مقایسه کارایی مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح برای حل مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای

محمدمهدی نصیری[۱،*]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۱/۱۶
پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۳۱

واژگان کلیدی:

کارگاه مرحله‌ای،
زمان‌بندی،
مجموع وزن‌دار دیرکردها،
مساله کار کارگاهی.

چکیده

توسعه و تعمیم مدل‌های کلاسیک برای نزدیک شدن به شرایط دنیای واقعی همواره مورد توجه محققان قرار دارد. به همین جهت، تا کنون تلاش‌های زیادی برای توسعه مساله کار کارگاهی صورت گرفته است. مساله کارگاه مرحله‌ای به عنوان تعمیمی از کارگاه مخلوط و حالت خاصی از کارگاه عمومی تعریف می‌شود. در یک کارگاه مرحله‌ای، هر کار دارای چندین مرحله و هر مرحله شامل یک یا چند عمل است. یک مرحله، زیر مجموعه‌ای از عمل‌های یک کار است که می‌تواند به هر ترتیب دلخواهی انجام شود، در حالی که مراحل باید به ترتیب از پیش تعیین شده مورد پردازش قرار گیرند. به عبارت دیگر تا تمامی عمل‌های یک مرحله انجام نشوند، هیچ یک از عمل‌های مرحله بعدی نمی‌تواند شروع شود. در این مقاله، برای هر یک از دو مساله «زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای با معیار طول مدت ساخت» و «زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای با معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها»، دو مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط (در مجموع چهار مدل) ارائه شده و سپس این دو مدل از نظر کارایی حل مساله مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. برای ارزیابی کارایی مدل‌های ارائه شده (با الگوگیری از مسائل استاندارد کار کارگاهی)، مسائل نمونه‌ای تولید شده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که مدل دوم از کارایی بیشتری برخوردار است.

۱- مقدمه

برنامه‌ریزی و زمان‌بندی فرایندهای تصمیم‌گیری هستند که در بسیاری از صنایع تولیدی و خدماتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این اَشکال تصمیم‌گیری نقش مهمی در تدارکات و تولید، در حمل و نقل و توزیع و در پردازش اطلاعات و ارتباطات بر عهده دارند. وظایف برنامه‌ریزی و زمان‌بندی در یک شرکت بر مبنای فنون ریاضی و روش‌های ابتکاری برای تخصیص منابع محدود به فعالیت‌هایی که باید انجام شوند، قرار دارند.

مدل کار کارگاهی (Job shop) و تعمیم‌های آن از جذاب‌ترین مباحث مطرح در علم زمان‌بندی و توالی عملیات محسوب می‌شود. یکی از مشهورترین تعمیم‌های مدل کار کارگاهی، کارگاه مخلوط (Mixed shop) می‌باشد و به عنوان تعمیمی از کارگاه مخلوط، مساله کارگاه عمومی (General Shop) تعمیم‌یافته‌ترین مساله زمان‌بندی کارگاه است.

اخیرا برای حل مساله کار کارگاهی الگوریتم‌های متنوعی ارائه شده است. نصیری و کیانفر [۱] الگوریتم هدایت شده‌ای معرفی کرده‌اند که از ترکیب روش‌های جستجوی ممنوع و ارتباط مسیر ساخته شده است. همچنین این نویسندگان [۲] ترکیب جستجوی تعادل سراسری و جستجوی ممنوع را برای حل مساله کار کارگاهی بکار

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mmnasiri@ut.ac.ir
۱. استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

برده‌اند. بک و همکارانش [۳] با ترکیب برنامه‌ریزی محدودیت‌ها و جستجوی محلی الگوریتم موفقی را توسعه داده‌اند. همچنین، مقاله امین ناصری و بهشتی‌نیا [۴] در رابطه با زمان‌بندی دسته‌ای در محیط جریان کاری منعطف، دارای نوآوری چشم‌گیری می‌باشد.

کارگاه مخلوط، ترکیبی از کار کارگاهی و کارگاه باز می‌باشد و در شکل کلی خود مساله‌ای NP-hard است. در این مساله کارها به دو مجموعه افراز می‌شوند به طوری که کارهای یک مجموعه از نوع کار کارگاهی و کارهای مجموعه دیگر از نوع کارگاه باز می‌باشد. شاخلویچ و همکارانش [۵] روی پیچیدگی مسایل کارگاه مخلوط تحت شرایط مختلف بحث کرده‌اند و مرز بین مسایل قابل حل در زمان چند جمله‌ای و مسایل NP-hard را مشخص نموده‌اند. مساله کارگاه مرحله‌ای نمی‌تواند به وسیله کارگاه مخلوط مدل‌سازی شود، زیرا برخی از کارها قابل تخصیص به هیچ‌یک از دو زیر مجموعه افراز شده نیستند.

علاوه‌براین، کارگاه عمومی نیز برای حل موثر مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای بیش از حد عمومی است. در مساله کارگاه عمومی محدودیتی روی روابط پیش‌نیازی بین عمل‌ها وجود ندارد به طوری که عمل یک کار می‌تواند پیش‌نیاز عمل کار دیگری باشد. چنین فرضی گراف مساله را پیچیده می‌سازد و به نظر می‌رسد که در دنیای واقعی کاربرد کمی داشته باشد. برای مثال، عمل برش یک قطعه کار می‌تواند پیش‌نیاز سوراخ‌کاری همان قطعه باشد اما عموما نمی‌تواند پیش‌نیاز عمل سوراخ‌کاری قطعه دیگری باشد.

کارگاه مرحله‌ای، اولین بار توسط نصیری و کیانفر [۶] مطرح شد. این مدل یکی از مدل‌های پرکاربرد و واقع‌گراست که در آن هر کار از مراحلی تشکیل شده است که باید به ترتیب از پیش تعیین شده‌ای انجام شوند. هر مرحله شامل تعدادی عملیات می‌باشد به طوری که بر خلاف خود مرحله‌ها ترتیب از پیش تعیین شده‌ای برای انجام عملیات موجود در یک مرحله وجود ندارد.

تاکنون بیشتر پژوهش‌های انجام شده در رابطه با مسائل زمان‌بندی و در مورد مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای (تا جایی که می‌دانیم) تمامی پژوهش‌های انجام شده با معیار عملکرد طول مدت ساخت ($C_{\max}$) بوده است. با گذشت زمان و عبور از دوره تولید انبوه، امروزه رغبت شرکت‌ها به استفاده از سیستم‌های تولیدی ساخت بر اساس سفارش[۱] به جای سیستم‌های تولیدی ساخت برای انبار[۲] بیشتر شده است. در شرایط جدید، برای هر سفارش، موعد تحویلی وجود دارد و وقتی موعد تحویل یک کار مشخص شد، شرکت تمامی تلاش خود را برای تحویل به موقع محصول انجام خواهد داد تا شامل جریمه دیرکرد نشود. بنابراین، معیارهای عملکرد مرتبط با موعد تحویل (d_j) اکنون بیشتر مورد نیاز هستند. در میان این معیارهای عملکرد، مجموع وزن‌دار دیرکردها ($TWT = \sum_{j=1}^{n} w_j T_j$) که در آن $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$ عوامل تاثیرگذار بر سود محصولات ساخت بر اساس سفارش را بهتر منعکس می‌نماید.

در این مقاله، دو مساله «زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای با معیار طول مدت ساخت» و «زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای با معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها» مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار ادامه مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم، مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای را تعریف می‌نماییم و دو مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط برای آن معرفی می‌کنیم. بخش سوم، چگونگی تولید مسائل نمونه را بیان می‌نماید. در بخش چهارم عملکرد محاسباتی مدل‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرد و نتایج محاسباتی ارائه می‌شود. در نهایت، بخش پنجم به نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲- تعریف مساله، فرمول‌بندی و نمادگذاری

همانطور که پیش از این اشاره شد، کارگاه مرحله‌ای به عنوان تعمیم کارگاه مخلوط و حالت خاص مساله کارگاه عمومی تعریف می‌شود. در یک کارگاه مرحله‌ای، هر کار شامل مراحلی است به طوری که هر مرحله از تعدادی عمل[۳] تشکیل شده است. به عبارت دیگر، هر مرحله زیرمجموعه‌ای از عملیات یک کار است، به گونه‌ای که این عملیات به هر ترتیب نسبی دلخواهی می‌توانند مورد پردازش قرار گیرند. بنابراین، اگر یک مرحله شامل تمامی عملیات یک کار باشد، مانند یک کار کارگاه باز در مساله کارگاه مخلوط خواهد بود. از طرف دیگر در مساله کارگاه مرحله‌ای مراحل یک

[۱] Make To Order (MTO)

[۲] Make To Stock (MTS)

[۳] منظور از «عمل» ترجمه کلمه operation است و به همین ترتیب، برای جمع آن یکی از دو کلمه «عملیات» یا «عمل‌ها» به کار رفته است.

کار (مشابه عملیات یک کار در مساله کار کارگاهی) باید طبق یک ترتیب از پیش تعیین شده پردازش شوند. بنابراین، اگر هر یک از مراحل یک کار مشخص تنها شامل یک عمل باشد، کار مورد نظر مانند یک کار کار کارگاهی در مساله کارگاه مخلوط خواهد بود. به این ترتیب کارگاه مرحله‌ای تعمیمی از مساله کارگاه مخلوط است. ذکر این نکته لازم است که در کارگاه مرحله‌ای عملی از یک کار تنها می‌تواند پیش‌نیاز عملی دیگر از همان کار باشد و با عملیات کارهای دیگر ارتباطی پیدا نمی‌کند.

مجموعه‌ای از کارها $J = \{1, 2, \dots, n\}$ ، مجموعه‌ای از ماشین‌ها $M = \{1, 2, \dots, m\}$ و مجموعه‌ای از عمل‌ها $O = \{*, 1, \dots, o, o + 1\}$ را در نظر بگیرید که در آن دو عمل * و $o + 1$ به ترتیب، عمل‌های «شروع» و «پایان» مجازی هستند. کار j شامل s_j مرحله است به طوری که این مراحل باید به طور متوالی و به ترتیب شماره مرحله $(1, 2, \dots, s_j)$ انجام شوند. این بدان معناست که وقتی پردازش تمام عمل‌های مرحله k تمام شد، پردازش عمل‌های مرحله $k + 1$ می‌تواند آغاز شود. عمل l باید p_l واحد زمانی بدون انقطاع روی یک ماشین از پیش تعیین شده پردازش شود. دیگر فرضیات مساله از این قرار است:

- هیچ ماشینی نمی‌تواند در آن واحد بیش از یک کار (عمل) را پردازش نماید.
- پردازش عمل‌ها نمی‌تواند قطع شود.
- تمام کارها و تمام ماشین‌ها از زمان صفر به بعد در دسترس هستند و خراب نمی‌شوند.
- هر کار حداکثر یک بار از هر یک از ماشین‌ها بازدید می‌نماید، به عبارت دیگر گردش مجدد[۱] مجاز نیست.
- رابطه پیش‌نیازی بین عمل‌های کارهای مختلف مجاز نیست.
- H_{jk} به عنوان مجموعه عملیات مرحله k کار j تعریف می‌شود. بنابراین، مرحله k کار j شامل $|H_{jk}|$ عمل است به طوری که بین عمل‌های یک مرحله هیچ گونه رابطه پیش‌نیازی وجود ندارد و آنها می‌توانند به هر ترتیب دلخواهی انجام شوند.
- زمان حمل و نقل بین ماشین‌ها صفر در نظر گرفته می‌شود.
- فضای ذخیره موقت بین ماشین‌ها بی‌نهایت است.

یکی از مدل‌هایی که برای تبیین بیشتر مسائل زمان‌بندی مورد استفاده قرار می‌گیرد، مدل گراف انفصالی است. در زیربخش بعدی مدل گراف انفصالی را برای مساله کارگاه مرحله‌ای مطرح می‌نماییم.

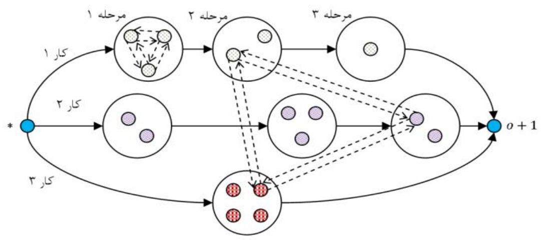
۲-۱- مدل گراف انفصالی

یک گراف انفصالی می‌تواند نمایش‌دهنده کمینه‌سازی طول مدت ساخت در یک کارگاه مرحله‌ای باشد. گراف جهت دار $G = (N, A \cup B)$ را به این صورت در نظر بگیرید: گره‌های N نماد مجموعه تمام عمل‌ها و A نماد مجموعه کمان‌های ربطی (خطوط توپر) است که مراحل متوالی یک کار را به هم متصل می‌نمایند. دو عملی که باید روی یک ماشین پردازش شوند با دو کمان انفصالی (خطوط بریده) که جهت آنها معکوس هم است به یکدیگر متصل می‌شوند. این مطلب برای دو عملی که متعلق به یک مرحله از یک کار هستند نیز صحیح است. مجموعه کمان‌های انفصالی B تشکیل دهنده $m + \sum_j s_j$ خوشه از کمان‌های دوتایی هستند؛ برای هر ماشین یک خوشه و s_j خوشه برای مراحل کار j (خوشه، اصطلاحی در نظریه گراف است که به گرافی که هر دو گره آن به یکدیگر متصل هستند اطلاق می‌شود؛ در این مورد، هر اتصال در خوشه شامل یک زوج از کمان‌های انفصالی است. رویکرد خوشه‌ای اولین بار توسط کارلیر و پینسُن [۷] در ۱۹۸۹ برای مساله کار کارگاهی به کار برده شد.)

از گره * کمان‌های ربطی به گره‌های متناظر با عمل‌های مرحله اول هر کار وارد می‌شوند و از گره‌های متناظر با عمل‌های مرحله آخر هر کار کمان‌های ربطی به گره $o + 1$ وارد می‌شوند. طول کمان‌هایی که از هر یک از گره‌ها شروع می‌شوند (چه ربطی باشند و چه انفصالی) برابر مدت زمان پردازش عمل مربوط به همان گره است. هم‌چنین، طول کمان‌های نشأت گرفته از گره * برابر صفر است.

در شکل (۱) گراف جهت‌دار برای مثالی از مساله کارگاه مرحله‌ای نشان داده شده است. در این مساله، سه کار وجود دارد. کار ۱ و ۲ هر یک شامل سه مرحله و کار ۳ شامل یک مرحله است. به طور مثال در مرحله ۱ از کار ۱ سه عمل وجود دارد. وقتی این سه عمل انجام شدند آنگاه یکی از عمل‌های موجود در مرحله ۲ می‌تواند آغاز گردد.

---
۱ Recirculation



شکل ۱- گراف جهت‌دار برای یک مثال از مساله کارگاه مرحله‌ای

۲-۲- مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط اول

معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها:

نمادهای به کار رفته در مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط مساله کارگاه مرحله‌ای عبارتند از:

n : تعداد کارها

m : تعداد ماشین‌ها

j, l : زیرنویس (اندیس) برای کارها $\{1, 2, \dots, n\}$

i : زیرنویس برای ماشین‌ها $\{1, 2, \dots, m\}$

s_j : تعداد مراحل کار j

N_{kj} : تعداد عملیات موجود در مرحله kام کار j

k : زیرنویس مراحل $\{1, 2, \dots, s_j\}$

I_i : مجموعه عمل‌هایی که باید روی ماشین i پردازش شوند.

J_j: مجموعه عمل‌های کار j

w_j : وزن کار j که نشان دهنده اهمیت آن است.

H_{jk} : مجموعه عمل‌های مرحله k از کار j

p_{ji} : زمان پردازش کار j روی ماشین i

r_{jkui} : برابر یک اگر uامین عمل kامین مرحله کار j به ماشین i نیاز داشته باشد؛ درغیراینصورت برابر صفر

y_{jli} : متغیر تصمیم صفر و یک به طوری که اگر کار j پیش از کار l (البته نه لزوما بلافاصله پیش از آن) روی ماشین i انجام شود برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر خواهد بود.

δ_{jkuv} : متغیر تصمیم صفر و یک به طوری که اگر uامین عمل kامین مرحله کار j پیش از vامین عمل kامین مرحله کار j انجام شود برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر خواهد بود.

x_{ji} : متغیر تصمیم که زمان شروع کار j روی ماشین i را مشخص می‌کند.

C_j : زمان تکمیل آخرین عمل کار j

T_j : دیرکرد کار j

Υ : یک عدد بزرگ

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} w_j T_j$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} &\Upsilon y_{jli} + (x_{li} - x_{ji}) \geq p_{ji} \\ &\Upsilon (1 - y_{jli}) + (x_{ji} - x_{li}) \geq p_{li} \end{aligned} \qquad 1 \leq l < j \leq n, i = 1, \dots, m \qquad (۱-۲)$$

$$\begin{aligned} &\Upsilon \delta_{jkuv} + \sum_{i=1}^{m} r_{jkui} x_{ji} \geq \sum_{i=1}^{m} r_{jkvi} (x_{ji} + p_{ji}) \\ &\Upsilon (1 - \delta_{jkuv}) + \sum_{i=1}^{m} r_{jkvi} x_{ji} \geq \sum_{i=1}^{m} r_{jkui} (x_{ji} + p_{ji}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &1 \leq u < v \leq N_{jk}, i = 1, \dots, m \\ &j = 1, \dots, n \end{aligned} \qquad (۲-۲)$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_{jkui} (x_{ji} + p_{ji}) \leq \sum_{i=1}^{m} r_{j(k+1)vi} x_{ji} \qquad \begin{aligned} &u = 1, \dots, N_{jk}, v = 1, \dots, N_{jk+1} \\ &j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, s_j - 1 \\ &i = 1, \dots, m \end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_{js_jui} (x_{ji} + p_{ji}) \leq C_j \qquad \begin{aligned} &u = 1, \dots, N_{s_jk}, j = 1, \dots, n \\ &i = 1, \dots, m \end{aligned} \qquad (۴-۲)$$

$C_j - T_j \geq d_j$	$j = 1, \dots, n$	(۵-۲)
$C_j \geq 0, T_j \geq 0$	$j = 1, \dots, n$	(۶-۲)
$x_{ji} \geq 0$	$j = 1, \dots, n \ , i = 1, \dots, m$	(۷-۲)
$y_{jli} \in \{0,1\}$	$1 \leq l < j \leq n \, , i = 1, \dots, m$	(۸-۲)
$\delta_{jkuv} \in \{0,1\}$	$j = 1, \dots, n \ , k = 1, \dots, s_j$ $1 \leq u < v \leq N_{jk}$	(۹-۲)

مجموعه محدودیت‌های (۲-۱) الزام می‌نماید که در هر لحظه از زمان تنها یک کار می‌تواند روی یک ماشین پردازش شود. مجموعه محدودیت‌های (۲-۲) اطمینان می‌دهد که عملیاتی که مربوط به یک مرحله هستند به طور هم‌زمان نمی‌توانند پردازش شوند. مجموعه محدودیت (۲-۳) این نیازمندی را که عمل‌های یک مرحله نمی‌توانند پیش از آنکه تمامی عملیات مرحله قبل تکمیل شده باشد، آغاز شوند ایجاد می‌نماید. مجموعه محدودیت (۲-۴) زمان تکمیل هر یک از کارها و مجموعه محدودیت‌های (۲-۵) و (۲-۶) دیرکرد هر یک از کارها را محاسبه می‌نماید. محدودیت‌های غیرمنفی بودن برای x_{ji} و صفر یا یک بودن برای y_{jli} و δ_{jkuv} به ترتیب در مجموعه محدودیت‌های (۲-۷)، (۲-۸) و (۲-۹) مشخص شده‌اند.

معیار طول مدت ساخت:

برای معیار طول مدت ساخت کافی است، دسته محدودیت (۲-۵) و T_j از مدل فوق حذف شود و در دسته محدودیت (۲-۴) $C_{\max}$ جایگزین C_j شود. همچنین، تابع هدف مساله باید به $\text{Min } C_{\max}$ تبدیل شود.

معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها:

تعریف بسیاری از پارامترهای مدل دوم (n، m، j، i، s_j، k، C_j، T_j و $\varUpsilon$) در بخش ۲-۲ بیان شد. سایر پارامترها و متغیرهای مدل دوم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

O : مجموعه تمام عمل‌ها

a, b : زیرنویس عمل‌ها $\{1, 2, \dots, |O|\}$

I_i : مجموعه عمل‌هایی که باید روی ماشین i پردازش شوند.

J_j : مجموعه عمل‌های کار j

H_{jk} : مجموعه عمل‌های مرحله k از کار j

p_a : زمان پردازش عمل a

$\varUpsilon$: یک عدد بزرگ

x_a : متغیر تصمیمی که زمان شروع عمل a را مشخص می‌نماید.

y_{ab} : متغیر تصمیم صفر و یک به طوری که اگر عمل a پیش از عمل b انجام شود یک و در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود.

۲-۳- مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط دوم

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} w_j T_j$$

$s.t.$

$x_a - x_b + \varUpsilon y_{ab} \geq p_b$ $x_b - x_a + \varUpsilon(1 - y_{ab}) \geq p_a$	$a, b \in H_{jk} \, , a \neq b \, ,$ $j = 1, \dots, n \, , k = 1, \dots, s_j$	(۱۰-۲)
$x_a - x_b + \varUpsilon y_{ab} \geq p_b$ $x_b - x_a + \varUpsilon(1 - y_{ab}) \geq p_a$	$a, b \in I_i \, , a \neq b \, , i = 1, \dots, m$	(۱۱-۲)
$x_a - x_b \geq p_b$	$a \in H_{jk} \, , b \in H_{jk-1} \, ,$ $j = 1, \dots, n \, , k = 2, \dots, s_j$	(۱۲-۲)

$$C_j - x_a \geq p_a \qquad a \in H_{js_j}\,, j = 1, \dots, n \tag{۱۳-۲}$$

$$C_j - T_j \geq d_j \qquad j = 1, \dots, n \tag{۱۴-۲}$$

$$C_j \geq 0, T_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \tag{۱۵-۲}$$

$$x_a \geq 0 \qquad a \in O \tag{۱۶-۲}$$

$$y_{ab} \in \{0,1\} \qquad a, b \in O\,, a < b \tag{۱۷-۲}$$

مجموعه محدودیت‌های (۲-۱۰) و (۲-۱۱) بیان می‌کند که یا پردازش عمل a باید پس از خاتمه عمل b و یا پردازش عمل b باید پس از خاتمه عمل a آغاز گردد. این بدان معناست که دو عمل نمی‌تواند به طور هم‌زمان پردازش شود و هیچ پیش‌نیازی از پیش تعیین شده‌ای نیز وجود ندارد. تمایز بین دو مجموعه محدودیت آن است که در مجموعه محدودیت (۲-۱۰)، عمل‌های a و b متعلق به یک مرحله از یک کار هستند در حالی که در مجموعه محدودیت (۲-۱۱) عمل‌های a و b دو عملی هستند که باید توسط یک ماشین پردازش شوند. مجموعه محدودیت (۲-۱۲) الزام می‌نماید که عمل‌های یک مرحله تنها پس از خاتمه تمامی عمل‌های مراحل پیش از آن می‌تواند آغاز گردد. مجموعه محدودیت‌های (۲-۱۳) زمان تکمیل هر یک از کارها و مجموعه محدودیت‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۵) دیرکرد هر یک از کارها را محاسبه می‌نمایند. مجموعه محدودیت (۲-۱۶) اطمینان می‌دهد که تمام عمل‌ها پس از زمان صفر آغاز گردند. مجموعه محدودیت (۲-۱۷) نوع متغیرهای صفر و یک را مشخص می‌نماید.

معیار طول مدت ساخت:

برای معیار طول مدت ساخت کافی است، دسته محدودیت (۲-۱۴) و T_j از مدل فوق حذف شود و در دسته محدودیت (۲-۱۳) $C_{\max}$ جایگزین C_j شود. همچنین، تابع هدف مساله باید به $\text{Min } C_{\max}$ تبدیل شود.

۳-تولید مسائل نمونه

برای مقایسه کارایی دو مدل، نیازمند مسائلی هستیم که آن‌ها را توسط دو مدل حل نماییم. به این‌گونه مسائل اصطلاحا مسائل نمونه می‌گویند. مسائل نمونه‌ای برای مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای با معیار عملکرد $C_{\max}$ توسط نصیری و کیانفر [۶] ارائه شده است. اما به دلیل اینکه ابعاد این مسائل بزرگتر از آن است که توسط برنامه‌ریزی عدد صحیح قابل حل باشد، از آنها صرف نظر می‌کنیم. ما برای آزمایش‌های محاسباتی خودمان، شیوه‌ای که [۶] برای تبدیل مسائل نمونه کار کارگاهی به مسائل کارگاه مرحله‌ای ارائه کرده است را روی دسته‌ای از مسائل مشهور لارنس [۸] (LA01-05) با ابعاد $n \times m = 10 \times 5$ اعمال می‌نماییم. این مسائل در وب‌سایت کتابخانه تحقیق در عملیات[۱] در دسترس قرار دارند. شایان ذکر است که همانند [۶] برای هر پنج مساله که دارای اندازه یکسانی هستند، از یک ساختار مرحله‌ای مشترک استفاده شده و این ساختار در پیوست ۱ آمده است.

از آنجا که معیار عملکرد مسائل کار کارگاهی مورد استفاده برای تولید مسائل کارگاه مرحله‌ای $C_{\max}$ بوده است، در هر مساله نمونه باید برای هر یک از کارها موعد تحویلی مشخص شود. برای این کار از رویه مشهوری که برای تولید موعد تحویل وجود دارد ([۹]) استفاده کرده‌ایم:

۱. برای هر کار j مقدار $\sigma_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}$ را محاسبه می‌نماییم.
۲. موعد تحویل کار مربوطه را از رابطه $d_j = \lfloor \sigma_j \times f \rfloor$ به دست آورید که در آن $f \in \{1.1, 1.3, 1.5\}$. برای موعد تحویل آزاد از $f = 1.5$، برای موعد تحویل معتدل از $f = 1.3$ و برای موعد تحویل سخت از $f = 1.1$ استفاده نمایید.

[۱] OR-Library: http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html

۳. برای به دست آوردن وزن‌ها از این ایده استفاده می‌شود: ۲۰ درصد کارها خیلی مهم هستند، ۶۰ درصد کارها دارای اهمیت متوسطی هستند و ۲۰ درصد کارها اهمیت کمتری دارند. بنابراین، برای ۲۰ درصد اول کارها (به عنوان مثال، در مسائل نمونه ما که ۱۰ کار داریم؛ یعنی کار ۱ و کار ۲) $w = 4$، برای ۶۰ درصد بعدی $w = 2$ و برای ۲۰ درصد بعدی $w = 1$ در نظر گرفته می‌شود.

۴- مقایسه عملکرد دو مدل ارائه شده

مقایسه عملکرد مدل‌های برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده برای مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای می‌تواند مدل دارای کارایی بالاتر را مشخص نماید. در صورتی که با حل این مدل‌ها به جواب بهینه برسیم، باید زمان رسیدن به جواب بهینه برای مدل‌ها مورد مقایسه قرار گیرد. اما در صورتی که حل مدل‌ها منجر به جواب بهینه نشود، مقایسه میان کیفیت جواب‌ها خواهد بود.

۴-۱- نتایج محاسباتی

مدل‌های ارائه شده در نرم‌افزار گمز کدنویسی شده و روی یک رایانه لپ‌تاپ دارای پردازشگر Core i5 با سرعت 2.5 GHz اجرا شده است. نتایج حاصل از اجرای مدل‌های اول و دوم به ترتیب در جداول ۱ و ۲ آمده است.

جدول ۱- نتایج محاسباتی حل مسائل توسط مدل اول

شماره مساله	ابعاد مساله	معیار طول مدت ساخت			معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها ($f = 1.1$)			معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها ($f = 1.3$)			معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها ($f = 1.5$)		
		زمان (S)		مقدار بهینه $C_{\max}$	زمان (S)		مقدار بهینه TWT	زمان (S)		مقدار بهینه TWT	زمان (S)		مقدار بهینه TWT
LA01	۱۰ × ۵	۸,۹		۶۰۵	۲۳۳,۱		۲۵۸۶	۲۰۰,۳		۱۷۷۲	۱۰۲,۹		۱۰۱۲
LA02	۱۰ × ۵	۱۲۳۹,۴		۵۷۲	۱۰۰۰۱,۸		۱۵۶۷	۱۴۴۴,۹		۶۷۳	۶۰۵,۱		۲۱۰
LA03	۱۰ × ۵	۱۱۹,۱		۵۴۲	۱۰۰۰۲,۶		*۲۱۸۳	۱۰۰۰۳,۴		*۱۳۶۲	۱۰۰۰۳,۲		*۸۶۹
LA04	۱۰ × ۵	۴۲,۶		۵۱۸	۶۴۸,۲		۱۸۵۴	۳۴۱,۶		۱۰۱۰	۶۲,۷		۴۵۶
LA05	۱۰ × ۵	۴۱,۸		۵۶۷	۴۳۹۲,۷		۱۸۸۶	۱۷۲۷,۴		۱۱۵۰	۱۳۸۴,۸		۵۸۹

* به دلیل نرسیدن به جواب بهینه در حداکثر زمان تعیین شده (۱۰۰۰۰ ثانیه) بهترین جوابی که به دست آمده ذکر شده است.

جدول ۲- نتایج محاسباتی حل مسائل توسط مدل دوم

شماره مساله	ابعاد مساله	معیار طول مدت ساخت			معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها ($f = 1.1$)			معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها ($f = 1.3$)			معیار مجموع وزن‌دار دیرکردها ($f = 1.5$)		
		زمان (s)		مقداربهینه $C_{\max}$	زمان (s)		مقدار بهینه TWT	زمان (s)		مقدار بهینه TWT	زمان (s)		مقدار بهینه TWT
LA01	۱۰ × ۵	۴,۶		۶۰۵	۲۶۳,۷		۲۵۸۶	۱۹۹,۲		۱۷۷۲	۷۴,۵		۱۰۱۲
LA02	۱۰ × ۵	۱۲۶۰,۹		۵۷۲	۸۲۵۷,۸		۱۵۶۷	۱۲۸۶,۹		۶۷۳	۵۶۶,۳		۲۱۰
LA03	۱۰ × ۵	۱۱۲,۳		۵۴۲	۸۵۴۷,۳		۲۱۷۱	۹۸۴۲,۵		۱۳۱۷	۱۰۰۰۴,۹		*۸۶۹
LA04	۱۰ × ۵	۳۵,۳		۵۱۸	۶۶۳,۵		۱۸۵۴	۳۴۵,۰		۱۰۱۰	۵۶,۷		۴۵۶
LA05	۱۰ × ۵	۲۹,۰		۵۶۷	۴۱۷۶,۹		۱۸۸۶	۱۷۲۴,۰		۱۱۵۰	۱۲۴۸,۰		۵۸۹

* به دلیل نرسیدن به جواب بهینه در حداکثر زمان تعیین شده (۱۰۰۰۰ ثانیه) بهترین جوابی که به دست آمده ذکر شده است.

جدول ۳- مقایسه کارایی دو مدل ارائه شده

معیار کارایی	میانگین زمان حل مدل اول	میانگین زمان حل مدل دوم
$C_{\max}$	۲۹۰,۳۶	۲۸۸,۴۲
($f = 1.1$) TWT	۵۰۵۵,۶۸	۴۳۸۱,۸۴
($f = 1.3$) TWT	۲۷۴۳,۵۲	۲۶۷۹,۵۲
($f = 1.5$) TWT	۲۴۳۱,۷۴	۲۳۹۰,۰۸

جدول ۳ کارایی دو مدل را مورد مقایسه قرار می‌دهد. مطابق این جدول، میانگین زمان حل مدل دوم برای تمامی معیارهای کارایی کمتر از زمان حل مدل اول است. همچنین، تعداد مسائلی که توسط مدل اول تا بهینگی حل نشده‌اند بیش از تعداد متناظر برای مدل دوم می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، دو مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط برای حل مساله زمان‌بندی کارگاه مرحله‌ای ارائه شده است. معیارهای عملکرد طول مدت ساخت و مجموع وزن‌دار دیرکردها (با ضرایب موعد تحویل مختلف) به طور جداگانه برای این مساله در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به اینکه مسائل کار کارگاهی و کارگاه باز به عنوان حالت خاصی از مساله کارگاه مرحله‌ای قابل مطرح شدن هستند، مدل‌های پیشنهاد شده برای زمان‌بندی بسیاری از کارگاه‌های کوچک مناسب است. نتایج حاصل از حل دو مدل و مقایسه کارایی آنها، برتری مدل دوم را نشان می‌دهد. به عنوان پیشنهاد برای تحقیقات آتی می‌توان به کارگیری روش بندرز را برای حل این مدل‌ها مطرح نمود. همچنین استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی استوار می‌تواند جالب توجه باشد.

مراجع

[1] M. M. Nasiri, and F. Kianfar, "A guided tabu search/path relinking algorithm for the job shop problem", The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. *58*, NO. *9-12*, February 2012, pp. 1105 – 1113.

[2] M. M. Nasiri, and F. Kianfar, "A GES/TS algorithm for the job shop scheduling", Computers & Industrial Engineering, Vol. *62*, NO. *4*, May 2012, pp. 946 – 952.

[3] J. C. Beck, T. K. Feng, and J. P. Watson, "Combining constraint programming and local search for job-shop scheduling", INFORMS Journal on Computing, Vol. *23*, NO. *1*, February 2011, pp. 1 – 14.

[4] M. R. Amin-Naseri, and M. A. Beheshti-Nia, "Hybrid flow shop scheduling with parallel batching", International Journal of Production Economics, Vol. *117*, NO. *1*, January 2009, pp. 185 – 196.

shop scheduling problems: A [5] N. V. Shakhlevich, Y. N. Sotskov, and F. Werner, "Complexity of mixed survey", European Journal of Operational Research, Vol. *120*, NO. *2*, January 2000, pp. 343 – 351.

[6] M. M. Nasiri, and F. Kianfar, "A GA/TS algorithm for the stage shop scheduling problem", Computers & Industrial Engineering, Vol. *61*, NO. *1*, August 2011, pp. 161 – 170.

[7] J. Carlier, and E. Pinson, "An algorithm for solving the job-shop problem", Management science, Vol. *35*, NO. *2*, February 1989, pp. 164 – 176.

[8] S. Lawrence, "Supplement to resource constrained project scheduling: an experimental investigation of heuristic scheduling techniques", GSIA, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Vol. *4*, NO. *7*, October 1984, pp. 4411 – 4417.

[9] J. Author1, B. Author2, and K. Author3, "A genetic local search algorithm for minimizing total weighted tardiness in the job-shop scheduling problem", Computers & Operations Research, Vol. *35*, NO. *8*, August 2008, pp. 2599 – 2616.

پیوست ۱

جدول پ ۱- تعداد عملیات موجود در هر یک از مراحل مسائل نمونه

		شماره مرحله				
	w	۱	۲	۳	۴	۵
کار ۱	۴	۵				
کار ۲	۴	۲	۱	۱	۱	
کار ۳	۲	۱	۱	۱	۱	۱
کار ۴	۲	۱	۱	۱	۱	۱
کار ۵	۲	۴	۱			
کار ۶	۲	۱	۱	۱	۱	۱
کار ۷	۲	۱	۱	۱	۲	
کار ۸	۲	۵				
کار ۹	۱	۱	۴			
کار ۱۰	۱	۲	۱	۲		