محاسبه جریان و نیرومحرکه مغناطیسی میله‌های روتور در یک ماشین القایی قفس سنجابی

حمیدرضا ایزدفر[۱،*]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۷/۲۸
پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۱۰/۱۵

واژگان کلیدی:
ماشین القایی،
میله‌های روتور،
جریان،
نیرو محرکه مغناطیسی.

چکیده

در این مقاله، روش محاسبه جریان میله‌های روتور در یک ماشین القایی قفس سنجابی و نیز نیرو محرکه مغناطیسی آن معرفی می‌شود. برای این منظور به کمک معادلات دینامیکی، الگوریتم مدل‌سازی ماشین القایی براساس مدارهای معادل دارای کوپل مغناطیسی بیان می‌شود. این مدل‌سازی به گونه‌ای شکل می گیرد که جریان لحظه‌ای سیم‌پیچی‌های استاتور و همه میله‌های روتور قابل محاسبه باشند. در ادامه رابطه تحلیلی جریان میله‌های روتور استخراج می‌گردد و سپس این رابطه برای شرایط پایدار ماشین تطبیق می‌یابد. در آخرین بخش نیز با کمک تئوری تابع سیم‌پیچی و رابطه تحلیلی بدست آمده برای جریان میله‌ها، نیرو محرکه مغناطیسی روتور محاسبه خواهدشد.

۱- مقدمه

ماشین‌های القایی با خصوصیاتی چون سادگی ساختمان و هزینه نگهداری مناسب، یک تحریکه و خود راه‌انداز بودن، بیشترین کاربرد را در صنعت نسبت به دیگر انواع ماشین‌های الکتریکی دارند.

تحلیل صحیح عملکرد هر ماشین الکتریکی نیازمند محاسبه پارامترها و مدل‌سازی دقیق آن است. روش‌های متعدد و متنوعی برای تخمین پارامترها و یا مدلسازی این ماشین وجود دارد. یکی از روش‌های اصلی، محاسبات تحلیلی مدار معادل و پارامترها است [۱ و ۲]. اصول کلی این روش حل معادلات مغناطیسی پواسن و یا لاپلاس برای نواحی مختلف درون ماشین است. مرجع [۳] مدلی جدید از ماشین القایی برمبنای تحلیل فرکانس شیفت یافته معرفی می‌کند. این مدل برای تحلیل گذراها در نرم افزارها مناسب می‌باشد. یک مدل دینامیکی نیز برای مطالعات پایداری شبکه در [۴] بیان شده است. اما این مدل فقط برای شرایط دینامیکی سیستم معتبر بوده، در شرایط پایدار قابل استفاده نیست.

مدل‌سازی یک ماشین القایی با دو سیم‌پیچی سه فاز استاتور در [۵] صورت گرفته است. [۶] یک مدل ریاضی برای تحلیل حالت ماندگار و گذرای موتور القایی روتور سیم‌پیچی شده را با لحاظ توزیع واقعی سیم‌پیچی استاتور معرفی می‌کند.

در ماشین‌های القایی قفس سنجابی، در دسترس‌ترین پارامتر، جریان ترمینال‌های سیم‌پیچی استاتور است. از این جریان نیز می‌توان برای مدل‌سازی بر خط موتور تحت شرایط خطای اتصال کوتاه سیم‌پیچی استاتور استفاده کرد [۷ و ۸].

شناسایی خطاهای روتور از مطالعات مورد علاقه و توجه محققین است. بررسی اثر خرابی میله‌ها و رینگ روتور بر پارامترهای قابل اندازه‌گیری ماشین مورد توجه بسیاری از مقالات است. به علت عدم دستیابی به جریان روتور در ماشین قفسه‌ای، شناسایی خطاهای روتور معمولا با تحلیل طیف هارمونیکی جریان استاتور انجام می‌شود [۹]. در حالی که اگر مقادیر لحظه‌ای جریان میله‌ها قابل محاسبه و تعیین باشد، تحلیل خطای آن با زمان کمتر و دقت بهتر ممکن خواهد بود.

محاسبه نیرو محرکه مغناطیسی ناشی از روتور، وابسته به مقادیر جریان میله‌هاست. برای تعیین مقدار جریان، باید اندوکتانس و مقاومت آنها محاسبه شود. برخلاف تحقیقات

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: hizadfar@semnan.ac.ir
۱. استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه سمنان

مربوط به شناسایی خطا، محاسبه مقاومت و اندوکتانس روتور قفسه‌ای، مورد توجه محققین کمتری بوده‌است. محاسبه اندوکتانس میله‌های روتور، به سادگی سیم‌پیچی استاتور نیست. در [۱۰] تخمین مقاومت روتور قفسه‌ای با روشی بنام H-H به منظور شناسایی شکستگی میله‌ها انجام شده است. [۱۱] ضرایب اندوکتانس استاتور و روتور را براساس تئوری تابع سیم‌پیچی و مدار معادل مغناطیسی بیان می‌کند.

یکی از مقالات اصلی در این حوزه [۱۲] است. در این مقاله هر دو میله مجاور در روتور، به صورت بازوهای رفت و برگشت یک سیم‌پیچی مجزا مدل می‌شود. سپس برپایه تئوری تابع سیم‌پیچی اندوکتانس خودی و متقابل میله‌ها و نیز اندوکتانس متقابل میله روتور و سیم‌پیچی استاتور محاسبه می‌شود.

محاسبه اندوکتانس سیم‌پیچی استاتور و میله‌های روتور القایی با درنظرگرفتن اثر اریب‌سازی در [۱۳] نیز بیان شده است. روش اصلی محاسبه این مقاله همان روش معرفی شده در [۱۲] است. در [۱۴] مدل ماشین القایی بر پایه بردارها فضایی مختلط شارهای پیوندی محاسبه می‌شود. در این مقاله نیز محاسبه اندوکتانس میله‌ها براساس [۱۲] انجام شده است. تاثیر توزیع مکانی میله‌های روتور بر تولید هارمونیک‌های شیار روتور در [۱۵] تحلیل شده است. ابتدا مولفه‌های فرکانسی جریان استاتور برای یک ماشین سالم و سپس این مولفه‌ها برای شرایط منبع تغذیه نامتعادل با روش تحلیلی محاسبه می‌شوند.

اگرچه رابطه تحلیلی توزیع MMF ناشی از جریان‌های روتور و استاتور در [۱۶] معرفی می‌شود، لیکن در این مقاله اشاره‌ای به نحوه محاسبه مقدار و رابطه جریان روتور نشده است.

دستیابی به روش تحلیلی و یا رابطه ای مشخص برای تعیین مقادیر لحظه‌ای جریان میله‌های روتور یک موضوع مفید و کارا و یک نیاز مهم است. بررسی مطالعات و تحقیقات انجام شده که اهم آنها در مطالب بالا ذکر شد، فقدان آن‌را نشان می‌دهد. لذا در این مقاله سعی بر دست‌یابی به رابطه تحلیلی جریان لحظه‌ای میله‌های روتور خواهد بود. قابل ذکر است که اگرچه در ابتدا روش مدل‌سازی ماشین القایی (به منظور اثبات روش معرفی شده) تشریح می شود، لیکن نوآوری مقاله، استخراج رابطه جریان میله‌های روتور و تغییرات MMF ناشی از آنها (بخش‌های ۵ و ۷) است. روابط بدست‌آمده در این مقاله در مطالعات متعددی چون تشخیص خطای روتور، تحلیل عملکرد ماشین و ... کاربرد خواهد داشت.

مقاله به صورت زیر سازماندهی خواهد شد. در بخش ۲ روابط و فرمولهای دینامیکی ماشین القایی بیان می‌شود. بخش ۳ روش محاسبه اندوکتانس‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۴ روش شبیه‌سازی ماشین القایی به منظور دستیابی به همه جریان میله‌های روتور معرفی و نتایج شبیه‌سازی یک موتور نمونه بیان می‌شود. در بخش ۵ رابطه‌ای تحلیلی برای جریان میله‌های روتور استخراج می‌گردد. در بخش ۶ شبیه‌سازی در ماکسول و در بخش ۷ رابطه تحلیلی محاسبه MMF ناشی از جریان روتور بیان خواهد شد. سرانجام در آخرین قسمت نتیجه خواهد آمد.

۲- روابط دینامیکی ماشین القایی

در شرایط خطی، یک ماشین القایی را می‌توان توسط معادلات دینامیکی آن به‌شکل مدارهای الکتریکی دارای کوپل مغناطیسی و به شرح زیر توصیف کرد.

$$V_s = R_s I_s + \frac{d\Lambda_s}{dt} \quad (۱)$$

$$V_r = R_r I_r + \frac{d\Lambda_r}{dt} = [0] \quad (۲)$$

$$\Lambda_s = L_{ss} I_s + L_{sr} I_r \quad (۳)$$

$$\Lambda_r = {L_{sr}}^T I_s + L_{rr} I_r \quad (۴)$$

$$T_e = {I_s}^T \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta} I_r \quad (۵)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(T_e - T_L) \quad (۶)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (۷)$$

اگر ماشین موردنظر شامل یک سیم‌پیچی سه‌فاز در استاتور و n میله در روتور باشد، در اینصورت ماتریس‌های جریان روتور $\left[I_r\right]_{n\times1}$ ، اندوکتانس خودی و متقابل میله‌های روتور $\left[L_{rr}\right]_{n\times n}$ ، اندوکتانس متقابل استاتور و روتور $\left[L_{sr}\right]_{3\times n}$، مقاومت روتور $\left[R_r\right]_{n\times n}$ و جریان استاتور $\left[I_s\right]_{3\times1}$ تعریف خواهد شد. روابط مذکور در بخش‌های بعدی برای مدل‌سازی ماشین و نیز محاسبه جریان میله‌های روتور بکار خواهد رفت.

۳- محاسبه اندوکتانس سیم‌پیچی‌های استاتور و میله‌های روتور

یکی از مهمترین نکات برای مدل‌سازی یک ماشین الکتریکی محاسبه اندوکتانس‌های آن است. در شرایط خطی یکی از اصلی‌ترین روش‌ها تئوری تابع سیم‌پیچی است. براساس این روش اندوکتانس متقابل دو کویل i و j به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L_{ij}(\theta) = \mu_0 rl \int_0^{2\pi} g^{-1}(\varphi,\theta) N_i(\varphi,\theta) N_j(\varphi,\theta) d\varphi \qquad (۸)$$

θ موقعیت زاویه‌ای روتور، φ جابجایی زاویه‌ای بر روی استاتور، g^{-1} معکوس تابع فاصله هوایی، r شعاع، l طول موثر هسته، μ_0 پرمابلیته هسته و $N(\varphi,\theta)$ تابع سیم‌پیچی است. اگر فاصله هوایی یکنواخت و یا اندازه آن در مقایسه با شعاع روتور بسیار کوچک باشد، تابع فاصله هوایی از انتگرال خارج می‌شود.

همانند سایر ماشین‌های الکتریکی در این ماشین باید اندوکتانس‌های خودی و متقابل سیم پیچی‌های استاتور، خودی و متقابل میله‌های روتور و اندوکتانس متقابل سیم‌پیچی استاتور و میله‌های روتور محاسبه گردند.

۳-۱- اندوکتانس سیم‌پیچی‌های استاتور

با فرض توزیع سینوسی سیم‌پیچی استاتور، تابع سیم‌پیچی فاز a آن عبارتست از [۱۴]:

$$N_a(\theta) = \frac{N_s}{2} cos\theta \qquad (۹)$$

که در آن N_s تعداد دور معادل یک فاز است. توابع سیم‌پیچی دو فاز دیگر با اختلاف زاویه $\pm ۱۲۰^\circ$ تعریف می‌گردد. ماتریس اندوکتانس سیم‌پیچی استاتور عبارتست از:

$$\boldsymbol{L}_{ss} = \begin{bmatrix} L_{ls}+L_{ms} & -{}^1\!/_2\,L_{ms} & -{}^1\!/_2\,L_{ms} \\ -{}^1\!/_2\,L_{ms} & L_{ls}+L_{ms} & -{}^1\!/_2\,L_{ms} \\ -{}^1\!/_2\,L_{ms} & -{}^1\!/_2\,L_{ms} & L_{ls}+L_{ms} \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

L_{ms} و L_{ls} به ترتیب اندوکتانس‌های مغناطیس‌کننده و نشتی است و

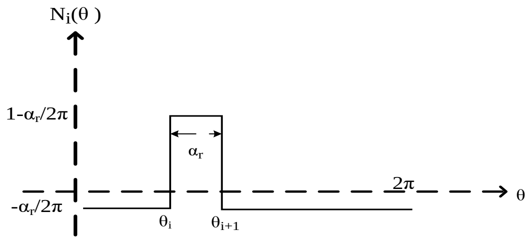
$$L_{ms} = \frac{\mu_0 rl}{g} {N_s}^2 (\frac{\pi}{4}) \qquad (۱۱)$$

۳-۲- اندوکتانس میله‌های روتور

اگر هر دو میله مجاور روتور به همراه بخش‌هایی از رینگ را به صورت یک حلقه مستقل درنظر بگیریم در این صورت تابع سیم‌پیچی این حلقه مطابق شکل (۱) خواهد بود [۱۲]. براساس این شکل اندوکتانس‌های خودی و متقابل میله‌های روتور عبارتست از:

$$L_{ii} = \frac{\mu_0 rl}{g} \alpha_r (1 - \frac{\alpha_r}{2\pi}) \qquad (۱۲)$$

$$L_{ki} = \frac{\mu_0 rl}{g} (-\frac{{\alpha_r}^2}{2\pi}) \qquad (۱۳)$$



شکل ۱: تابع سیم‌پیچی یک کویل روتور

۳-۳- اندوکتانس متقابل استاتور و روتور

اندوکتانس متقابل بین فاز a استاتور و کویل معادل i ام روتور برابرست با [۱۴]:

$$L_{ai}(\theta) = L_m \cos(\theta_r + (i-1)\alpha_r + \delta) \qquad (۱۴)$$

$$L_m = \frac{4}{\pi} \frac{\sin(\delta)}{N_s} L_{ms} \qquad (۱۵)$$

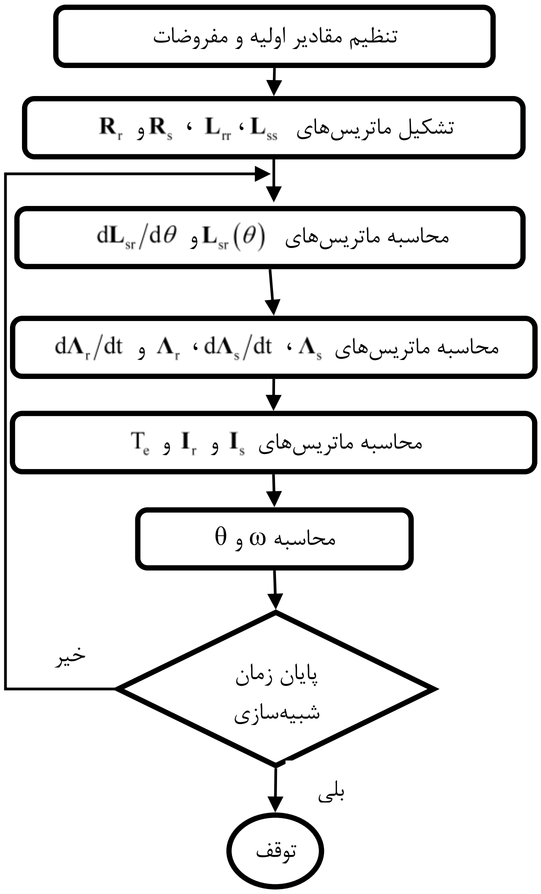
$$\delta = \frac{\alpha_r}{2} \qquad (۱۶)$$

۴- شبیه‌سازی موتور القایی

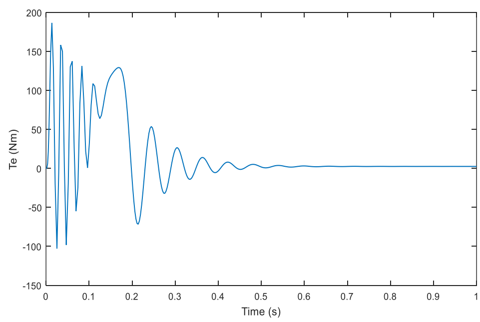
اساس شبیه‌سازی موتور القایی استفاده از روابط دینامیکی و اندوکتانس‌های آن است. فرض کنید ورودی‌های مساله بردار $\boldsymbol{V}_s$ و T_l ، متغیرهای حالت، بردارهای شار پیوندی استاتور و روتور یعنی $\boldsymbol{\Lambda}_s$ و $\boldsymbol{\Lambda}_r$ و متغیرهای خروجی بردارهای جریان $\boldsymbol{I}_s$ و $\boldsymbol{I}_r$ و گشتاور الکترومغناطیسی $\mathbf{T}_e$ باشد. فلوچارت شبیه‌سازی ماشین در شکل (۲) آمده است. با این روش جریان همه میله‌های روتور و فازهای استاتور قابل محاسبه است.

یکی از نکات مهم در فلوچارت فوق محاسبه بردار شارهای پیوندی و وجود عملگر مشتق در آنهاست. وجود این عملگر اصولا باعث کندشدن شدید محاسبات و یا گاهی واگرایی مساله می‌شود. یکی از روش‌های رفع این دو مشکل جای‌گذاری روابط (۱) و (۲) در روابط (۳) و (۴) و تشکیل معادلات انتگرالی بردارهای شارهای پیوندی است.

نکته قابل ملاحظه دیگر وجود تعداد بسیار زیاد متغیرهای حالت در مساله است. توجه کنید که عملا n+3 متغیر خروجی خواهیم داشت. نتایج شبیه‌سازی یک موتور القایی سه فاز ۴ قطبی که دارای ۲۸ میله روتور است در شکل‌های (۳) تا (۵) مشاهده می‌شود.



شکل ۲: فلوچارت شبیه‌سازی موتور القایی



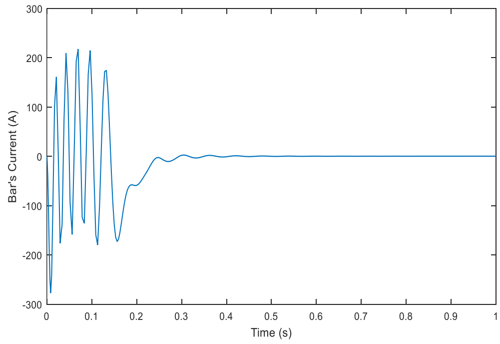
شکل ۳: تغییرات گشتاور الکترومغناطیسی

۵- استخراج فرمول برای جریان میله‌های روتور

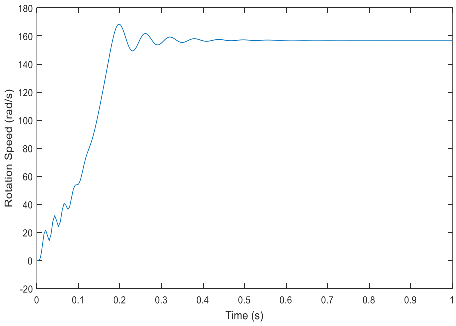
در ماشین القایی روتور قفسه‌ای دسترسی به جریان میله‌های روتور امکان‌پذیر نیست. در این بخش رابطه‌ای تحلیلی برای این جریان‌ها استخراج خواهد شد.روش کار بسیار ساده و براساس روابط دینامیکی ماشین است.

با ترکیب معادلات (۲) و (۴) رابطه (۱۷) بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{R}_r\boldsymbol{I}_r + \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{L}_{sr}{}^T\boldsymbol{I}_s + \boldsymbol{L}_{rr}\boldsymbol{I}_r\right] = [\mathbf{0}] \qquad (۱۷)$$



شکل ۴: تغییرات جریان روتور



شکل ۵: تغییرات سرعت روتور

پس از اعمال عملگر مشتق در رابطه فوق و انجام مقداری محاسبات دستی خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{L}_{rr}\frac{d\boldsymbol{I}_r}{dt} + \boldsymbol{R}_r\boldsymbol{I}_r + \left(\frac{d\boldsymbol{L}_{rr}}{dt}\right)\boldsymbol{I}_r = -\left(\frac{d\boldsymbol{L}_{sr}{}^T}{dt}\right)\boldsymbol{I}_s - \boldsymbol{L}_{sr}{}^T\frac{d\boldsymbol{I}_s}{dt} \qquad (۱۸)$$

سمت راست معادله فوق را با ماتریس $\boldsymbol{K}_S$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم:

$$\boldsymbol{L}_{rr}\frac{d\boldsymbol{I}_r}{dt} + \boldsymbol{R}_r\boldsymbol{I}_r + \left(\frac{d\boldsymbol{L}_{rr}}{dt}\right)\boldsymbol{I}_r = \boldsymbol{K}_s \qquad (۱۹)$$

$$\boldsymbol{K}_s = -\left(\frac{d\boldsymbol{L}_{sr}{}^T}{dt}\right)\boldsymbol{I}_s - \boldsymbol{L}_{sr}{}^T\frac{d\boldsymbol{I}_s}{dt} \qquad (۲۰)$$

ماتریس $\boldsymbol{L}_{rr}$ فقط شامل مقادیر ثابت است. لذا مشتق آن صفر خواهد بود و رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۱) بازنویسی می‌شود.

$$\boldsymbol{L}_{rr}\frac{d\boldsymbol{I}_r}{dt} + \boldsymbol{R}_r\boldsymbol{I}_r = \boldsymbol{K}_s \qquad (۲۱)$$

رابطه فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که با حل آن ماتریس جریان میله‌های روتور بدست می‌آید. پاسخ

عمومی این معادله عبارتست از:

$$\boldsymbol{I}_r(t) = \left(e^{\boldsymbol{L}_{rr}{}^{-1}\boldsymbol{R}_r t}\right)^{-1} \times \left[\boldsymbol{I}_{r0} + \int_0^t e^{\boldsymbol{L}_{rr}{}^{-1}\boldsymbol{R}_r \tau} \boldsymbol{L}_{rr}{}^{-1}\boldsymbol{K}_s(\tau)d\tau\right]$$ (۲۲)

با توجه به رابطه (۲۲)، مشخص است که تعیین ماتریس $\boldsymbol{I}_r$، نیازمند محاسبه ماتریس‌های مقاومت و اندوکتانس روتور و نیز ماتریس $\boldsymbol{K}_s$ است.

۵-۱- محاسبه ماتریس $\boldsymbol{K}_s$ در حالت پایدار

در شرایط پایدار بردار جریان فازهای استاتور به صورت رابطه (۲۳) قابل نمایش است.

$$\boldsymbol{I}_s(t) = I_m \times \left[\cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right]^T$$ (۲۳)

در این حالت می‌توان رابطه ساده‌تر و مشخص‌تری برای $\boldsymbol{K}_s$ را استخراج کرد.

با توجه به رابطه (۱۴) ماتریس $\boldsymbol{L}_{sr}$ به شکل رابطه (۲۴) قابل معرفی است.

$$\boldsymbol{L}_{sr} = L_m \times \begin{bmatrix} \sin(\theta_r) & \sin(\theta_r + \alpha_r) & \dots & \sin(\theta_r + (n-1)\alpha_r) \\ \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_r + \alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \dots & \sin\left(\theta_r + (n-1)\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_r + \alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \dots & \sin\left(\theta_r + (n-1)\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}_{3\times n}$$ (۲۴)

رابطه بین موقعیت مکانی روتور و سرعت چرخش در شرایط پایدار عبارتست از:

$$\theta_r = \int_0^t \omega_r(\varepsilon)d\varepsilon + \theta_r(0) = \omega_r t + \theta_r(0)$$ (۲۵)

لذا می‌توان رابطه (۲۶) را نوشت.

$$-\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{sr}{}^T = L_m\omega_r \times \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r + (n-1)\alpha_r) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + (n-1)\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ & \vdots & \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + (n-1)\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}_{n\times 3}$$ (۲۶)

با درنظرگرفتن مقادیر جریان به شکل رابطه (۲۳) و پس از انجام مقداری محاسبات مثلثاتی، رابطه (۲۷) شکل می‌گیرد.

$$\left(-\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{sr}{}^T\right)\boldsymbol{I}_s = \frac{3}{2}L_m I_m \omega_r \times \begin{bmatrix} \cos(\theta_r - \omega t - \varphi) \\ \cos(\theta_r - \omega t + \alpha_r - \varphi) \\ \dots \\ \dots \\ \cos(\theta_r - \omega t + (n-1)\alpha_r - \varphi) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$ (۲۷)

به همین روش می‌توان بخش دوم ماتریس $\boldsymbol{K}_s$ را مطابق رابطه (۲۸) استخراج کرد.

$$-\boldsymbol{L}_{sr}{}^T \frac{d}{dt}\boldsymbol{I}_s = -\frac{3}{2}L_m I_m \omega \times \begin{bmatrix} \cos(\theta_r - \omega t - \varphi) \\ \cos(\theta_r - \omega t + \alpha_r - \varphi) \\ \dots \\ \dots \\ \cos(\theta_r - \omega t + (n-1)\alpha_r - \varphi) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$ (۲۸)

با جمع روابط (۲۷) و (۲۸) ماتریس $\boldsymbol{K}_s$ بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{K}_s = \frac{3}{2}L_m I_m(\omega_r - \omega) \times \begin{bmatrix} \cos(\theta_r - \omega t - \varphi) \\ \cos(\theta_r - \omega t + \alpha_r - \varphi) \\ \dots \\ \dots \\ \cos(\theta_r - \omega t + (n-1)\alpha_r - \varphi) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \frac{3}{2}L_m I_m(\omega - \omega_r) \times \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \theta_r + \varphi) \\ \cos(\omega t - \theta_r + \varphi + \alpha_r) \\ \dots \\ \dots \\ \cos(\omega t - \theta_r + \varphi + (n-1)\alpha_r) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$ (۲۹)

این ماتریس را به شکل بسته رابطه (۳۰) نیز می‌توان معرفی کرد.

$$\boldsymbol{K}_s = \frac{3}{2}L_m I_m(\omega - \omega_r) \times \boldsymbol{F}$$ (۳۰)

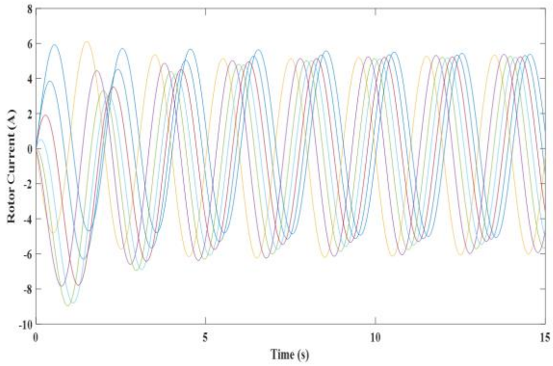
در رابطه (۳۰)، $\boldsymbol{F} = \left[F_{ij}\right]_{n\times 1}$ و درایه عمومی این ماتریس برابرست با:

$$F_{i1} = \cos(\omega t - \theta_r + \varphi + (i-1)\alpha_r) \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$ (۳۱)

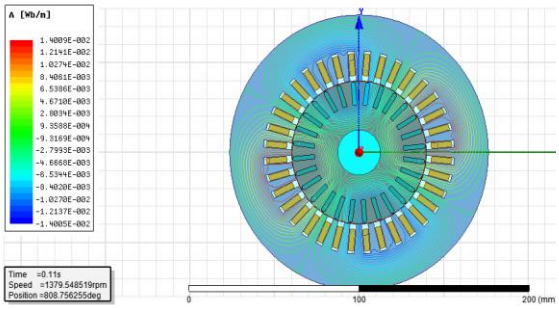
چنانچه در رابطه (۳۱) مشاهده می‌شود، فرکانس جریان های روتور در حالت پایدار $\omega - \omega_r$ است که مطابق انتظار می‌باشد. تغییرات جریان برخی از میله‌های روتور در ماشین شبیه‌سازی شده بر اساس روش فوق در شکل (۶) دیده می‌شود.

۶- شبیه‌سازی در نرم‌افزار ماکسول

در این بخش به منظور تایید روش و الگوریتم نتایج شبیه‌سازی ماشین موردنظر در نرم‌افزار ماکسول تشریح و مقایسه می‌شود. شکل (۷) مدل را در این نرم‌افزار نشان می‌دهد. تغییرات سرعت در شکل (۸) مشاهده می‌شود. همچنین تغییرات جریان میله‌های روتور در شکل (۹) آمده است. مقدار نهایی سرعت موتور با مقدار شبیه‌سازی شده در شکل (۵) یکسان است. توجه شود که در شکل (۵) سرعت زاویه‌ای و در شکل (۸) دور بر دقیقه ترسیم شده است. جریان میله‌های روتور (که برای وضوح شکل فقط جریان سه میله رسم شده است) نیز در مقدار نهایی با روش مقاله یکی است. تفاوت شکل‌ها به علت اثرات دندانه‌ها، توزیع سیم‌پیچی و احیانا اشباع هسته است. نکته قابل تامل دیگر این است که تفاوت فاز جریان میله‌های روتور نیز در شکل (۹) مشاهده می‌شود.



شکل ۶: جریان میله‌های روتور


شکل ۷: ماشین مدل شده در ماکسول

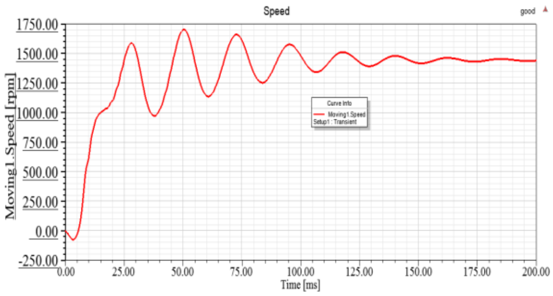
۷- محاسبه MMF ناشی از جریان میله‌های روتور

نیرو محرکه مغناطیسی ناشی از جریان‌های روتور به صورت رابطه (۳۲) قابل بیان است.

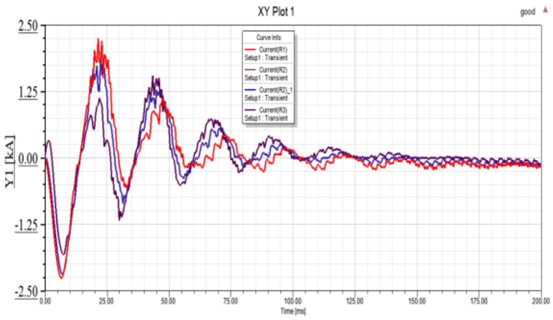
$$F_r(\theta_r,t) = \sum_{i=1}^{n} N_{ir}(\theta_r) i_{ir}(t) \qquad (۳۲)$$

که در آن i_{ir} و N_{ir} به ترتیب جریان و تابع سیم‌پیچی کویل i ام روتور می‌باشد. جریان روتور با رابطه (۲۲) و تابع سیم‌پیچی آن با توجه به شکل (۱) به‌صورت رابطه (۳۳) تعریف می‌شود.

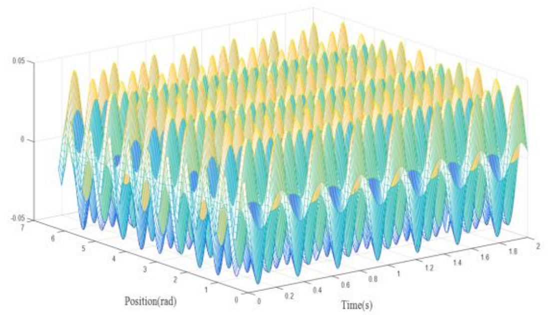
$$N_i(\theta) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_r}{2\pi} & 0 < \theta < \theta_i \\ 1-\dfrac{\alpha_r}{2\pi} & \theta_i < \theta < \theta_{i+1} \\ -\dfrac{\alpha_r}{2\pi} & \theta_{i+1} < \theta < 2\pi \end{cases} \qquad (۳۳)$$



شکل ۸: تغییرات سرعت موتور القایی



شکل ۹: تغییرات جریان روتور میله‌ها



شکل ۱۰: توزیع MMF ناشی از روتور

ماتریس تابع سیم‌پیچی روتور را می‌توان به صورت رابطه (۳۴) تعریف کرد.

$$\boldsymbol{T}_{N_r}(\theta_r) = [N_{1r} \ldots N_{nr}] \qquad (۳۴)$$

با توجه به اینکه $\boldsymbol{I}_r$ برداری از بعد n×1 و $\boldsymbol{T}_{N_r}$ برداری n×1 است، لذا می‌توان میدان ناشی از روتور را به صورت ضرب ماتریسی رابطه (۳۵) تعریف کرد.

$$F_r(\theta_r,t) = \boldsymbol{T}_{N_r}(\theta_r).\boldsymbol{I}_r(t) \qquad (۳۵)$$

تابع سیم‌پیچی همواره تابعی است زوج با مقدار متوسط صفر. لذا برای آن سری فوریه کسینوسی با ضرایب $a_0 = b_n = 0$ محاسبه خواهد شد. اگر سری فوریه معادل شکل (۱) را محاسبه کنیم رابطه (۳۶) خواهیم رسید.

$$N_{1r}(\theta_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} sin \frac{n\alpha_r}{2} \cos n\theta_r \quad (۳۶)$$

لذا تابع سیم پیچی i امین حلقه روتور برابرست با:

$$N_{ir}(\theta_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} sin \frac{n\alpha_r}{2} \cos n(\theta_r - (i-1)\alpha_r)) \quad (۳۷)$$

اگر جریان هر میله روتور را فقط شامل هارمونیک اول و به صورت رابطه (۳۸) در نظر بگیریم،

$$I_i = I_{br}\sin((\omega - \omega_r)t + (i-1)\alpha_r + \varphi_i) \quad (۳۸)$$

در این صورت توزیع میدان ناشی از جریان روتور در شرایط پایدار ماشین برابر است با:

$$F_r(\theta_r, t) = \sum_{i=0}^{n} N_{ir}(\theta_r)\, I_i(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{n=0}^{\infty} K_n \{\sin(\omega_s t + n\theta_r + (i-1)(1+n)\alpha_r + \varphi_i) + \sin(\omega_s t - n\theta_r + (1-n)(i-1)\alpha_r + \varphi_i)\} \quad (۳۹)$$

که در آن

$$K_n = \frac{1}{n\pi} sin \frac{n\alpha_r}{2} I_{br} \quad (۴۰)$$

$$\omega_s = \omega - \omega_r \quad (۴۱)$$

در حالت کلی و برای درنظرگرفتن همه هارمونیک‌های جریان روتور می‌توان از رابطه (۲۲) به جای (۳۸) استفاده کرد. تغییرات میدان ناشی از جریان روتور در موتور نمونه را می توان در شکل (۱۰) مشاهده کرد.

در این شکل سرعت روتور مقدار نهایی خود را داراست و تغییرات زمانی و مکانی نیرو محرکه مغناطیسی قابل مشاهده است. دامنه این میدان نسبت به جریان روتور پریونیت شده است.

۸- نتیجه‌گیری

کار اصلی این مقاله استخراج معادلات ماتریسی برای جریان میله‌های روتور در یک ماشین القایی است. این رابطه در تحلیل عملکرد ماشین و وضعیت میله‌های روتور قابل استفاده است. همچنین با انجام محاسبات ریاضی و مثلثاتی، رابطه بدست آمده برای شرایط پایدار ماشین تطبیق یافت. از آنجا که تحلیل میدان‌های مغناطیسی نیز از موضوعات مهم و کاربردی است، لذا در ادامه روابط تحلیلی برای MMF تولیدی توسط جریان میله‌های روتور استخراج گردید.

۹- مراجع

[1] K. Boughrara, N. Takorabet, R. Ibtiouen, O. Touhami, and F. Dubas, "Analytical analysis of cage rotor induction motors in healthy, defective, and broken bars conditions", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 51, NO. 2, February 2015, pp. 1 – 17.

[2] J. Delphin, Y. Lefèvre, F. Biais, M. Tunzini, and C. Henaux, "Analytical Calculation of Equivalent Circuit Parameters Accounting for Deep Bar Effect in Multiple-Cage Squirrel Cage Rotor", InElectrical Machines (ICEM), 2014 International Conference, September 2014, pp. 65 – 71.

[3] P. Zhang, J. R. Marti, and H. W. Dommel, "Induction Machine Modeling Based on Shifted Frequency Analysis", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 24, NO. 1, February 2009, pp. 157 – 164.

[4] L. Pereira, D. Kosterev, P. Mackin, D. Davies, J. Undrill, and W. Zhu, "An Interim Dynamic Induction Motor Model for Stability Studies in the WSCC", IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 17, NO. 4, November 2002, pp. 1108 – 1115.

[5] D. Foito, J. Maia, V. Fernão Pires, and J. F. Martins, "Double Three- phase Induction Machine Modeling for Internal Fault Simulation", Electric Power Components and Systems, Vol. 43, NO. 14, August 2015, pp. 1610 – 1620.

[6] A. Wright, A. K. Wallace, and S. Carneiro, "A Mathematical Model of Three Phase Induction Machines", Electric Machines & Power Systems, Vol. 1, NO. 3, January 1977, pp. 217 – 228.

[7] G. M. Joksimović, J. Riger, T. M. Wolbank, N. Perić, and M. Vašak, "Startor current spectrum signature of Healthy cage Rotor induction Machines", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 60, NO. 9, September 2013, pp. 4025 – 4033.

[8] A. Gandhi, T. Corrigan, and L. Parsa, "Recent Advances in Modeling and Online Detection of Stator Interturn Faults in Electrical Motors", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 58, NO. 5, May 2011, pp. 1564 – 1575.

[9] S. M. A. Cruz, and A. J. Maroues, "Rotor cage fault Diagnosis in three-phase Induction Motors by Extended Parks Vector Approach", Electric Machines and Power System, Vol. 28, NO. 4, April 2000, pp. 289 – 299.

[10] N. Nait-asaid, M. S. Nait Said, and N. Bouguechal, "Rotor Resistance Estimation of an Induction Motor to Detect Broken Bars Fault Using H-H Method", Electric Power Components and Systems, Vol. 32, NO. 2, February 2004, pp. 149 – 161.

[11] H. Meshgin-Kelk, J. Milimonfared, and H. A. Toliyat, "A comprehensive Method for the Calculation of Inductance Coefficients of Cage Induction Machine", IEEE Transactions on Energy Conversation, Vol. 18, NO. 2, June 2003, pp. 187 – 193.

[12] X. Luo, Y. Luo, H. A. Toliyat, A. El-Antably, and T. A. Lipo, "Multiple Coupled Circuit Modeling of Induction Machines", IEEE Transaction on Industry Applications, Vol. 31, NO. 2, March 1995, pp. 311 – 318.

[13] J. M. Gojko, D. D. Momir, and O. B. Aleksandar, "Skew and Linear Rise of MMF Across Slot Modeling-Winding Function Approach", IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol. 14, NO. 3, September 1999, pp. 315 – 320.

[14] A. R. Munoz, and T. A. Lipo, "Complex Vector Model of the Squirrel Cage Induction Machine Including Instantaneous Rotor Bar currents", IEEE transactions on industry applications, Vol. 35, NO. 6, November 1999, pp. 1332 – 1340.

[15] M. Y. Babaa, and A. K. Boucherma, "Analytical Analysis of rotor slot harmonics in the line current of squirrel cage induction motors", Journal of Electrical Engineering, Vol. 57, NO. 1, 2006, pp. 12 – 19.

[16] G. Joksimovic, M. Djurovic, and J. Penman, "Cage Rotor MMF: Winding Function Approach", IEEE Power Engineering Review, Vol. 21, NO. 4, April 2001, pp. 64 – 66.