}{2l^2} \quad (۱۴)$$

با جای‌گذاری عبارات فوق در معادله حرکت خواهیم داشت:

$$\left(1+\frac{\rho_a}{\rho}\right)A^*\phi\ddot{T}+\left(c^*+c^*{}_a\right)\phi\dot{T}+I^*r_1^*\phi''''\dot{T}+I^*\phi''''T$$
$$=f^*{}_{ext}(x^*,t^*)+f^*{}_{vdw}(x^*,t^*)\delta(x^*-1) \quad (۱۵)$$

برای حل معادله فوق لازم است بسط تیلور عبارت متناظر با نیروی واندروالس حول نقطه تعادل میکروتیر نوشته شود[۲۵].

$$f^*{}_{vdw}=\alpha_0+\alpha_1(\phi(\mathrm{x})\mathrm{T(t)}-v_0)+\ldots \quad (۱۶)$$

که در معادلات فوق v_0 نقطه تعادل اولیه تیر است. با ضرب طرفین معادله (۱۵) در شکل مود رابطه (۱۴) و انتگرال‌گیری در سراسر طول میکروتیر معادله دیفرانسیل معمولی زیر به دست می‌آید.

$$M_1\ddot{T}+M_2\dot{T}+M_3T\dot{T}+M_4T^2\dot{T}+M_5T$$
$$=M_6+K^*\sin\Omega^*t^* \quad (۱۷)$$

که ضرایب معادله از رابطه (۱۵) قابل‌محاسبه‌اند و در پیوست ۱ ارائه شده‌اند.

برای حذف پارامتر M_6 با تغییر متغیر $y=T-\frac{M_6}{M_5}$ معادله به فرم رابطه (۱۸) تبدیل می‌شود:

$$c_1\ddot{y}+c_2\dot{y}+c_3y\dot{y}+c_4y^2\dot{y}+c_5y=K^*\sin\Omega^*t^*$$
$$c_1=M_1,c_2=M_2+\frac{M_3M_6}{M_5}+M_4(\frac{M_6}{M_5})^2 \quad (۱۸)$$
$$c_3=M_3+2\frac{M_4M_6}{M_5},c_4=M_4,c_5=M_5$$

برای به‌دست‌آوردن پاسخ فرکانسی در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم خطی‌شده، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است[۲۷]. مطابق این روش پاسخ معادله به‌شکل معادله (۱۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$y(t^*,\varepsilon)=y_0(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2,...)+\varepsilon y_1(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2,...)+...$$
$$\mathrm{T}_n=\varepsilon^n t^*, n=0,1,2,... \qquad (۱۹)$$

که ε یک پارامتر کوچک است. مشتقات زمانی می‌توانند نسبت به T_n به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$\frac{d}{dt^*}=D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+...$$
$$\frac{d^2}{dt^{*2}}=D_0^2+2\varepsilon D_0 D_1+\varepsilon^2(D_1^2+2D_0D_2)+... \qquad (۲۰)$$

همچنین برای حل معادلات متغیرهای جدید زیر تعریف می‌شوند که در آن σ معرف میزان نزدیکی فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی سیستم خطی‌شده است.

$$K^*=\varepsilon k^*, \Omega^*=\omega_0+\varepsilon\sigma$$
$$c_2=\varepsilon\tilde{c}_2, c_3=\varepsilon\tilde{c}_3, c_4=\varepsilon\tilde{c}_4, c_5=\varepsilon\tilde{c}_5 \qquad (۲۱)$$

با قرار دادن معادلات (۱۹-۲۱) در معادله (۱۸) و با جداسازی ضرایب ε معادلات (۲۱) و (۲۲) حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon^0: D_0^2 y_0+\frac{\tilde{c}_5}{c_1}y_0=0 \qquad (۲۲)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 y_1+\frac{\tilde{c}_5}{c_1}y_1=-2D_0D_1y_0-\frac{\tilde{c}_2}{c_1}y_0$$
$$-\frac{\tilde{c}_3}{c_1}(D_0y_0)y_0-\frac{\tilde{c}_4}{c_1}(D_0y_0)y_0^2$$
$$+\frac{k^*}{c_1}\sin(\omega_0T_0+\sigma T_1) \qquad (۲۳)$$

حل معادله (۲۲) با در نظر گرفتن $\frac{\tilde{c}_5}{c_1}=\omega_0^2$ برابر است با :

$$y_0=A(T_1)\exp(i\omega_0T_0)+cc \qquad (۲۴)$$

که cc بیانگر مزدوج مختلط جمله اول است. با جای‌گذاری معادله (۲۴) در معادله (۲۳) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2y_1+\omega_0^2y_1=-2\mathrm{i}\omega_0D_1A(\mathrm{T}_1)\exp(\mathrm{i}\omega_0T_0)$$
$$-\frac{\tilde{c}_2}{c_1}\mathrm{i}\omega_0A(\mathrm{T}_1)\exp(\mathrm{i}\omega_0T_0)$$
$$-\frac{\tilde{c}_3}{c_1}(\mathrm{i}\omega_0\exp(\mathrm{i}\omega_0T_0))A(\mathrm{T}_1)\exp(\mathrm{i}\omega_0T_0)$$
$$-\frac{\tilde{c}_4}{c_1}((\mathrm{i}\omega_0A(\mathrm{T}_1)\exp(\mathrm{i}\omega_0T_0))(A(\mathrm{T}_1)\exp(\mathrm{i}\omega_0T_0)$$
$$+A(\mathrm{T}_1)\overline{A}(\mathrm{T}_1))+\frac{k^*}{c_1}\sin(\omega_0T_0+\sigma T_1)+cc \qquad (۲۵)$$

در معادله (۲۵) برای داشتن جواب نوسانی ترم‌های نامحدود باید صفر در نظر گرفته شوند. در نتیجه:

$$-2\mathrm{i}\omega_0D_1A(\mathrm{T}_1)-\frac{c_2}{c_1}\mathrm{i}\omega_0A(\mathrm{T}_1)$$
$$-\frac{c_4}{c_1}\mathrm{i}\omega_0A^2(\mathrm{T}_1)\overline{A}(\mathrm{T}_1)+\frac{k^*}{c_1}\sin(\sigma T_1)=0 \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری $A=\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله (۲۶) داریم:

$$\omega_0a\beta'+\frac{k^*}{2c_1}\sin(\sigma\mathrm{T}_1-\beta)=0 \qquad (۲۷)$$

$$-a'-\frac{\tilde{c}_2a}{2c_1}-\frac{\tilde{c}_4a^3}{8c_1}-\frac{k^*}{2c_1\omega_0}\cos(\sigma\mathrm{T}_1-\beta)=0 \qquad (۲۸)$$

در روابط فوق (') مشتق پارامتر نسبت به T_1 را نشان می‌دهد.

با تعریف پارامتر $\gamma=\sigma\mathrm{T}_1-\beta$ و در نظر گرفتن شرایط پایدار به‌صورت $a'=0$ و $\gamma'=0$ معادلات (۲۹) و (۳۰) به‌شکل زیر درمی‌آیند.

$$\frac{\tilde{c}_2a}{2c_1}+\frac{\tilde{c}_4a^3}{8c_1}=-\frac{k^*}{2c_1\omega_0}\cos(\gamma) \qquad (۲۹)$$

$$a\sigma=-\frac{k^*}{2c_1\omega_0}\sin(\gamma) \qquad (۳۰)$$

با حذف پارامتر γ از معادلات (۲۹) و (۳۰) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(a\sigma)^2+(\frac{c_2a}{2c_1}+\frac{c_4a^3}{8c_1})^2=(\frac{k^*}{2c_1\omega_0})^2 \qquad (۳۱)$$

معادله (۳۱) تابع پاسخ فرکانسی میکروتیر در اطراف فرکانس تشدید اولیه است. همچنین می‌توان با حذف پارامتر a مطابق با رابطه (۳۲) معادله اختلاف فاز جابه‌جایی میکروتیر نسبت به نیروی تحریک را به دست آورد:

$$\frac{c_2}{2c_1}(\frac{k^*}{2c_1\omega_0\sigma}\sin(\gamma))+\frac{c_4}{8c_1}(\frac{k^*}{2c_1\omega_0\sigma}\sin(\gamma))^3$$

$$=\frac{K^*}{2c_1\omega_0}\cos(\gamma) \quad (۳۲)$$

داده‌های مورد نیاز برای رسم این منحنی مربوط به میکروتیری از جنس سیلیکون نیتراید است که در محیط سیال آب قرار دارد[۱۲]. داده‌های فوق در جدول ۱ ارائه شده‌اند. با استفاده از مقدار پارامترهای ارائه‌شده در جدول ۱، پاسخ فرکانسی تیردر شرایط متفاوت به دست آمده است. شکل (۲) نمودار پاسخ فرکانسی میکروتیرهایی با عرض متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌طور که از نمودار شکل (۲) مشخص است دامنه ارتعاشات متناظر با میکروتیر عریض‌تر، کمتر است. این اختلاف ناشی از ترم میرایی افزوده است که وابسته به عرض میکروتیر است و با آن رابطه مستقیم دارد. در شکل (۳) نمودار فاز برای میکروتیرهایی با عرض متفاوت به دست آمده است.

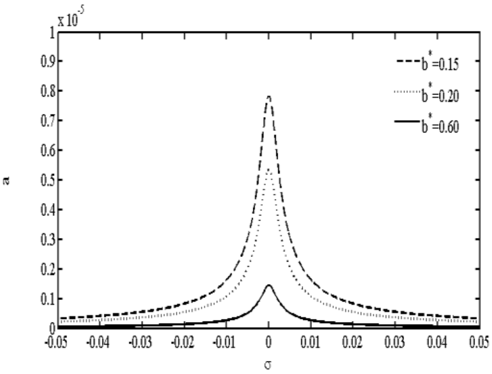
همچنین نمودار پاسخ فرکانسی برای میکروتیرهایی در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در شکل (۴) رسم شده است. در این نمودارها مطابق با انتظار، دامنه ارتعاشات متناظر با سیال با ویسکوزیته بیشتر، کمتر است. شکل (۵) نمودار فاز برای میکروتیرهای قرارگرفته در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت است. مطابق با این شکل تغییر ویسکوزیته سیال نیز تأثیر زیادی بر نمودار اختلاف فاز نمی‌گذارد.

علاوه بر این پاسخ فرکانسی برای فاصله‌های اولیه متفاوت بین میکروتیر و سطح نمونه در شکل (۶) رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش فاصله اولیه بین میکروتیر و سطح، دامنه نوسانات میکروتیرکانتیلیور بیشتر می‌شود. شکل (۷) نمودار فاز برای میکروتیرهایی با فاصله‌های متفاوت سوزن تا سطح نمونه است. این شکل نیز نشان می‌دهد تأثیر فاصله‌های اولیه بین میکروتیر و سطح نمونه بسیار ناچیز است.

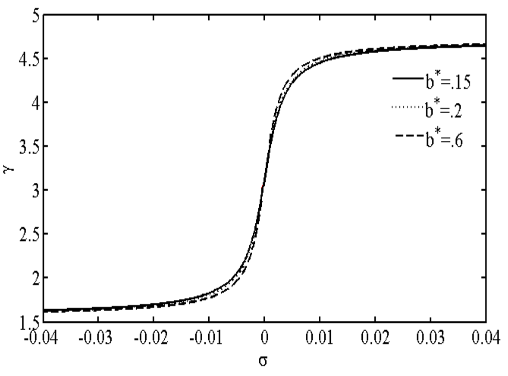
جدول ۱: مقادیر پارامترهای استفاده‌شده در شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
ρ	۲۳۳۰ $kg/m.s$	b	۳۵ μm
Ω	۳۳ kHz	E	۱۳۰ Gpa
η	۸/۵۴×۱۰$^{-۴}$ $kg/m.s$	H_1	۰/۱۰ $N.m^2$
ρ_{liq}	۱۰۰۰ $kg/m.s$	H_2	−۱۰$^{-۷۷}$ $N.m^8$
α	۱۵	c	۰/۲۳ NS/m^2
$\bar{h}$	۲/۳ μm	r_1	۱۰$^{-۹}$ s^{-1}
L	۲۵۲ μm		

مطابق با معادله (۶)، میرایی افزوده ناشی از سیال، از دو عبارت تشکیل شده است. عبارت اول، میرایی هیدرودینامیکی است و مقداری ثابت دارد. جمله دوم زمانی ایجاد می‌شود که کانتیلور به سطح نمونه نزدیک می‌شود. در نتیجه مایع بین نمونه و کانتیلور فشرده می‌شود. این ترم از معادله با فاصله تیر تا نمونه نسبت عکس دارد. کاهش فاصله بین نمونه و میکروتیر، باعث فشرده‌ترشدن مایع محصور شده، ضریب میرایی افزایش می‌یابد و در نتیجه دامنه ارتعاشات کم می‌شود. به‌منظور بررسی صحت مدل‌سازی انجام‌گرفته، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج آزمایشگاهی و حل عددی انجام‌گرفته در مقالات دیگر مقایسه شده است. به این منظور فرکانس تشدید برای تیر مرتعش در محیط آب با مشخصاتی مطابق با جدول ۲ به دست آمده است. مقدار به‌دست‌آمده با چهار روش تئوری دیگر [۴] و نتایج آزمایشگاهی [۲۸] مقایسه شده است. نتیجه این مقایسه در جدول ۳ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش حل ارائه‌شده در این مقاله با دقت بسیار خوب قادر به محاسبه تشدید اولیه سیستم است.



شکل ۲: پاسخ فرکانسی میکروتیرهای با عرض متفاوت در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه



شکل ۳: اختلاف فاز جابه‌جایی نسبت به نیروی میکروتیرهای با عرض متفاوت در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه

۲-۴- بررسی پایداری حرکت

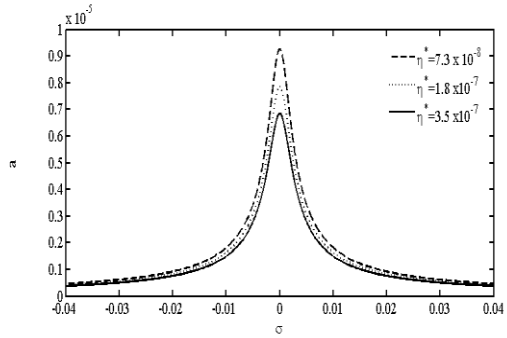
برای بررسی وضعیت پایداری میکروتیر نسبت به حالت تعادل خود فرض می‌کنیم سیستم به مقدار جزئی از وضعیت تعادل خود خارج شده است. بنابراین دامنه و آرگومان ارتعاشات در وضعیت جدید به شکل معادله (۳۲) تعریف می‌شود.

$$a = a_0 + a_1, \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \tag{۳۳}$$

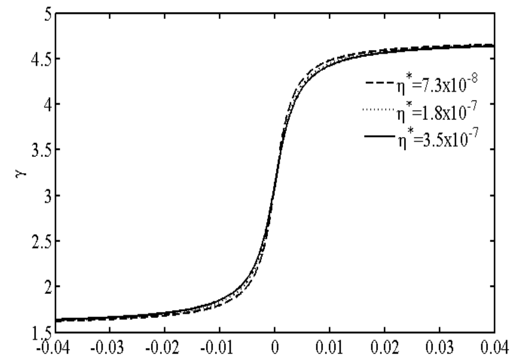
که در آن، اندیس 0 بیانگر وضعیت تعادل و اندیس 1 بیانگر میزان انحراف از حالت تعادل در متغیرها است. با جای‌گذاری معادلات (۳۳) در معادله (۲۷) و (۲۸) خواهیم داشت:

$$(a_0 + a_1)(\gamma_0 + \gamma_1)' = (a_0 + a_1)\sigma - \frac{k^*}{2c_1\omega_0}\sin(\gamma_0 + \gamma_1) \tag{۳۴}$$

$$(a_0 + a_1)' = \frac{\tilde{c}_2(a_0 + a_1)}{2c_1} + \frac{\tilde{c}_4(a_0 + a_1)^3}{8c_1} - \frac{k^*}{2c_1\omega_0}\cos(\gamma_0 + \gamma_1) \tag{۳۵}$$



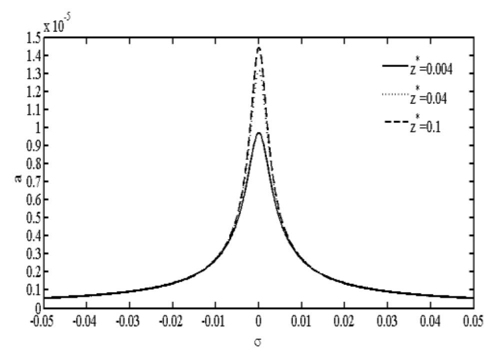
شکل ۴: پاسخ فرکانسی میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه



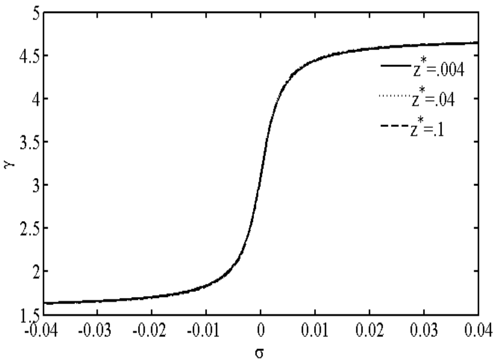
شکل ۵: اختلاف فاز جابه‌جایی نسبت به نیروی میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه

با در نظر گرفتن بسط تیلور توابع $\sin(\gamma_0 + \gamma_1)$ ، $\cos(\gamma_0 + \gamma_1)$ و $\frac{1}{a_0 + a_1}$ و صرف‌نظرکردن از عبارت‌های شامل γ_1^2 و a_1^2 ، فرم معادلات (۳۴) و (۳۵) به‌شکل ماتریسی به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1' \\ a_1' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^*}{2c_1\omega_0 a_0}\cos(\gamma_0) & -\frac{k^*}{2c_1\omega_0 a_0^2}\sin(\gamma_0) \\ \frac{k^*}{2c_1\omega_0}\sin(\gamma_0) & -(\frac{\tilde{c}_2}{2c_1} + \frac{3\tilde{c}_4 a_0^2}{8c_1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ a_1 \end{Bmatrix} \tag{۳۶}$$



شکل ۶: پاسخ فرکانسی میکروتیر در فاصله‌های متفاوت سوزن تا نمونه در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه



شکل ۷: اختلاف فاز جابه‌جایی نسبت به نیروی میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس تشدید اولیه

جدول ۲: مقادیر پارامترهای استفاده‌شده برای اعتبارسنجی فرکانس تشدید میکروتیر

پارامتر	مقدار
ρ	۲۳۳۰ $kg/_{m.s}$
b	۲۰ μm

η	۸/۵۴×۱۰-۴ $kg/m.s$
D	۴۴ μm
α	۱۵
$\bar{h}$	۰/۶ μm
L	۲۰۰ μm

جدول ۳- مقایسه فرکانس تشدید به دست آمده با نتایج آزمایشگاهی و روش‌های مدل‌سازی دیگر

درصد خطا	فرکانس تشدید (kHz)	روش مدل‌سازی
٪۰/۹۶٪	۳/۱۵	Rank1[4]
٪۱	۳/۱۵۳	Viscous[4]
٪۶۹	۵/۲۷۶	Viscous[4]
٪۲۳	۳/۸۴۹	EMR[4]
–	۳/۱۲	Experiment[28]
٪۲	۳/۰۵۳	پژوهش حاضر

با درنظرگرفتن شرایط تعادل و استفاده از معادله (۲۹) و (۳۰) می‌توان پارامتر γ را از معادله (۳۵) حذف کرد و به معادله (۳۷) رسید:

$$\begin{Bmatrix} a_1' \\ \gamma_1' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_0}\left(\frac{c_2 a_0}{2c_1}+\frac{c_4 a_0^3}{8c_1}\right) & \frac{\sigma}{a_0} \\ -a_0\sigma & -\left(\frac{c_2}{2c_1}+\frac{3c_4 a_0^2}{8c_1}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ a_1 \end{Bmatrix} \qquad (۳۷)$$

با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ضرایب در معادله (۳۷) وضعیت پایداری میکروتیر را می‌توان بررسی کرد[۲۷]. به این منظور معادله مشخصه ماتریس ضرایب در معادله (۳۸) را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2+\lambda\left[\left(\frac{\tilde{c}_2 a_0}{2c_1}+\frac{\tilde{c}_4 a_0^3}{8c_1}\right)+\left(\frac{\tilde{c}_2}{2c_1}+\frac{3\tilde{c}_4 a_0^2}{8c_1}\right)\right]$$
$$+\left[\left(\frac{\tilde{c}_2 a_0}{2c_1}+\frac{\tilde{c}_4 a_0^3}{8c_1}\right)\left(\frac{\tilde{c}_2}{2c_1}+\frac{3\tilde{c}_4 a_0^2}{8c_1}\right)+\sigma^2\right]=0 \qquad (۳۸)$$

با توجه به مثبت‌بودن ضرائب $\tilde{c}_1$، $\tilde{c}_2$ و $\tilde{c}_4$ و در نتیجه مثبت‌بودن ضریب λ و مقدار ثابت معادله (۳۸) ثابت می‌شود مقادیر ویژه ماتریس ضرایب، یعنی λها، همواره به‌نحوی هستند که در صورت حقیقی‌بودن، علامت آن‌ها منفی است و در صورت مختلط‌بودن، قسمت حقیقی آن‌ها دارای علامت منفی است، در نتیجه حرکت میکروتیر همواره پایدار است.

۵-۲- پاسخ ارتعاشی میکروتیر تحت تحریک با دامنه زیاد غیرتشدیدی

در صورتی که فرکانس تحریک دور از فرکانس تشدید باشد، تأثیر تحریک روی پاسخ کلی سیستم ناچیز است مگر اینکه دامنه تحریک بزرگ باشد. بنابراین برای افزایش تأثیر ترم تحریک در پاسخ، این ترم در ضریب ε^0 ظاهر می‌شود. در نتیجه با جای‌گذاری مجدد روابط (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) در معادله دیفرانسیل غیرخطی، می‌توان به رابطه (۳۹) و (۴۰) دست یافت:

$$\varepsilon^0 = D_0^2 y_0 + \frac{c_5}{c_1} y_0 = \frac{k^*}{c_1}\sin\Omega^* t \qquad (۳۹)$$

$$\varepsilon^1 = D_0^2 y_1 + \frac{c_5}{c_1} y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - \frac{c_2}{c_1} y_0$$
$$-\frac{c_3}{c_1}(D_0 y_0) y_0 - \frac{c_4}{c_1}(D_0 y_0)\, y_0^2 \qquad (۴۰)$$

پاسخ معادله (۳۹) به‌صورت حاصل‌جمع پاسخ همگن و ناهمگن به‌صورت رابطه (۴۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$y_0 = A(T_1)\exp(i\omega_0 T_0) + \mathrm{i}\,\Lambda\exp(i\Omega^* T_0) + \mathrm{cc} \qquad (۴۱)$$

که در آن Λ مطابق با رابطه (۴۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda = \frac{k^*}{2c_1(\omega_0^2 - \Omega^{*2})} \qquad (۴۲)$$

با جای‌گذاری معادله (۴۱) در معادله (۴۰) رابطه (۴۳) حاصل می‌شود.

$$D_0^2 y_1 + \frac{\tilde{c}_5}{c_1} y_1 =$$
$$-\omega_0\left[\frac{i\tilde{c}_2 A}{c_1} + 2iD_1 A + \frac{i\tilde{c}_4 \bar{A} A^2}{c_1} + \frac{2i\tilde{c}_4 A\Lambda^2}{c_1}\right]\exp(i\omega_0 T_0)$$
$$-\left[i\frac{\tilde{c}_3}{c_1}A^2\omega_0\right]\exp(2i\omega_0 T_0) + \left[i\frac{\tilde{c}_3}{c_1}\Lambda^2\Omega^*\right]\exp(2i\Omega^* T_0)$$
$$-\left[\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda^3\Omega^* + \frac{\tilde{c}_2}{c_1}\Lambda\Omega^* + 2\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda\bar{A}A\Omega\right]\exp(i\Omega^* T_0)$$

$$-[i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A^3\omega_0]\exp(3i\omega_0T_0)+[\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda^3\Omega^*]\exp(3i\Omega^*T_0)$$
$$-[\frac{\tilde{c}_3}{c_1}A\Lambda\omega_0+\frac{\tilde{c}_3}{c_1}A\Lambda\Omega^*]\exp(i(\omega_0+\Omega^*)T_0)$$
$$-[2\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A^2\Lambda\omega_0+\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda\Omega^*A^2]\exp(\mathrm{i}(2\omega_0T_0+\Omega^*)T_0)$$
$$+[2\mathrm{i}\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A\Lambda^2\Omega^*+i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A\Lambda^2\omega_0]\exp(i(\omega_0+2\Omega^*)T_0)$$
$$+[\frac{\tilde{c}_3}{c_1}A\Lambda\omega_0-\frac{\tilde{c}_3}{c_1}A\Lambda\Omega^*]\exp(i(\omega_0-\Omega^*)T_0)$$
$$+[-2i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A\Lambda^2\Omega^*+i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A\Lambda^2\omega_0]\exp(i(\omega_0-2\Omega^*)T_0)$$
$$+[-\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda\bar{A}^2\Omega^*+\frac{2\tilde{c}_4\Lambda\bar{A}^2\omega_0}{c_1}]$$
$$\exp(i(\Omega^*-2\omega_0)T_0)+\mathrm{cc} \quad (۴۳)$$

با جداسازی ترم‌های نامحدود و برابر با صفر قراردادن آن‌ها خواهیم داشت:

$$-i\frac{\tilde{c}_2}{c_1}A\omega_0-2iD_1A\omega_0-i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\bar{A}A^2\omega_0$$
$$-2i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A\Lambda^2\omega_0=0 \quad (۴۴)$$

با جای‌گذاری $A=\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ در معادله (۴۴) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی، معادلات (۴۵) و (۴۶) به دست می‌آیند:

$$-\omega_0 a\beta'=0 \quad (۴۵)$$

$$\frac{\tilde{c}_2}{2c_1}\omega_0 a+\omega_0 a'+\frac{\tilde{c}_4}{8c_1}a^3+\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\omega_0 a\Lambda^2=0 \quad (۴۶)$$

با حل دستگاه معادلات فوق، ضرایب a و β به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

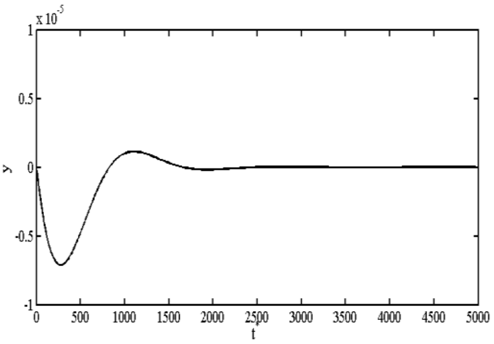
$$\beta=\beta_0 \quad (۴۷)$$

$$a=\left((\exp(\frac{c_2}{c_1}t)-\frac{a_o^2(\frac{c_4}{8c_1})}{\frac{c_2}{2c_1}+\frac{c_4}{c_1}})(\frac{(\frac{c_2}{2c_1}+\frac{c_4}{8c_1}a_0^2)}{a_o^2(\frac{c_2}{2c_1})})\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (۴۸)$$

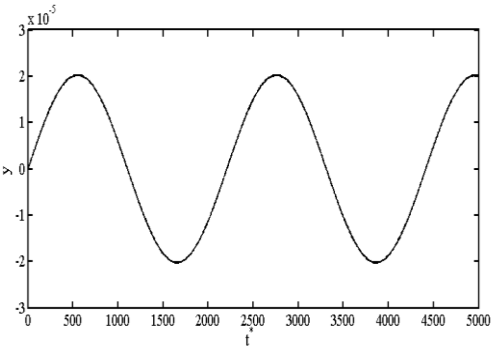
که a_0 و β_0 مقادیر ثابت بوده، از شرایط اولیه مسئله به دست می‌آیند. با جمع پاسخ‌های خصوصی و عمومی، پاسخ کلی ارتعاشات میکروتیر با تقریب مرتبه اول به‌صورت رابطه (۴۹) به دست می‌آید:

$$y=A(T_1)\exp(i\omega_0T_0)-i\Lambda\exp(i\Omega^*T_0)+cc$$
$$=a\cos(\omega_0t^*+\beta_0)+2\Lambda\sin(\Omega^*\mathrm{t}^*) \quad (۴۹)$$

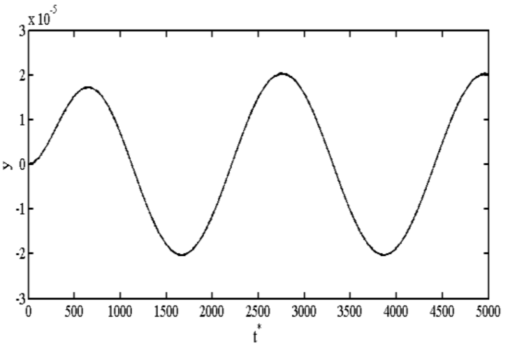
ثابت‌های a_0 و β_0 با در نظرگرفتن شرایط اولیه به دست می‌آیند. شکل‌های (۸) و (۹) به‌ترتیب نمایش پاسخ همگن و پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل حرکت هستند و شکل ۱۰ نمودار پاسخ کلی حرکت است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌علت وجود میرایی در سیستم با گذشت زمان، تأثیر پاسخ همگن در پاسخ کلی بسیار کم شده، پاسخ خصوصی غالب می‌شود.



شکل ۸: نمودار پاسخ گذرای میکروتیر در فرکانس غیرشدیدی



شکل ۹: نمودار پاسخ خصوصی میکروتیر در فرکانس غیرتشدیدی



شکل ۱۰: نمودار پاسخ کلی میکروتیر در فرکانس غیرتشدیدی

۳- بررسی فرکانس‌های تشدید دیگر

۳-۱- بررسی تشدید در اطراف $\Omega^* = \frac{1}{3}\omega_0$

در معادله (۴۳) علاوه بر ضرایب $\exp(i\omega_0 T_0)$ در سمت راست معادله که ترم‌های نامحدود بودند ضرایب $\exp(3i\Omega^* T_0)$ به‌ازای $\Omega^* = \frac{1}{3}\omega_0$ نیز ایجاد ترم نامحدود می‌کنند. بنابراین در این حالت ترم‌های نامحدود به‌شکل رابطه (۵۰) بوده، صفر می‌شوند.

$$-\frac{i\tilde{c}_2 A}{c_1} - 2iD_1 A - \frac{i\tilde{c}_4 \bar{A}A^2}{c_1} - \frac{2i\tilde{c}_4 A\Lambda^2}{c_1} + \frac{\tilde{c}_4 \Lambda^3 \Omega^*}{c_1 \omega_0} = 0 \quad (۵۰)$$

با جای‌گذاری $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$ و با جداسازی ضرایب حقیقی و موهومی داریم:

$$-a\beta' - \frac{\tilde{c}_4}{c_1\omega_0}\Lambda^3\Omega^* \cos(\sigma T_1 - \beta) = 0 \quad (۵۱)$$

$$\frac{\tilde{c}_2 a}{2c_1} + a' + \frac{\tilde{c}_4 a^3}{8c_1} + \frac{\tilde{c}_4 a\Lambda^2}{c_1} - \frac{\tilde{c}_4 \Lambda^3 \Omega^*}{c_1\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) = 0 \quad (۵۲)$$

در معادلات (۵۱) و (۵۲) با تعریف پارامتر γ به‌صورت $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ و در نظر گرفتن شرایط پایدار به‌صورت $a' = 0$ و $\gamma' = 0$ داریم:

$$\frac{\tilde{c}_2 a}{2c_1} + \frac{\tilde{c}_4 a^3}{8c_1} + \frac{\tilde{c}_4 a\Lambda^2}{c_1} = \frac{\tilde{c}_4}{c_1\omega_0}\Lambda^3\Omega^* \sin(\gamma) \quad (۵۳)$$

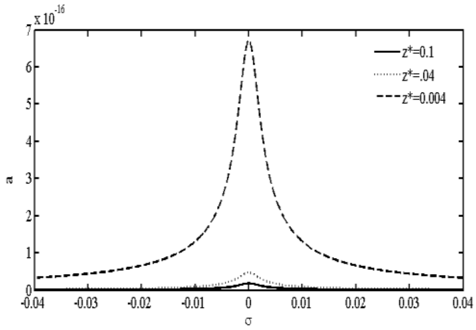
$$a\sigma = \frac{\tilde{c}_4}{c_1\omega_0}\Lambda^3\Omega^* \cos(\gamma) \quad (۵۴)$$

با حذف پارامتر γ از معادلات (۵۳) و (۵۴)، معادله (۵۵) حاصل می‌شود:

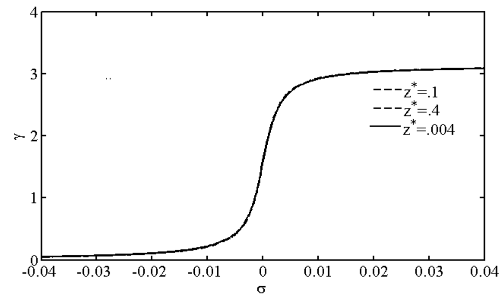
$$(a\sigma)^2 + \left(\left(\frac{c_2}{2c_1} + \frac{c_4}{c_1}\Lambda^2\right)a + \frac{c_4}{8c_1}a^3\right)^2 = \left(\frac{2c_4}{c_1\omega_0}\Lambda^3\Omega^*\right)^2 \quad (۵۵)$$

رابطه (۵۶) پاسخ فرکانسی میکروتیر تحت تحریک با فرکانس تحریک $\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$ است. همچنین با حذف پارامتر a رابطه اختلاف فاز جابه‌جایی نسبت به نیرو مطابق رابطه (۵۶) به دست می‌آید. برای بررسی رفتار سیستم، نمودارهای پاسخ فرکانسی و فاز مطابق اشکال ۱۱-۱۶ ارائه شده‌اند.

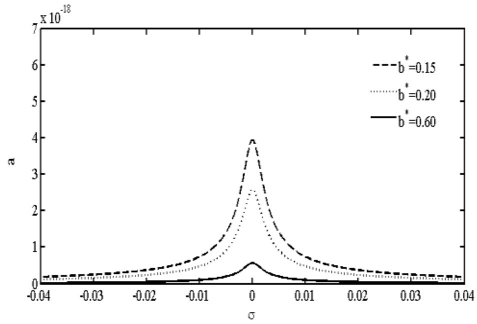
$$\frac{c_2}{2c_1}\left(\frac{-c_4}{c_1\omega_0\sigma}\Lambda^3\Omega^*\cos(\gamma)\right) + \frac{c_4}{8c_1}\left(\frac{-c_4}{c_1\omega_0\sigma}\Lambda^3\Omega^*\cos(\gamma)\right)^3 + \frac{c_4\lambda^2}{c_1}\left(\frac{-c_4}{c_1\omega_0\sigma}\Lambda^3\Omega^*\cos(\gamma)\right) = \frac{c_4}{c_1\omega_0}\Lambda^3\Omega^*\sin(\gamma) \quad (۵۶)$$



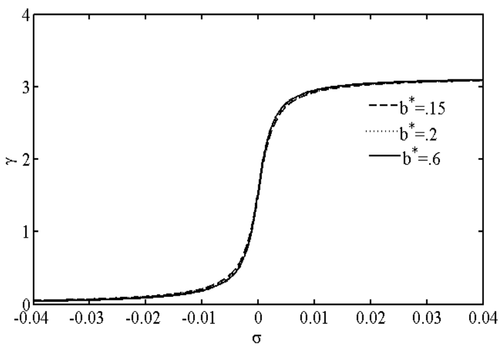
شکل ۱۱: پاسخ فرکانسی میکروتیر در فاصله‌های اولیه متفاوت سوزن تا نمونه در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{3}\omega_0$



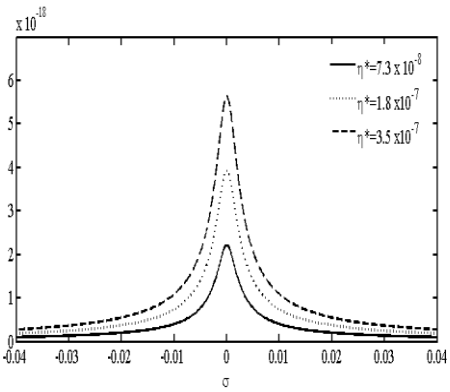
شکل ۱۲: نمودار فاز میکروتیر در فاصله‌های اولیه متفاوت سوزن تا نمونه در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{3}\omega_0$



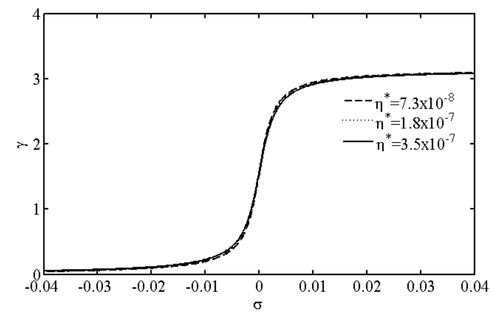
شکل ۱۳: نمودار پاسخ فرکانسی میکروتیرهای با عرض متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{3}\omega_0$



شکل ۱۴: نمودارفاز میکروتیرهای با عرض متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^*=\frac{1}{3}\omega_0$



شکل ۱۵- نمودار پاسخ فرکانسی میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^*=\frac{1}{3}\omega_0$



شکل ۱۶- نمودارفاز میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^*=\frac{1}{3}\omega_0$

۳-۲- بررسی تشدید در اطراف $\Omega^*=\frac{1}{2}\omega_0$

در معادله (۴۳) علاوه بر ضرایب $\exp(i\omega_0 T_0)$ در سمت راست معادله، ضرایب $\exp(2i\Omega^* T_0)$ به‌ازای $\Omega^*=\frac{1}{2}\omega_0$ نیز ایجاد ترم نامحدود می‌کنند. بنابراین در این حالت ترم‌های نامحدود به‌صورت زیر بوده، صفر می‌شوند.

$$-\frac{i\tilde{c}_3}{c_1}A-2iD_1A-\frac{i\tilde{c}_4\overline{A}A^2}{c_1}-$$

$$\frac{2i\tilde{c}_4A\Lambda^2}{c_1}+\frac{i\tilde{c}_3\Lambda^2\Omega^*}{c_1\omega_0}=0 \quad (۵۷)$$

با جای‌گذاری $A=\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و جداسازی ضرایب حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$-a\beta'+\frac{\tilde{c}_3}{c_1\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\sin(\sigma T_1-\beta)=0 \quad (۵۸)$$

$$\frac{a\tilde{c}_2}{2c_1}+a'+\frac{\tilde{c}_4a^3}{8c_1}+\frac{\tilde{c}_4\Lambda^2a}{c_1}-$$

$$\frac{\tilde{c}_3}{c_1\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\cos(\sigma T_1-\beta)=0 \quad (۵۹)$$

با تعریف پارامتر γ به‌صورت $\gamma=\sigma T_1-\beta$ و در نظر گرفتن شرایط پایدار به‌صورت $a'=0$ و $\gamma'=0$ داریم:

$$\frac{\tilde{c}_2a}{2c_1}+\frac{\tilde{c}_4a^3}{8c_1}+\frac{\tilde{c}_4a\Lambda^2}{c_1}=\frac{\tilde{c}_3}{c_1\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\cos(\gamma) \quad (۶۰)$$

$$a\sigma=\frac{\tilde{c}_3}{c_1\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\sin(\gamma) \quad (۶۱)$$

با حذف پارامتر γ از معادلات (۶۰) و (۶۱) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(a\sigma)^2+((\frac{c_2}{2c_1}+\frac{c_4}{c_1}\Lambda^2)a+\frac{c_4}{8c_1}a^3)^2$$

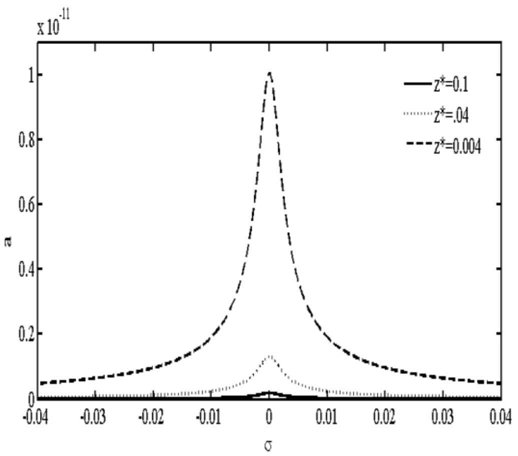
$$=(\frac{c_3}{c_1\omega_0}\Lambda^2\Omega^*)^2 \quad (۶۲)$$

رابطه (۶۲) پاسخ فرکانسی میکروتیر تحت تحریک با فرکانس تحریک $\Omega^*=\frac{1}{2}\omega_0$ است. همچنین با حذف پارامتر a معادله اختلاف فاز به دست می‌آید. برای بررسی رفتار سیستم نمودارهای پاسخ فرکانسی و فاز مطابق اشکال (۱۷)-(۲۲) ارائه شده‌اند.

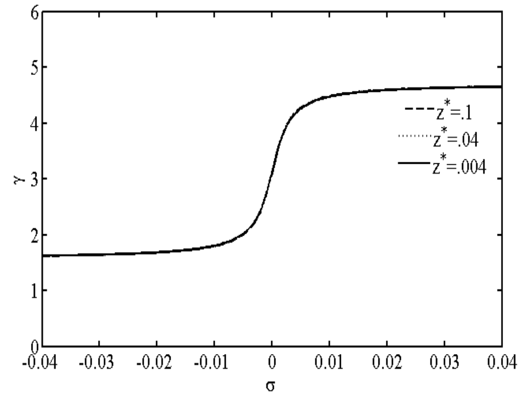
$$\frac{c_2}{2c_1}(\frac{c_3}{c_1\sigma\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\sin(\gamma))+\frac{c_4}{8c_1}(\frac{c_3}{c_1\sigma\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\sin(\gamma))^3$$

$$+\frac{c_4\lambda^2}{c_1}(\frac{c_3}{c_1\sigma\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\sin(\gamma))$$

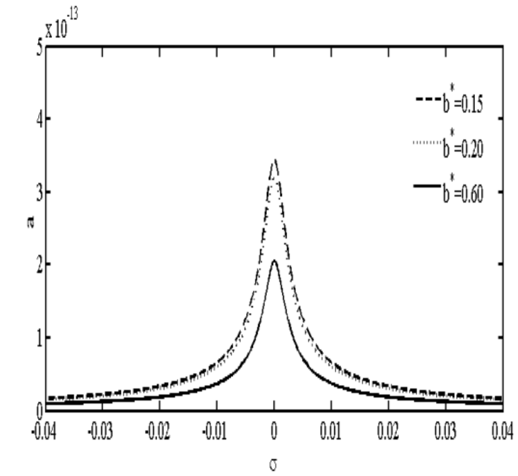
$$= \frac{c_3}{c_1\omega_0}\Lambda^2\Omega^*\cos(\gamma) \qquad (۶۳)$$



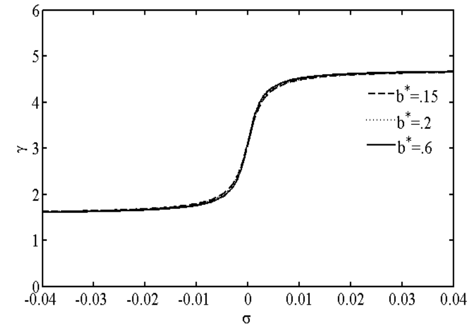
شکل ۱۷: نمودار پاسخ فرکانسی میکروتیر در فاصله‌های متفاوت سوزن تا نمونه در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$



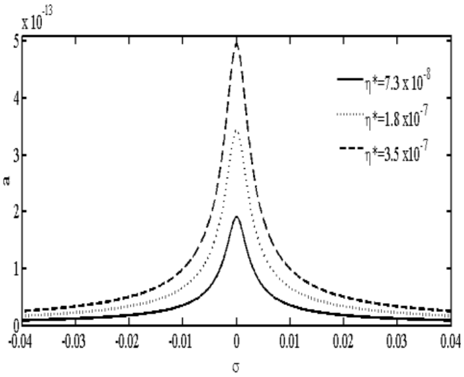
شکل ۱۸: نمودارفاز میکروتیر در فاصله‌های متفاوت سوزن تا نمونه در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$



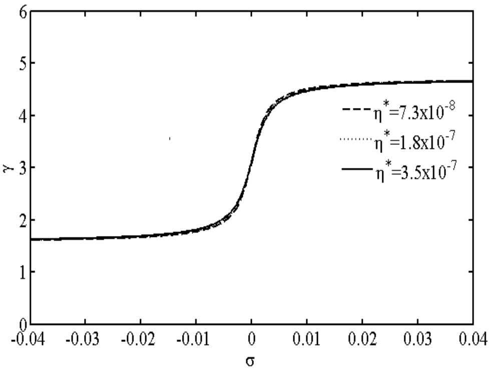
شکل ۱۹: نمودار پاسخ فرکانسی میکروتیرهای با عرض متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$



شکل ۲۰: نمودار فاز میکروتیرهای با عرض متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$



شکل ۲۱: نمودار پاسخ فرکانسی میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$



شکل ۲۲: نمودار فاز میکروتیر در سیال‌های با ویسکوزیته متفاوت در نزدیکی فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$

۳-۳- بررسی تشدید در اطراف $\Omega^* = 3\omega_0$

ضرایب $\exp(i(\Omega^* - 2\omega_0)T_0)$ به‌ازای $\Omega^* = 3\omega_0$ نیز ایجاد ترم نامحدود می‌کنند. بنابراین در این حالت برای حذف این ترم‌ها باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$-i\frac{\tilde{c}_2}{c_1}A\omega_0 - 2iD_1A\omega_0 - i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\bar{A}A^2\omega_0 - 2i\frac{\tilde{c}_4}{c_1}A\Lambda^2\omega_0 c$$

$$-\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda\bar{A}^2\Omega^* + 2\frac{\tilde{c}_4}{c_1}\Lambda\bar{A}^2\omega_0 = 0 \qquad (۶۴)$$

با جای‌گذاری $A=\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ و با جداسازی ضرایب حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$-\omega_0 a\beta' + (\frac{\tilde{c}_4}{4c_1}\Lambda a^2\Omega^* - \frac{\tilde{c}_4}{2c_1}\Lambda a^2\omega_0)$$
$$\cos(\sigma T_1 - \beta) = 0 \qquad (۶۵)$$

$$\frac{\tilde{c}_2}{2c_1}\omega_0 a + \omega_0 a' + \frac{\tilde{c}_4}{8c_1}a^3 + \frac{\tilde{c}_4}{c_1}\omega_0 a\Lambda^2$$
$$+(\frac{\tilde{c}_4}{4c_1}\Lambda a^2\Omega^* - \frac{\tilde{c}_4}{2c_1}\Lambda a^2\omega_0)\cos(\sigma T_1 - \beta) = 0 \qquad (۶۶)$$

در معادلات (۶۵) و (۶۶) و با تعریف پارامتر γ به‌صورت $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ و در نظر گرفتن شرایط پایدار به‌صورت $a'=0$ و $\gamma'=0$ داریم:

$$\frac{\tilde{c}_2 a}{2c_1} + \frac{\tilde{c}_4 a^3}{8c_1\omega_0} + \frac{\tilde{c}_4 a\Lambda^2}{c_1} =$$
$$(\frac{\tilde{c}_4\Lambda a^2\Omega^*}{4c_1\omega_0} - \frac{\tilde{c}_4\Lambda a^2}{2c_1})\Lambda^3\Omega^*\sin(\gamma) \qquad (۶۷)$$

$$a\sigma = 3(\frac{\tilde{c}_4}{4c_1\omega_0}\Lambda a^2\Omega^* - \frac{\tilde{c}_4}{2c_1}\Lambda a^2)$$
$$\cos(\sigma T_1 - \beta)\cos(\gamma) \qquad (۶۸)$$

با حذف پارامتر γ از معادلات (۶۷) و (۶۸)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\sigma^2}{9} + ((\frac{c_2}{2c_1} + \frac{c_4}{c_1}\Lambda^2) + \frac{c_4}{8c_1\omega_0}a^2)^2 =$$
$$((\frac{c_4\Lambda\Omega^*}{4c_1\omega_0} - \frac{c_4\Lambda}{2c_1})a)^2 \qquad (۶۹)$$

معادله (۶۹) تابع پاسخ فرکانسی میکروتیر در اطراف فرکانس $\Omega^* = \frac{1}{2}\omega_0$ است. این معادله یک معادله درجه ۲ برحسب a^2 است و در صورتی جواب دارد که معادله (۷۰) برقرار باشد.

$$(2(\frac{c_2}{2c_1} + \frac{c_4}{c_1}\Lambda^2)(\frac{c_4}{8c_1\omega_0}) - (\frac{c_4}{4c_1\omega_0}\Lambda\Omega^* - \frac{c_4}{2c_1}\Lambda))^2$$
$$-4(\frac{c_4}{8c_1\omega_0})^2(\frac{\sigma^2}{9} + (\frac{c_2}{2c_1} + \frac{c_4}{c_1}\Lambda^2)^2) \geq 0 \qquad (۷۰)$$

با ساده‌سازی معادله (۷۰)، معادله (۷۱) حاصل می‌شود.

$$((\frac{c_2}{2c_1} + \frac{c_4\Lambda^2}{c_1})(\frac{c_4}{8c_1\omega_0}) - (\frac{c_4\Lambda\Omega^*}{4c_1\omega_0} - \frac{c_4\Lambda}{2c_1}))^2$$
$$-((\frac{c_2}{2c_1} + \frac{c_4\Lambda^2}{c_1})(\frac{c_4}{8c_1\omega_0}))^2$$
$$\geq \frac{4}{18}(\frac{c_4}{8c_1\omega_0})^2\sigma^2 \qquad (۷۱)$$

سمت راست معادله (۷۱) همواره مثبت و سمت چپ آن یک عبارت همواره منفی است، در نتیجه این رابطه هیچ‌گاه برقرار نیست. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در اطراف $\Omega^* = 3\omega_0$ برای میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی، تشدید صورت نمی‌گیرد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع با یک تیر الاستیک پیوسته مدل‌سازی و معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر حرکت آن به روش مقیاس‌های چندگانه حل شد. با توجه به غیرخطی‌بودن سیستم، وجود دو فرکانس تشدید کمتر از فرکانس طبیعی میکروتیر برای آن اثبات شد.

همچنین نشان داده شد که میکروتیر در این مد کارکردی دارای فرکانس تشدید بیشتر از فرکانس طبیعی میکروتیر نیست. سپس رفتار میکروتیر در اطراف هر سه فرکانس تشدید مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور، پاسخ فرکانسی میکروتیر در نزدیکی فرکانس‌های تشدید به روش تحلیلی به دست آمد و تأثیر ویسکوزیته سیال، پهنای میکروتیر و فاصله اولیه بین سوزن و سطح نمونه بر آن مورد بررسی قرار گرفت.

به‌منظور بررسی صحت مدل‌سازی انجام‌گرفته، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج آزمایشگاهی و حل عددی انجام‌گرفته در مقالات دیگر مقایسه شده است.

نتایج شبیه‌سازی نشان داد که در فرکانس تشدید کوچک‌تر از فرکانس طبیعی میکروتیر، دامنه نوسانات پایدار سیستم به‌مراتب کمتر از دامنه نوسانات پایدار در تشدید در فرکانس طبیعی سیستم است. به این دلیل برای تحریک میکروسکوپ در حین کار باید از نیروهایی با فرکانس نزدیک به فرکانس طبیعی اصلی سیستم استفاده کرد. همچنین نشان داده شد که برای هر سه فرکانس تشدید،

دامنه ارتعاشات متناظر با میکروتیرهای عریض‌تر کمتر است. این اختلاف ناشی از ترم میرایی افزوده است که وابسته به عرض کانتیلیور بوده، با آن رابطه مستقیم دارد. ولی تأثیر ویسکوزیته سیال و فاصله اولیه بین میکروتیر و سطح نمونه برای فرکانس‌تحریک نزدیک فرکانس طبیعی و فرکانس‌های تشدید کمتر از آن نتایج متفاوتی داشت. برای تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی کاهش فاصله بین سوزن و سطح نمونه و افزایش ویسکوزیته سیال باعث کاهش دامنه ارتعاشات حالت دائم می‌شود، ولی برای فرکانس‌های تشدید کمتر از فرکانس طبیعی کاهش فاصله بین سوزن و سطح نمونه و افزایش ویسکوزیته سیال باعث افزایش دامنه ارتعاشات حالت دائم می‌شود. با افزایش این دو پارامتر ضریب ترم غیرخطی c_4 متناظر با ترم دمپینگ افزوده دچار کاهش شدیدی نسبت به ثابت‌های دیگر در معادله پاسخ فرکانسی می‌شود. با توجه به اینکه این ثابت در معادلات پاسخ فرکانسی با تحریک غیرهارمونیک، در سمت راست معادله به‌صورت ضریب نیرو ظاهر می‌شود، درنتیجه با افزایش این دو پارامتر کاهش دامنه ارتعاشات مشاهده می‌شود.

۵- فهرست علائم

L	طول کانتیلیور
b	عرض کانتیلیور
E	مدول الاستیسیته کانتیلیور
ρ	چگالی جرمی کانتیلیور
Ω	فرکانس طبیعی و تحریک کانتیلیور
$\bar{h}$	ضخامت کانتیلیور
H_1	ثابت هاماکر جاذبه‌ای
H_2	ثابت هاماکر دافعه‌ای
η	ویسکوزیته مایع
ρ_{liq}	چگالی مایع
c	ثابت دمپ
r_1	ثابت دمپ هیسترزیس
α	زاویه میکروکانتیلیور
k	دامنه نیروی تحریک

۶- پیوست ۱

با ضرب طرفین معادله (۱۵) در شکل مود رابطه (۱۴) و انتگرال‌گیری در سراسر طول میکروتیر، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1\left(1+\frac{\rho_a}{\rho}\right)A^*\phi^2dx^*\ddot{T}+\int_0^1\left(c^*+c^*{}_a\right)\phi^2dx^*\dot{T}$$
$$+\int_0^1 I^*r_1^*\phi''''\phi dx^*\dot{T}+\int_0^1 I^*\phi''''\phi dx^*T$$
$$=\int_0^1 f^*{}_{ext}(x^*,t^*)\phi dx^*+$$
$$\int_0^1 f^*{}_{vdw}(x^*,t^*)\phi\delta(x^*-1)dx^* \qquad (۷۲)$$

همچنین بسط تیلور ترم غیر خطی نیروی ناشی از طرف سیال و نیروی واندروالس به‌صورت زیر است:

$$\frac{\eta^*b^{*3}}{\left(D^*+l^*\cos\alpha+\left(1-x^*\right)\sin\alpha+\phi(x)\mathrm{T(t)}\cos(\alpha)\right)^3}=$$
$$\frac{\eta^*b^{*3}}{\left(D^*+l^*\cos\alpha+\left(1-x^*\right)\sin\alpha\right)^3}$$
$$-\frac{3\eta^*b^{*3}\cos\alpha.\phi(x)\mathrm{T(t)}}{\left(D^*+l^*\cos\alpha+\left(1-x^*\right)\sin\alpha\right)^4}$$
$$+\frac{6\eta^*b^{*3}\cos^2\alpha.\phi^2(x)\mathrm{T}^2\mathrm{(t)}}{\left(D^*+l^*\cos\alpha+\left(1-x^*\right)\sin\alpha\right)^5} \qquad (۷۳)$$

$$f_{vdw}=\frac{H_1}{\left(D^*-v\left(L,t\right)\right)^2}-\frac{H_2}{30\left(D^*-v\left(L,t\right)\right)^8}=$$
$$\frac{\mathrm{H}_1^*}{(-D^*+\upsilon_0)^2}-\frac{\mathrm{H}_2^*}{30(-D^*+\upsilon_0)^8}$$
$$+\left(\frac{2\mathrm{H}_1^*}{(-D^*+\upsilon_0)^3}+\frac{4\mathrm{H}_2^*}{15(-D^*+\upsilon_0)^9}\right)\phi(L)T(t)+\ldots \qquad (۷۴)$$

بنابراین ضرایب معادله ۱۷ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$M_1=\int_0^1\left(1+\frac{\rho_a}{\rho}\right)A^*\phi^2dx^*$$
$$M_2=\int_0^1 c^*\phi^2dx^*+\int_0^1 c^*{}_\infty\phi^2dx^*$$
$$+\int_0^1\frac{\eta^*b^{*3}}{\left(D^*+l^*\cos\alpha+\left(1-x^*\right)\sin\alpha\right)^3}\phi^2dx^*+\int_0^1 I^*r_1^*\phi''''\phi^2dx^*$$

$$M_3 = -\int_0^1 \frac{3\eta^* b^{*3} \cos\alpha . \phi^3}{\left(D^* + l^* \cos\alpha + \left(1 - x^*\right)\sin\alpha\right)^4} dx^*$$

$$M_4 = \int_0^1 \frac{6\eta^* b^{*3} \cos^2\alpha . \phi^4}{\left(D^* + l^* \cos\alpha + \left(1 - x^*\right)\sin\alpha\right)^5} dx^*$$

$$M_5 = \int_0^1 I^* \phi'''' \phi^2 dx^* - \left(\frac{2\mathrm{H}_1^*}{(-D^* + \upsilon_0)^3} + \frac{4\mathrm{H}_2^*}{15(-D^* + \upsilon_0)^9}\right)\phi^2(L)$$

$$M_6 = \left(\frac{\mathrm{H}_1^*}{(-D^* + \upsilon_0)^2} - \frac{\mathrm{H}_2^*}{30(-D^* + \upsilon_0)^8}\right)\phi(L)$$

$$k = \int_0^1 f \phi dx^*$$

۷- مراجع

[1] Binnig G, Calvin F, Gerber C., "Atomic force microscope", Physical review letters, 56(9), 1986.

[2] Rugar D, Hansma PK, "Atomic force microscopy", Physics today, 1990.

[3] Saenz JJ et al, "Observation of magnetic forces by the atomic force microscope", Journal of applied physics, 62(10), 1987, pp. 4293-4295.

[4] Korayem MH, Ebrahimi N, Sotoudegan MS, " Frequency response of atomic force microscopy microcantilevers oscillating in a viscous liquid: A comparison of various methods", Scientia Iranica, 18(5), 2011, pp. 1116-1125.

[5] Eysden V, Cornelis A, Sader JE, "Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope: Arbitrary mode order", Journal of applied physics, 101(4), 2007.

[6] Han W, Lindsay SM, Jing T., "A magnetically driven oscillating probe microscope for operation in liquids", Applied Physics Letters, 69(26), 1996, pp. 4111-4113.

[7] Putman CA et al, "Tapping mode atomic force microscopy in liquid", Applied Physics Letters, 64(18), 1994, pp. 2454-2456.

[8] Hansma PK et al, "Tapping mode atomic force microscopy in liquids", Applied Physics Letters, 64(13), 1994, pp. 1738-1740.

[9] Sader JE, "Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope", Journal of applied physics, 84(1), 1998, pp. 64-76.

[10] Mahdavi MH, Anoshirvan F, Dalir H., "High frequency analysis of a non-contact atomic force microscopy microcantilever", Journal of Mathematics, 6(10), 2006, pp. 423-429.

[11] Song Y, Bhushan B., "Finite-element vibration analysis of tapping-mode atomic force microscopy in liquid", Ultramicroscopy, 107(10), 2007, pp. 1095-1104.

[12] Horng TL., "Analyses of vibration responses on nanoscale processing in a liquid using tapping-mode atomic force microscopy", Applied Surface Science, 256(1), 2009, pp. 311-317.

[13] Beer S, van den Ende D, Mugele F., "Atomic force microscopy cantilever dynamics in liquid in the presence of tip sample interaction", Applied Physics Letters, 93(25), 2008.

[14] Herruzo ET, Garcia R., "Frequency response of an atomic force microscope in liquids and air: magnetic versus acoustic excitation", Applied Physics Letters, 91(14), 2007.

[15] Korayem MH, Ebrahimi N., "Nonlinear dynamics of tapping-mode atomic force microscopy in liquid", Journal of Applied Physics, 109(8), 2010.

[16] Mendez-Mendez JV, Alonso-Rasgado MT, Faria, EC, Flores-Johnson EA, Snook RD., "Numerical study of the hydrodynamic drag force in atomic force microscopy measurements undertaken in fluids", Micron, 66, 2014, pp. 37-46.

[17] Korayem MH, Ghaderi R., "Sensitivity analysis of nonlinear vibration of AFM piezoelectric microcantilever in liquid", International Journal of Mechanics and Materials in Design, 10(2), 2014. pp. 121-131.

[18] Payam AF, Fathipour M., "Effect of tip mass on frequency response and sensitivity of AFM cantilever in liquid", Micron, 70, 2015, pp. 50-54.

[19] Korayem AH, Korayem MH, Ghaderi R., "FEM analysis of the vibrational motion of oblique piezoelectric microcantilever in the vicinity of a sample surface in liquid", Precision Engineering, 2015.

[20] Delnavaz A, Mahmoodi SN, Jalili N, Zohoor H., "Linear and nonlinear approaches towards amplitude modulation atomic force microscopy", Current Applied Physics, 10(6), 2010, pp. 1416-1421.

[21] Ray W, Joseph P, Dynamic of Structure, McGraw-Hill, 1993.

[22] Jalili N, Laxminarayana K., "A review of atomic force microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences", Mechatronics, 14(8), 2004, pp. 907-945.

[23] Fox RW, McDonald AD, Pritchard PJ (2006) Introduction to fluid mechanics, John Wiley & Sons.

[24] Rao SS (2007) Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons.

[25] Kahrobaiyan MH, Rahaeifard M, Ahmadian M., "Nonlinear dynamic analysis of a V-shaped microcantilever of an atomic force microscope", Applied Mathematical Modelling, 35(12), 2011, pp. 5903-5919.

[26] Leissa AW, Qatu MS., Vibration of continuous systems. McGraw Hill Professional, 2011.

[27] Nayfeh AH, Mook DT., Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.

[28] Rankl C, Pastushenko V, Kienberger V, Stroh CM, P. Hinterdorfer P., "Hydrodynamic damping of a magnetically oscillated cantilever close to a surface", Ultramicroscopy, 100, 2004, p. 301.