

روش پیشنهادی نوین و کم هزینه در محاسبه احتمال خرابی مسائل مبتنی بر روش مونت کارلو

حامد قوهانی عرب^۱ و محمدرضا قاسمی^{۲*}

| اطلاعات مقاله | چکیده |
|--|---|
| دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۶/۳۰ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۲۴ | در سال های اخیر ارزیابی قابلیت اطمینان سازه ها از جمله مباحث رو به گسترش و نیز مورد توجه پژوهشگران سازه بوده است. در این شاخه از مهندسی عمران، برآورد احتمال خرابی سازه با در نظر گرفتن عدم قطعیت های احتمالی در پارامترهای مقاومت و بار در فرآیند مدل سازی و طراحی سازه ها مورد بررسی قرار می گیرد. به شکل معمول، ارزیابی دقیق احتمال خرابی توسط روش شبیه سازی مونت کارلو انجام می پذیرد که مستلزم انجام مدل سازی و هزینه زیاد جهت شبیه سازی و متعاقباً برآورد احتمال خرابی سازه مورد بررسی است. در مقاله حاضر بر مبنای روش شبیه سازی مونت کارلو، روشی مؤثر ارائه شده است که دفعات انجام مدل سازی سازه جهت برآورد احتمال خرابی را به شکل مطلوبی کاهش داده است. در این روش از مفهوم حداقل فاصله ناحیه خرابی از مبدا، در روش FORM به عنوان معیاری برای تشخیص سلامت نمونه ها استفاده شده است. سپس با ارائه زیربازه هایی در لایه های مختلف جهت گروه بندی نمونه های تولید شده در روش مونت کارلو، امکان کاهش دفعات مدل سازی با کنترل خطای احتمالی و دقتی مناسب فراهم آورده شده است. به منظور بررسی کارایی و توانمندی روش پیشنهادی، مثال های عددی و مهندسی با توابع حالت حدی پیچیده توسط روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصله با روش های متداول قابلیت اطمینان مقایسه گردیده اند. نتایج بیانگر دقت بالای روش پیشنهادی علی رغم کاهش زیاد دفعات مدل سازی سازه نسبت به شبیه سازی مونت کارلو می باشد. |
| واژگان کلیدی: احتمال خرابی، تابع حالت حدی، روش مونت کارلو، حذف نمونه ها، زیربازه، روش FORM. | |

۱- مقدمه

در مباحث مهندسی، همواره مسأله سلامت و خرابی به شکل های مختلف نمود می یابد که تئوری قابلیت اطمینان با در نظر گرفتن کمیت های غیرقطعی و متغیرهای تصادفی، این مفاهیم را به دیده احتمالات می نگرد. عموماً در تحلیل یک سیستم، حالت حدی میان سلامت و خرابی توسط تابع $g(R, Q)$ بیان می گردد که در آن R و Q به ترتیب مبین متغیر تصادفی بار و مقاومت در آن سیستم می باشند. در این حالت خرابی هنگامی اتفاق می افتد که بار از مقاومت

بیشتر شود. مطابق این تعریف و از دیدگاه سازه ای هرگاه پاسخ سازه از مقاومت نظیر آن بیشتر شود در سیستم خرابی رخ می دهد. احتمال خرابی (P_f) را می توان با در نظر گرفتن توابع توزیع احتمال (PDF) متغیرهای تصادفی R و Q بدست آورد. در چنین حالتی برای بیان احتمال خرابی، طبق معادله ۱، خواهیم داشت [۱]:

$$P_f = P(R < Q) = P(g(R, Q) < 0) \quad (1)$$

چنانچه R مساوی مقدار معین r_i شود، آنگاه احتمال خرابی برابر احتمالی است که بار از مقاومت بیشتر شود و یا به

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mrghasemi@eng.usb.ac.ir

۱. استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان

۲. استاد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان

متداول ترین آنها در ادامه به طور مختصر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

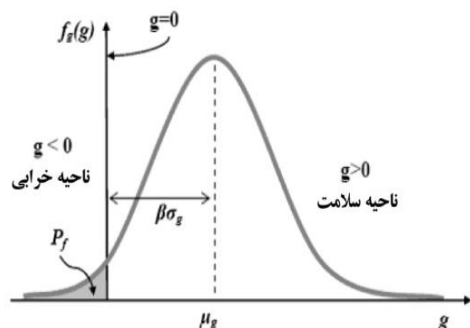
۲- روش‌های موجود جهت تخمین احتمال خرابی

۲-۱- روش‌های مرتبه اول

روش‌های مرتبه اول، ابتدایی‌ترین راه‌های برآورد احتمال خرابی در مباحث قابلیت اطمینان می‌باشند. کرنل در سال ۱۹۶۹ با استفاده از لنگر اول (امید ریاضی) و لنگر دوم (کواریانس) برای بیان خصوصیات متغیرهای تصادفی و خطی‌سازی تابع شرایط حدی با استفاده از بسط تیلور، شاخص قابلیت اطمینان را به صورت رابطه ۵ ارائه کرد [۳]:

$$\beta = \mu_g / \sigma_g \quad (5)$$

در رابطه ۵، μ_g میانگین و σ_g انحراف معیار تابع g می‌باشند. مطابق شکل (۲) شاخص قابلیت اطمینان کرنل به صورت فاصله اندازه‌گیری شده میانگین تابع g تا سطح خرابی، تخمین مناسبی از قابلیت اطمینان را ارائه می‌کند. سطح خرابی نشان دهنده مرز بین ناحیه سلامت ($g(R,Q) > 0$) و ناحیه خرابی ($g(R,Q) < 0$) است. همانطور که در این شکل نشان داده شده این فاصله به صورت مضربی از پارامتر σ_g اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۲- پارامترهای شاخص قابلیت اطمینان کرنل

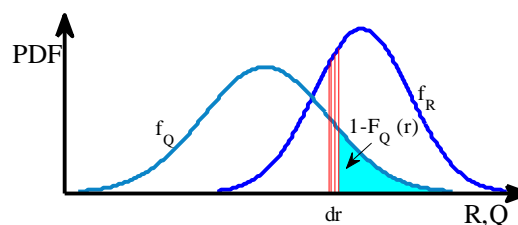
چنانچه متغیرهای طراحی دارای تابع توزیع نرمال باشند و سطح خرابی یک ابرصفحه باشد رابطه ۵ تخمین دقیقی از شاخص قابلیت اطمینان و احتمال خرابی ارائه می‌دهد. زمانی که سطح خرابی ابرصفحه نباشد، می‌توان با خطی‌سازی تابع g و استفاده از مرتبه اول بسط تیلور، شاخص قابلیت اطمینان را با استفاده از رابطه ۶ محاسبه نمود:

$$\beta = g(\mu_{u1}, \mu_{u2}, \dots, \mu_{un}) / \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial U_i} \cdot \sigma_{U_i} \right)^2} \quad (6)$$

عبارت دیگر $P(Q > r_i)$ از آنجا که R یک متغیر تصادفی است، برای هر مقدار r_i یک مقدار احتمالاتی وجود خواهد داشت، بنابراین احتمال خرابی (P_f) متشکل از تمام ترکیب‌های احتمالی $R=r_i$ و $Q > r_i$ است که می‌توان آن را به صورت رابطه ۲ نوشت:

$$P_f = \sum P(R = r_i \cap Q > r_i) = \sum P(Q > R | R = r_i) P(R = r_i) \quad (2)$$

چنانچه توابع توزیع احتمال مقاومت و بار برای متغیر تصادفی X با نمادهای f_Q و f_R نشان داده شوند، مطابق شکل (۱) و با توجه به آنکه احتمال $P(Q > R | R = r_i)$ برابر می‌باشد رابطه ۲ در حالت پیوسته به شکل انتگرالی طبق رابطه ۳ نوشته می‌شود [۲]:



شکل ۱- توابع چگالی احتمال بار Q و مقاومت R

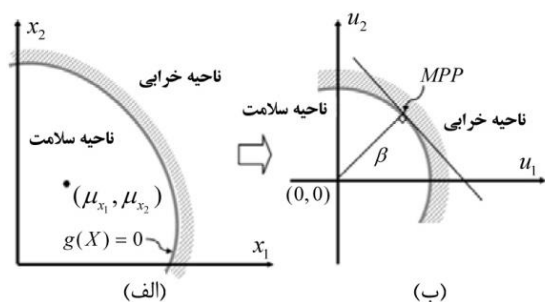
$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_Q(r_i)] f_R(r_i) dr_i = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_Q(r_i) f_R(r_i) dr_i \quad (3)$$

در رابطه ۳، F_Q تابع تجمعی احتمال بار است. با در نظر گرفتن مقدار q_i برای متغیر Q و استفاده از روابطی مشابه روابط فوق، احتمال خرابی توسط رابطه ۴ نیز قابل محاسبه است. در رابطه ۴، F_R نشان دهنده تابع تجمعی احتمال مقاومت است.

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_Q(r_i) f_R(r_i) dr_i = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(q_i) f_Q(q_i) dq_i \quad (4)$$

براین اساس، معادلات ۳ و ۴ روابطی اساسی برای تعیین احتمال خرابی و قابلیت اطمینان می‌باشند که بدست آوردن جواب آنها بسیار دشوار بوده و عملاً امکان محاسبه و حل آنها به صورت تحلیلی وجود ندارد [۱]. لیکن با استفاده از ساده‌سازی و در نظر گرفتن فرضیاتی، روش‌های عددی و شبیه‌سازی مختلفی برای حل آن ارائه شده‌اند که برخی از

کاهش یافته نرمال می‌باشد تا مطابق تعریف ارائه شده، کوتاهترین فاصله از مبدا تا نقطه طراحی روی سطح خرابی بدست آید [۱].



شکل ۳- الف) فضای معمولی ب) فضای نرمال استاندارد

رکویتز و فیسلر [۵] با بکارگیری تابع چگالی احتمال متغیرها در برآورد احتمال خرابی، روش هاسوفر و لیند را بهبود بخشیدند. الگوریتم ارائه شده توسط آنها که با تعریف و جایگزینی یک میانگین و واریانس معادل، امکان استفاده از روش هاسوفر و لیند را برای توابع غیرنرمال نیز مقدور می‌سازد تحت عنوان HLRF شناخته می‌شود. به دست آوردن شاخص قابلیت اطمینان مطابق این روش به دو صورت معادلات همزمان و روش ماتریسی قابل حصول است که در مرجع [۱] به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. این روش‌ها در تحلیل قابلیت اطمینان به روش‌های (FORM) (First Order Reliability Method) معروف می‌باشند.

در سالیان اخیر محققان با در نظر گرفتن لنگر سوم متغیر تصادفی (ضریب چولگی) به منظور بهبود دقت در روش FORM، روش جدیدی را بنا نهاده‌اند که به FOTM (First Order Third Moment) مشهور است. این روش بر پایه نتایج حاصله از FORM با دقت بیشتری اثر تابع چگالی متغیرها را در به دست آوردن شاخص قابلیت اطمینان لحاظ می‌کند، لیکن با توجه به افزایش حجم محاسبات در مقایسه با افزایش دقت حاصله از این روش‌ها، کمتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۶ و ۷].

۲-۲- روش‌های مرتبه دوم

روش‌های مرتبه اول قابلیت اطمینان، تنها زمانی که تابع شرایط حدی دارای یک نقطه MPP بوده و تابع شرایط حدی در همسایگی آن نقطه، حالت خطی داشته باشد مناسب هستند [۳]. برای غلبه بر این محدودیت، روش‌های مرتبه دوم توسط محققین مختلفی ارائه و سپس بسط داده شده‌اند.

در رابطه ۶، U متغیر در فضای کاهش یافته نرمال استاندارد می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان احتمال خرابی را با کمک شاخص قابلیت اطمینان محاسبه شده به صورت $P_f = \Phi(-\beta)$ محاسبه کرد، که Φ تابع توزیع تجمعی متغیر با توزیع نرمال استاندارد است و توسط روابط ۷ محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt \\ \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5t^2) \end{cases} \quad (7)$$

در رابطه ۷، $\phi(t)$ تابع چگالی احتمال متغیر با توزیع نرمال استاندارد است. این روش به سبب آنکه از مرتبه اول بسط سری تیلور و دو لنگر متغیرها (میانگین و کوواریانس) در تعیین شاخص قابلیت اطمینان بهره می‌گیرد FOSM (First Order Second Moment) نام گرفته است و شاخص قابلیت اطمینان آن Mean MVFOSM (Mean Value First Order Second Moment) نامگذاری شده است. این روش دارای مشکلاتی نظیر وابستگی شاخص قابلیت اطمینان به شکل معین تابع شرایط حدی است. به عبارتی، چنانچه تغییری در بیان تابع شرایط حدی ایجاد شود نتیجه متفاوتی برای شاخص قابلیت اطمینان بدست می‌آید [۱].

هاسوفر و لیند [۴] در سال ۱۹۷۴ با استفاده از خطی‌سازی تابع g حول نقطه طراحی، شاخص قابلیت اطمینان را به صورت "کوتاهترین فاصله از مبدا تا نقطه‌ای بر روی سطح خرابی" تعریف کردند. با توجه به اینکه نقطه طراحی (MPP)، نقطه‌ای روی سطح خرابی است که بیشترین احتمال خرابی را داراست بدین ترتیب مطابق شکل (۳) با انتقال متغیرهای نرمال (x_i) با میانگین μ_{x_i} به فضای بدون وابستگی نرمال استاندارد (u_i) و استفاده از بسط سری تیلور تابع غیرخطی خرابی، مشکل وابستگی شاخص قابلیت اطمینان به شکل تابع شرایط حدی مرتفع گردیده است. در نتیجه شاخص قابلیت اطمینان در این روش از رابطه ۸ بدست می‌آید:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^* \frac{\partial g}{\partial U} |u_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial U} |u_i^* \right)^2}} \quad (8)$$

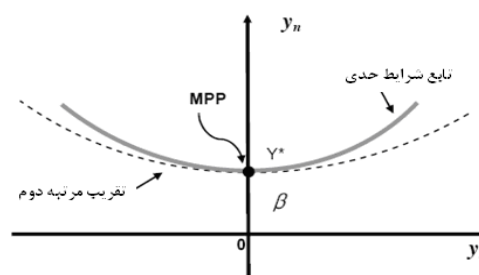
در رابطه ۸، u_i^* مقدار متغیر در نقطه طراحی می‌باشد. چنانچه تابع شرایط حدی غیرخطی باشد، نیاز به استفاده از یک روند تکراری برای یافتن نقطه طراحی در فضای

در این روش‌ها، همانطور که در شکل (۴) نشان داده شده در این روش‌ها، همانطور که در شکل (۴) نشان داده شده مرتبه دوم بسط تیلور جهت ساده‌سازی توابع شرایط حدی غیرخطی به کار گرفته می‌شود و به همین جهت عموماً به عنوان روش‌های مرتبه دوم قابلیت اطمینان شناخته می‌شوند. روش SORM (Second Order Reliability Method) و همکاران [۸] با استفاده از تقریب‌های مختلف مرتبه دوم بیان شد، که بر اساس آن در سال ۱۹۸۴ بریتانگ [۹] با در نظر گرفتن انحنا تابع شرایط حدی و استفاده از تئوری تخمین مجانب‌ها رابطه ۹ را به منظور برآورد احتمال خرابی ارائه داد:

ارائه داد:

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

در رابطه ۹، k_i بیانگر انحنای اصلی شرایط حدی در نقطه با فاصله کمینه و β شاخص قابلیت اطمینان متناظر به دست آمده از روش FORM می‌باشد. به منظور کاهش خطا و همچنین ساده‌سازی روش SORM، محققان دیگری نظیر L. Tvedt با بسط فرمول‌بندی فوق برای تابع شرایط حدی از یک تخمین مرتبه دوم و سهموی، به جای استفاده از تخمین مجانب‌ها استفاده کردند. در کروخیان و همکارانش نیز احتمال خرابی مرتبه دوم را با استفاده از منحنی‌های تخمینی تابع شرایط حدی و جایگذاری منحنی‌ها در چندین نقطه مجزا در اطراف نقطه طراحی بدست آوردند. استفاده از این ویژگی خصوصاً زمانی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد است، موثر بوده و باعث کاهش حجم محاسبات خواهد شد [۱۰].



شکل ۴- آنالیز اطمینان مرتبه دوم

۳-۲- روش شبیه‌سازی مونت کارلو

یکی از دقیق‌ترین و پرکاربردترین روش‌های ارزیابی قابلیت اطمینان، روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. در حالی که شیوه‌های دیگر همچون روش‌های قابلیت اطمینان مرتبه اول و دوم در صورت غیرخطی بودن توابع شرایط حدی و یا کار با متغیرهای تصادفی غیرنرمال جواب تقریبی برای احتمال خرابی ارائه می‌دهند، روش مونت کارلو به سادگی و با دقت زیادی قادر به محاسبه احتمال خرابی است. یکی از نکات کلیدی حل مسأله به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو، تولید دنباله‌ای از مقادیر تصادفی برای توزیع احتمال هر متغیر است. در صورتی که اعداد دنباله احتمالاتی تابع چگالی احتمال تجمعی که بین صفر و یک هستند با (۷) نشان داده شوند آنگاه متغیر تصادفی x با تابع چگالی احتمال تجمعی $F_X(x)$ ، از رابطه ۱۰ محاسبه می‌شود.

$$F_X(x_i) = v_i \Rightarrow x_i = F^{-1}(v_i) \quad (10)$$

به منظور اعمال اثر شرایط حدی در معادله ۴، یک تابع شمارنده I برای شرایط حدی طراحی تعریف می‌گردد به طوری که این تابع در نواحی خرابی برابر ۱ و در نواحی سلامتی برابر صفر خواهد بود. با تعریف تابع شمارنده I می‌توان رابطه ۱ را بصورت انتگرالی نشان داده شده در رابطه ۱۱ نوشت:

روش‌های SOTM و SOFM نیز که در سال‌های اخیر ارائه گردیده‌اند با یک تخمین سهموی کلی برای تابع شرایط حدی و نیز استفاده از لنگر سوم و چهارم برای متغیرهای تصادفی، دقت روش SORM را بهبود بخشیده‌اند [۱۱]. روش‌های مرتبه دوم فوق‌الذکر ممکن است برای مقادیر کوچک شاخص قابلیت اطمینان غیر دقیق باشند. همچنین،

در این مقاله روشی جهت کاهش تعداد محاسبات تابع حالت حدی در روش مونت کارلو با هدف وجود حداقل خطا در پاسخ نهایی ارائه شده است. برای این منظور تولید نمونه بر مبنای روش شبیه‌سازی مونت کارلو انجام و از مفهوم موجود در روش FORM جهت تخمین نزدیکترین نقطه به میانگین در ناحیه خرابی استفاده شده است. چنانچه در مسأله‌ای انحراف معیار متغیرهای مختلف، دارای تفاوت قابل ملاحظه‌ای باشد متغیرها به فضایی اصلاح شده نگاشت خواهند شد، سپس با ارائه زیربازه‌هایی در لایه‌های مختلف جهت گروه‌بندی نمونه‌های تولیدشده در روش مونت کارلو، امکان کاهش تعداد دفعات مدل‌سازی با کنترل خطای احتمالی و دقتی مناسب فراهم آورده می‌شود.

۳- روش پیشنهادی جهت تعیین احتمال خرابی

در بسیاری از مسائل کاربردی مهندسی نظیر مسائل دینامیکی، مکانیک شکست، تحلیل‌های پلاستیک و ... مرز ناحیه خرابی و سلامت متشکل از منحنی‌های پیچیده‌ای می‌باشد که برآورد دقیق احتمال خرابی توسط روش‌هایی نظیر FORM و SORM را دچار مشکل می‌کند. بنابراین، جهت برآورد صحیح احتمال خرابی، چاره‌ای جز استفاده از روش‌های شبیه‌سازی نظیر روش مونت کارلو وجود ندارد. همانطور که قبلاً نیز بیان شد، در صورتی که احتمال خرابی مسأله مورد بررسی کم باشد، در روش مونت کارلو نیاز به تولید نمونه‌های تصادفی زیاد و محاسبه تابع حالت حدی برای تمام نمونه‌ها به منظور تعیین سلامت و خرابی آنها می‌باشد. از آنجا که در بسیاری از مسائل مهندسی تابع حالت حدی به صورت صریح وجود ندارد به منظور تعیین سلامت یا خرابی نمونه‌ها چاره‌ای جز حل مسأله با استفاده از روش‌های عددی مانند اجزاء محدود، تفاضل محدود و ... وجود ندارد. عمدتاً حل مسائل با استفاده از روش‌های مذکور زمان‌بر و پرهزینه می‌باشد.

در این مقاله روشی پیشنهادی جهت کاهش تعداد محاسبات تابع حالت حدی در روش مونت کارلو با هدف وجود حداقل خطا در پاسخ نهایی ارائه می‌گردد. به این منظور، از دو راهکار حذف نمونه‌های قطعاً سالم و تقسیم فضا به زیربازه‌ها استفاده خواهد شد، که در زیر به توضیح آنها پرداخته می‌شود.

۳-۱- حذف نمونه‌های قطعاً سالم

از آنجایی که در حوزه مهندسی، معمولاً مسائل مورد بررسی

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} \dots \int f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} I[X] f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

که به صورت رابطه ۱۲ نیز قابل بیان است:

$$P_f = \int \dots \int I[g(X) < 0] f_X(x) dx \quad (12)$$

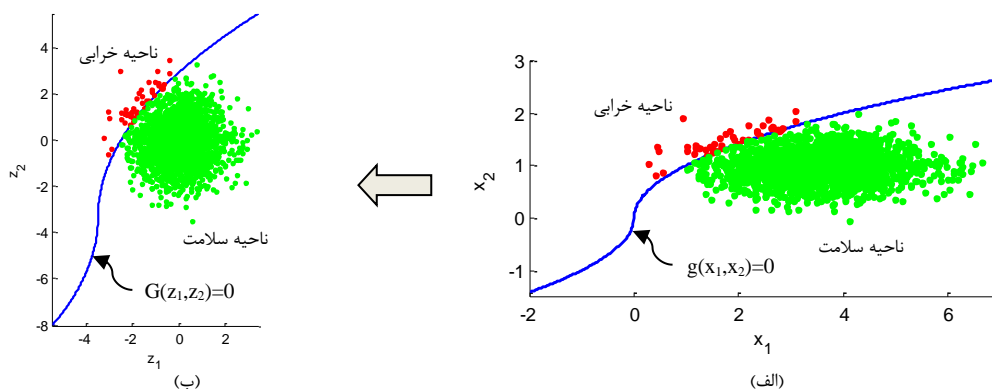
$$\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n I[g(x_i) < 0] \approx \frac{n_f}{N}$$

بدین ترتیب، مطابق شبیه‌سازی مونت کارلو احتمال خرابی به صورت نسبت تعداد نقاط موجود در ناحیه خرابی n_f به تعداد کل نقاط تولیدشده بر اساس تابع چگالی متغیرها (N) تعریف شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در روش شبیه‌سازی مونت کارلو تولید نمونه‌ها برای هر متغیر بر اساس تابع چگالی احتمال بوده و عمده نقاط حول میانگین و متناسب با انحراف معیار تولید می‌شوند. این ویژگی سبب می‌شود که برای پوشش دادن کل فضای طراحی، خصوصاً زمانی که احتمال خرابی کوچک باشد، نیازمند تولید نمونه‌های خیلی زیاد بوده و متعاقباً صرف وقت و هزینه زیادی به دنبال داشته باشد [۱۸]. همچنین زمانی که هیچ تخمین اولیه‌ای از احتمال خرابی برای شرایط حدی موجود نباشد تولید تعداد نمونه‌ها با مشکل روبرو می‌شود. این دشواری‌ها پژوهشگران را به سمت شکل‌دهی روش‌های کاهش واریانس نظیر روش‌های نمونه‌گیری نظیر روش نمونه‌گیری مکعب لاتین، نمونه‌گیری با اهمیت و شبیه‌سازی مستقیم سوق داده است [۱۹-۲۳]. همچنین در سال‌های اخیر روش‌های شبیه‌سازی بسیار موثری نظیر روش نمونه‌گیری خطی [۲۴ و ۲۵]، شبیه‌سازی ترتیبی [۲۶ و ۲۷]، شبیه‌سازی اصلاح شده مونت کارلو [۲۸] ارائه شده‌اند که با تعداد نمونه‌های بسیار کم قادر به تخمین احتمال خرابی‌های پایین نیز می‌باشند. لیکن، این روش‌ها به سبب امکان بروز خطاهای بزرگ در درک و تحلیل مسأله، امکان انتخاب پارامترهای اشتباه برای روش، و نیز خطاهای حاصل از ساده‌سازی، نیازمند تأیید از سوی شبیه‌سازی مونت کارلو هستند و در مسائلی که حصول جواب از طرف شبیه‌سازی مونت کارلو امکان پذیر نباشد صحت جواب با تردید همراه است. این مشکل خصوصاً زمانی که ارزیابی احتمال خرابی برای سازه‌های با اهمیت زیاد و احتمال خرابی بسیار پایین مورد نظر باشد نمود بیشتری پیدا می‌کند.

چنانچه در مسأله‌ای انحراف معیار متغیرهای مختلف، دارای تفاوت قابل ملاحظه‌ای باشد، به دلیل پراکندگی زیاد نمونه‌ها در جهت متغیرها با انحراف معیار زیاد نسبت به متغیرها با انحراف معیار کوچک، نمونه‌هایی که در ناحیه حذف (سلامت قطعی) قرار می‌گیرند کم خواهند بود. برای حل این مشکل و قرار گرفتن تعداد قابل ملاحظه‌ای از نمونه‌ها در ناحیه حذف، قبل از محاسبه حداقل فاصله ناحیه خرابی تا میانگین متغیرها از نگاشتی مطابق رابطه ۱۳ استفاده می‌گردد:

$$z_i = (x_i - \mu_i) / \sigma_i \quad (13)$$

در این رابطه، σ_i و μ_i مقادیر میانگین و انحراف معیار متغیر i ام و x_i مقدار متغیر در فضای اصلی و z_i مقدار متغیر در فضای اصلاح شده می‌باشند. همانطور که در قسمت ب شکل (۵) مشاهده می‌گردد در نتیجه انجام این نگاشت، میانگین متغیرها به مبدا مختصات منتقل می‌گردد و اثر انحراف معیار نمونه‌ها در پراکندگی نمونه‌های تولیدشده تعدیل می‌گردد.



شکل ۵- الف) نمونه‌های تولیدشده در فضای اصلی ب) نمونه‌های نگاشت شده در فضای اصلاح شده

گرفته شده است (مطابق روابط ۱۴ و ۱۵):

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i + \lambda_i \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_i = \frac{\nabla G(\mathbf{z}_i)^T \cdot \mathbf{z}_i - G(\mathbf{z}_i)}{\|\nabla G(\mathbf{z}_i)\|} \frac{\nabla G(\mathbf{z}_i)}{\|\nabla G(\mathbf{z}_i)\|} - \mathbf{z}_i \end{cases} \quad (14)$$

$$G(\mathbf{z}) = g(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{z} + \boldsymbol{\mu}) \quad (15)$$

در رابطه ۱۴، ∇ عملگر گرادیان است. \mathbf{d}_i و λ_i نشان دهنده جهت جستجو و طول گام می‌باشند. و در رابطه ۱۵، g تابع حالت حدی در فضای اصلی است. روش یافتن λ_i با استفاده از تابع مریت توسط ژانگ و درکیروخیان در مراجع [۲۹ و ۳۰] به طور مفصل توضیح داده شده است.

دارای احتمال خرابی‌های کم می‌باشند و تولید نمونه‌ها در روش مونت کارلو با توجه به انحراف معیار حول میانگین متغیرها انجام می‌پذیرد، بنابراین بخش وسیعی از نمونه‌های تولیدشده برای برآورد احتمال خرابی در روش مونت کارلو در ناحیه سلامت و بخش اندکی از آنها در ناحیه خرابی قرار می‌گیرند. آنچنان که در قسمت الف شکل ۵ نشان داده شده، از میان نمونه‌های تولیدشده، نقطه‌ایی که نشان دهنده مقدار میانگین تمام متغیرها می‌باشد و نقاط مجاور این نقطه در ناحیه سلامت قرار می‌گیرند.

در صورتی که حداقل فاصله ناحیه خرابی تا مقدار میانگین متغیرها مشخص باشد، در آن صورت می‌توان چنین بیان کرد که تمام نمونه‌هایی که در فاصله‌ای کمتر از این مقدار با مقدار میانگین قرار دارند، در ناحیه سلامت واقع شده‌اند. بنابراین می‌توان این نمونه‌ها را بدون محاسبه تابع حالت حدی و گاهاً پرهیز از انجام محاسبات پیچیده، جزء نمونه‌های سالم به حساب آورد. به این فرآیند حذف نمونه‌های قطعاً سالم گفته می‌شود.

در این مرحله، به منظور یافتن حداقل فاصله ناحیه خرابی تا مبدا می‌توان از مفهوم روش FORM استفاده نمود. در روش FORM هدف یافتن حداقل فاصله ناحیه خرابی تا مبدا در فضای نرمال استاندارد می‌باشد. بنابراین جهت تعیین حداقل فاصله ناحیه خرابی تا مبدا (فاصله حذف) می‌توان از الگوریتم‌های ارائه شده برای این روش بدون انتقال به فضای نرمال استاندارد استفاده کرد. در این تحقیق، برای یافتن حداقل فاصله، از الگوریتم بهبود یافته HLRF که توسط ژانگ و درکیروخیان [۲۹ و ۳۰] ارائه شده، با استفاده از رابطه‌سازی در فضای اصلاح شده، بهره

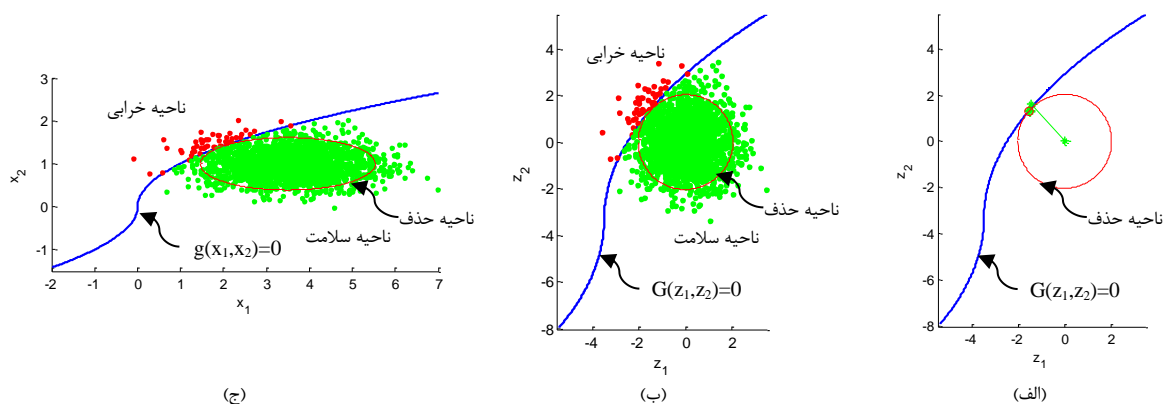
۳-۲- تقسیم فضا به زیربازه‌ها

هنگامی که تعداد نمونه‌های تولیدشده در روش مونت کارلو زیاد باشند، بسیاری از این نمونه‌ها در فاصله بسیار نزدیک با همدیگر قرار می‌گیرند، بنابراین می‌توان به جای محاسبه مقدار تابع حالت حدی برای تمام نمونه‌هایی که در همسایگی هم قرار دارند، یک نمونه را به عنوان نماینده برای همه آنها در نظر گرفت و مقدار تابع را برای آن نمونه محاسبه نمود. در صورت سلامت نمونه نماینده، کلیه نمونه‌ها سالم و در صورت خرابی، کلیه نمونه‌ها خراب فرض می‌گردند.

پس از یافتن حداقل فاصله ناحیه خرابی تا مبدأ در فضای اصلاح‌شده (شعاع حذف) بر مبنای الگوریتم بیان‌شده (شکل ۶-الف)، فاصله نمونه‌ها تا مبدأ در فضای اصلاح‌شده طبق رابطه ۱۶ محاسبه می‌گردد.

$$dis = \sqrt{\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{z}} \quad (۱۶)$$

کلیه نمونه‌هایی که فاصله آنها تا مبدأ در فضای اصلاح‌شده (dis) کمتر از شعاع حذف می‌باشد، قطعاً در ناحیه سلامت قرار دارند و نیازی به محاسبه تابع حالت حدی برای آنها وجود ندارد. نمونه‌های حذف‌شده (قطعاً سالم) در فضای اصلاح‌شده و فضای اصلی در قسمت‌های ب و ج شکل (۶) نشان داده شده‌اند.



شکل ۶- الف) یافتن شعاع حذف در فضای اصلاح شده (ب) نمایش نمونه‌های حذف شده در فضای اصلاح‌شده

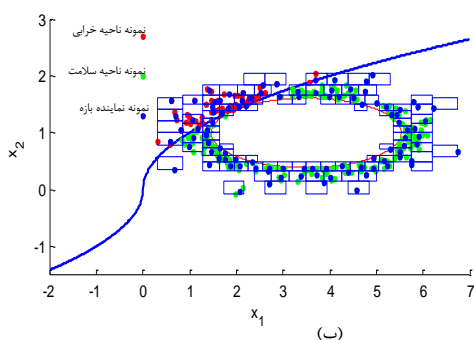
ج) نمایش نمونه‌های حذف شده در فضای اصلی

$G_{i,j}$ انجام می‌شود که i و j به ترتیب نشان دهنده بُعد مورد بررسی و شماره خط شبکه می‌باشند. شماره خط شبکه با توجه به ترتیب قرارگیری خطوط شبکه نسبت به خط شبکه میانی مشخص می‌شود، بعلاوه در صورتی که خط شبکه در سمت راست خط شبکه میانی قرار داشته باشد، علامت j مثبت و در غیراینصورت منفی انتخاب می‌گردد. خطوط شبکه ایجاد شده برای یک مسأله دو متغیره در قسمت الف شکل (۷) نشان داده شده‌اند.

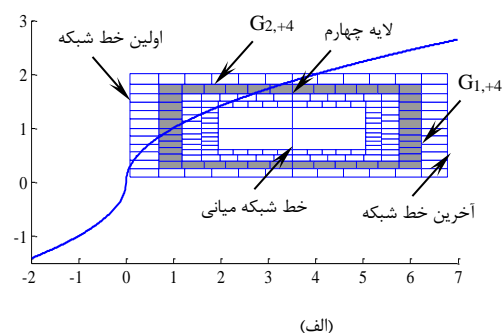
به فضای چندبُعدی ایجاد شده بین خطوط شبکه G_{i+1} و G_{i-1} برای تمام ابعاد (i نشان دهنده بُعد می‌باشد)، لایه اول گفته می‌شود. به فضای ایجاد شده بین خطوط شبکه G_{i+2} و G_{i-2} برای تمام ابعاد، بدون در نظر گرفتن فضای لایه اول، لایه دوم گفته می‌شود. بنابراین با انجام فرض فوق برای سایر خطوط شبکه، n لایه به وجود خواهد آمد (شکل ۷-الف). اگر در هر لایه در راستای هر بُعد فضا (متغیر)، زیرفضای لایه به اجزایی با طولی حداکثر برابر حداقل

به منظور تعیین نمونه‌هایی که در همسایگی هم قرار دارند نوعی شبکه‌بندی خاص برای فضای چندبُعدی موجود مورد استفاده قرار می‌گیرد که نتیجه آن تولید تعدادی زیرفضا است که به هر یک از این زیرفضاها، زیربازه گفته می‌شود. از آنجا که هر بُعد فضای چندبُعدی موجود متناظر با یک متغیر تصادفی است، برای شبکه‌بندی فضا در راستای بُعد مورد نظر، مختصات اولین و آخرین خط شبکه برابر با کمترین و بیشترین مقدار متغیر در نمونه‌های تولید شده در روش مونت کارلو فرض می‌شود، تا تمام نمونه‌ها در داخل زیربازه‌های تولید شده قرار گیرند. در صورتی که هدف، تقسیم فضای حد فاصل بین اولین و آخرین خط شبکه در یک بُعد به $2n-1$ قسمت باشد، لازم است $2n-1$ خط شبکه دیگر در نظر گرفته شوند، بنابراین خط شبکه میانی روی مقدار میانگین متغیر و $n-1$ خط شبکه در سمت راست و $n-1$ خط شبکه در سمت چپ خط شبکه میانی در نظر گرفته می‌شوند. نامگذاری خطوط شبکه با استفاده از نماد

- برای اینکه هیچ نمونه‌ای در لایه اول قرار نگیرد، می‌توان فاصله اولین خطوط شبکه در سمت راست و چپ میانگین در هر بُعد را مساوی با فاصله از میانگین نقطه‌ای که حداقل فاصله ناحیه خرابی تا میانگین را دارد (نقطه‌ای که برای تعیین فاصله حذف یافته شده است)، انتخاب نمود.
- از آنجا که تراکم نقاط در قسمت‌های نزدیک به میانگین بیشتر و در قسمت‌های دور کمتر می‌باشد، بهتر است ضخامت لایه‌های انتهایی نسبت به لایه‌های ابتدایی (به جز لایه اول) بیشتر در نظر گرفته شود. این امر با در نظر گرفتن ضریب افزایش بازه که نشان دهنده نسبت ضخامت لایه $(i+1)$ ام به ضخامت لایه i ام است، انجام می‌پذیرد.



ضخامت لایه در آن بُعد (فاصله خطوط شبکه دو سمت لایه) تقسیم گردد، زیرفضاهایی به وجود خواهند آمد که به هر یک از آنها زیربازه گفته می‌شود (شکل ۷). مقدار میانگین نمونه‌هایی که در هر زیربازه قرار می‌گیرند، به عنوان نمونه نماینده آن زیربازه در نظر گرفته می‌شود (شکل ۷-ب). به این ترتیب به دلیل قرارگیری تعداد زیادی از نمونه‌ها در هر زیربازه، تعداد محاسبات لازم جهت برآورد احتمال خرابی به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. تنها امکان وقوع خطای اندکی در محاسبات به واسطه وجود نمونه‌های سالم و خراب در زیربازه‌های موجود در ناحیه مربوط به مرز ناحیه سلامت و خرابی، وجود دارد. به منظور کاهش حجم و همچنین خطای محاسبات، رعایت نکات زیر در هنگام انتخاب خطوط شبکه و تولید لایه‌ها سودمند است:



شکل ۷- الف) کلیه زیربازه‌های موجود ب) زیربازه‌های شامل نمونه

احتمال خرابی با انجام شبیه‌سازی مونت کارلو با تعداد 10^7 نمونه برابر 0.00187 محاسبه گردیده است که با توجه به رابطه ارائه شده توسط نواک (معادله ۱۸) [۱] ضریب پراکندگی پاسخ 0.073 است.

$$v = \sqrt{(1 - P_f) / (N \cdot P_f)} \quad (18)$$

در معادله (۱۸)، P_f احتمال خرابی، N تعداد نمونه‌ها و v ضریب پراکندگی پاسخ می‌باشد. بنابراین به دلیل مقدار بسیار کم ضریب پراکندگی می‌توان این جواب را به عنوان پاسخ دقیق در نظر گرفت. در صورت استفاده از روش FORM برای یافتن پاسخ، اگر از الگوریتم ارائه شده توسط هاسوفر-لیند استفاده گردد، این روش همگرا نشده و پاسخی حاصل نمی‌گردد. اما در صورت استفاده از برخی الگوریتم‌های توسعه یافته FORM نظیر الگوریتم ارائه شده توسط درکیروخیان و داکسیان [۳۳]، احتمال خرابی برابر

۴- مثال‌های عددی

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده، برآورد احتمال خرابی چند مسأله با روش پیشنهادی انجام گردیده و پاسخ با نتایج روش‌های مونت کارلو، FORM و SORM مقایسه می‌گردد.

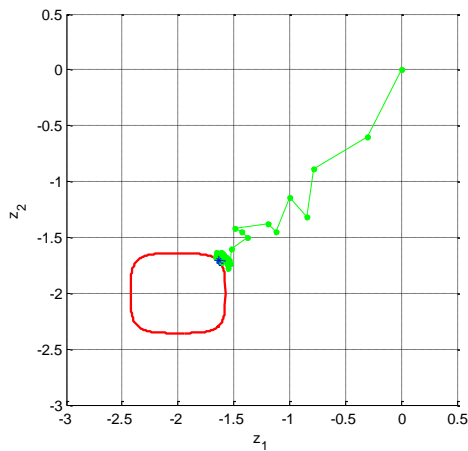
ارزیابی احتمال خرابی براساس روش‌های FORM و SORM توسط نسخه ۴/۱ نرم افزار FERUM انجام پذیرفته است.

۴-۱- مثال ۱

در این مثال ارزیابی احتمال خرابی تابع حالت حدی دو متغیره مطابق معادله (۱۷)، با فرض تابع توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۵ برای هر دو متغیر x_1 و x_2 انجام می‌گیرد [۳۱ و ۳۲].

$$g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 20 \quad (17)$$

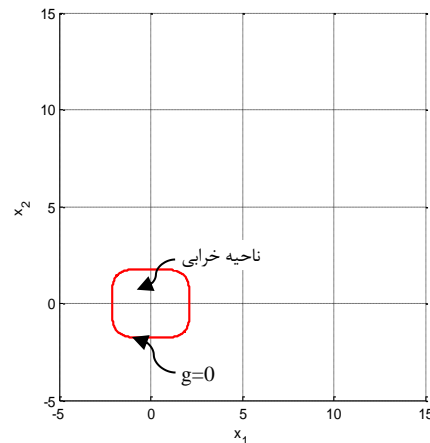
خرابی به روش مونت کارلو با تعداد 10^7 نمونه، تعداد 9386374 از نمونه‌ها در ناحیه حذف قرار می‌گیرند.



شکل ۹- مسیر یافتن شعاع حذف مثال ۱

این مثال برای حالات 10 ، 15 ، 20 ، 25 ، 30 ، 40 ، 50 و 100 لایه با در نظر گرفتن ضریب افزایش بازه برابر $1/1$ حل گردیده است. احتمال خرابی محاسبه شده، درصد خطا و تعداد محاسبات مورد نیاز تابع حالت حدی برای تعداد لایه‌های مفروض در جدول ۱ نشان داده شده‌اند. به منظور نشان دادن تأثیر روش ارائه شده در کاهش تعداد محاسبات تابع حالت حدی، شبیه‌سازی مونت کارلو با تعداد نمونه‌های متناظر با تعداد دفعات محاسبه تابع حالت حدی برای تعداد لایه‌های مختلف انجام گردیده و خطای متناظر نیز در جدول ۱ نشان داده شده است.

مقدار $0/00911$ به دست می‌آید [۳۱]. همچنین در صورت استفاده از روش SORM، مقدار احتمال خرابی $0/00209$ محاسبه می‌گردد. در صورت مقایسه پاسخ روش‌های FORM و SORM با جواب روش مونت کارلو، خطای روش‌ها به ترتیب 387% و 12% می‌باشد. دلیل خطای زیاد روش‌های فوق، انحنای زیاد ناحیه خرابی است که در شکل (۸) نشان داده شده است.



شکل ۸- ناحیه خرابی مثال ۱

به منظور حل این مثال با روش پیشنهادی ارائه شده، شعاع ناحیه حذف با در نظر گرفتن خطای همگرایی $0/001$ پس از انجام 57 بار تکرار و 423 بار محاسبه مقدار تابع حالت حدی، $2/3618$ به دست آمده است (شکل ۹). در صورت استفاده از همان نمونه‌های ایجاد شده برای محاسبه احتمال

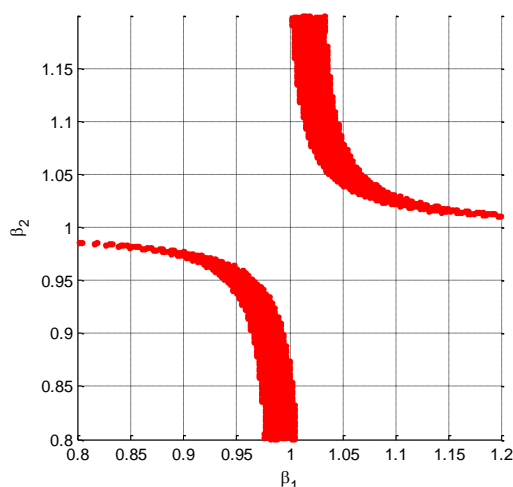
جدول ۱- مقایسه خطا و تعداد محاسبات تابع حالت حدی روش ارائه شده برای مثال ۱

| تعداد لایه‌ها | ۱۰ | ۱۵ | ۲۰ | ۲۵ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۱۰۰ |
|---|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| کل دفعات محاسبه تابع حالت حدی | ۸۹۶ | ۱۴۴۷ | ۲۱۴۲ | ۲۹۴۸ | ۳۸۳۳ | ۵۶۸۱ | ۷۴۴۴ | ۹۷۲۷ |
| 10^{-3} × احتمال خرابی محاسبه شده توسط روش پیشنهادی | ۱/۴۹ | ۱/۶۱ | ۱/۸۸ | ۱/۹۵ | ۱/۸۶ | ۱/۸۳ | ۱/۸۹ | ۱/۸۵ |
| درصد خطای احتمال خرابی روش پیشنهادی | ۲۵/۴۰ | ۱۶/۲۷ | ۰/۵۱ | ۳/۸۸ | ۰/۲۸ | ۱/۹۲ | ۱/۰۹ | ۱/۰۰ |
| 10^{-3} × احتمال خرابی محاسبه شده توسط روش مونت کارلو با نمونه‌های لازم برای روش پیشنهادی | ----- | ۴/۱۵ | ۴/۶۷ | ۳/۳۹ | ۳/۶۵ | ۰/۸۸ | ۳/۳۶ | ۲/۶۸ |
| درصد خطای احتمال خرابی محاسبه شده توسط روش مونت کارلو با نمونه‌های لازم برای روش پیشنهادی | ----- | ۱۲۱/۹۳ | ۱۴۹/۷۳ | ۸۱/۲۸ | ۹۵/۱۹ | ۵۲/۹۴ | ۷۹/۶۸ | ۴۳/۳۲ |

نواحی مجاور مرز خرابی می‌باشد. هرچه تعداد نمونه‌های سالم قرار گرفته در زیربازه‌ای که نمونه نماینده آن زیربازه در ناحیه خرابی قرار می‌گیرد و بالعکس کمتر باشد، خطای محاسبات کاهش می‌یابد. مقایسه بین خطای روش مونت کارلو و روش پیشنهادی ارائه شده با تعداد یکسان محاسبه

همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌گردد با افزایش تعداد لایه‌ها به دلیل افزایش تعداد زیربازه‌ها خطای محاسبات با روند کلی کاهشی همراه است. هر چند در برخی حالات خاص افزایش جزئی خطا وجود دارد، که علت اصلی آن نحوه قرارگیری نمونه‌های سالم و خراب در زیربازه‌های

به منظور تحلیل قابلیت اطمینان این مسأله، فرض گردیده است که متغیرهای β_1 و β_2 دارای تابع توزیع نرمال با میانگین ۱ و انحراف معیار ۰/۰۲۵ می‌باشند، درحالیکه پارامترهای R و ξ دارای مقدار ثابت ۰/۰۱ می‌باشند. احتمال خرابی با انجام شبیه‌سازی مونت کارلو با تعداد 5×10^6 نمونه، مقدار ۰/۰۱۰۹۸۳ محاسبه گردیده است که با توجه به معادله ۱۸، ضریب پراکندگی پاسخ ۰/۰۰۴۲۴ است. بنابراین به دلیل مقدار بسیار کم ضریب پراکندگی می‌توان این جواب را به عنوان پاسخ دقیق در نظر گرفت.



شکل ۱۱- ناحیه خرابی مثال ۲

احتمال خرابی محاسبه شده با استفاده از روش‌های FORM و SORM به دلیل انحنای زیاد ناحیه خرابی و جزیره‌ای بودن نواحی خرابی (شکل ۱۱)، دارای خطایی در حدود ۰/۳۴٪ و ۰/۵۳٪ می‌باشد.

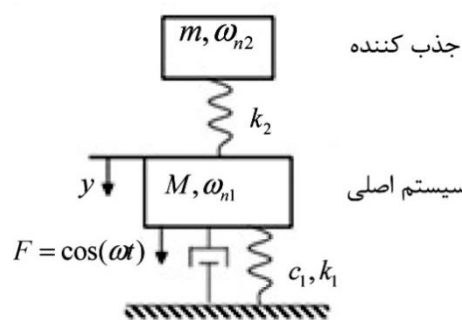
در این مثال شعاع ناحیه حذف با در نظر گرفتن خطای همگرایی ۰/۰۱ پس از انجام ۲۲ بار تکرار و ۱۴۸ بار محاسبه مقدار تابع حالت حدی برابر مقدار ۲/۳۶۳۷ به دست آمده است.

در صورت استفاده از همان نمونه‌های ایجاد شده برای محاسبه احتمال خرابی به روش مونت کارلو با تعداد 5×10^6 نمونه، تعداد ۴۶۹۳۹۳۵ از نمونه‌ها در ناحیه حذف قرار می‌گیرند. این مسأله در حالت ۲۰ لایه برای ضرایب افزایش بازه مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. تأثیر اندازه ضریب افزایش بازه بر تعداد زیربازه‌ها (دفعات محاسبه تابع حالت حدی) و درصد خطا نسبت به جواب دقیق در تصاویر (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده‌اند.

تابع حالت حدی نشان دهنده کارایی بالای این روش می‌باشد.

۲-۴- مثال ۲

در این مثال کارایی روش پیشنهادی در حل مسائلی با نواحی خرابی جزیره‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور تحلیل قابلیت اطمینان جداساز لرزه‌ای یک درجه آزادی که تحت تأثیر بار ارتعاشی هارمونیک قرار دارد، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد [۳۴]. برای این سیستم که در شکل (۱۰) نشان داده شده است، دامنه ارتعاش وابسته به پارامترهای R ، ξ ، β_1 و β_2 است، که R نسبت جرم جذب کننده (m) به جرم سیستم اصلی (M)، ξ نسبت میرایی سیستم اصلی ($c_1/2M\omega_{n1}$)، β_1 و β_2 به ترتیب نسبت فرکانس طبیعی سیستم اصلی (ω_{n1}) و جذب کننده (ω_{n2}) به فرکانس تحریک (ω) می‌باشند.



شکل ۱۰- سیستم جداساز لرزه‌ای مثال ۲

در صورتی که مقدار مجاز ارتعاش ۲۷ فرض گردد تابع حالت حدی به صورت رابطه ۱۹ خواهد بود:

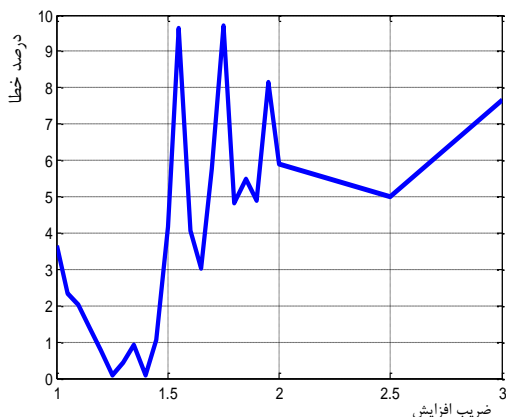
$$g = 27 - y \tag{19}$$

در معادله ۱۹، y دامنه ارتعاش سیستم اصلی است که توسط معادله ۲۰ محاسبه می‌گردد [۳۴]:

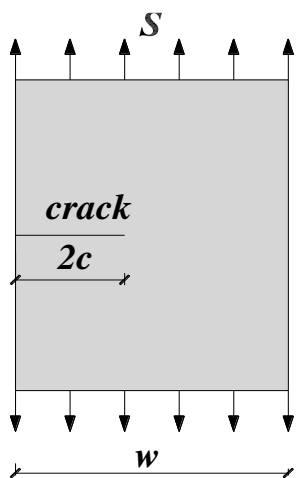
$$\begin{cases} y = \frac{\left| 1 - \left(\frac{1}{\beta_2} \right)^2 \right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \\ A_1 = 1 - R \left(\frac{1}{\beta_1} \right) - \left(\frac{1}{\beta_1} \right)^2 - \left(\frac{1}{\beta_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_2} \right)^2 \\ A_2 = 2\xi \left[\left(\frac{1}{\beta_1} \right)^2 - \frac{1}{\beta_1 \beta_2^2} \right] \end{cases} \tag{20}$$

$$g = K_{IC} - \left[1.12 - 0.23 \left(\frac{c}{w} \right) + 10.56 \left(\frac{c}{w} \right)^2 - 21.74 \left(\frac{c}{w} \right)^3 + 30.42 \left(\frac{c}{w} \right)^4 \right] * S \sqrt{\pi c} \quad (21)$$

در رابطه ۲۱، K_{IC} ، ضریب تمرکز تنش بحرانی مود ۱ ماده، c و w به ترتیب نشان دهنده عرض ورق و نصف عرض ترک و S نشان دهنده تنش کششی وارد بر صفحه می‌باشند.

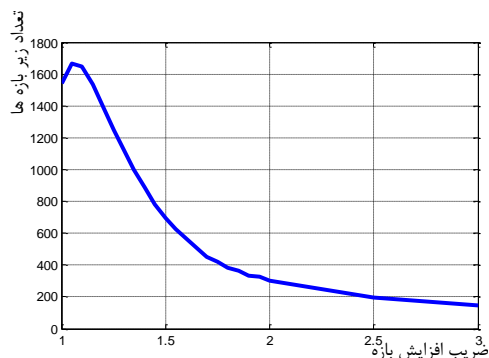


شکل ۱۲- تاثیر اندازه ضریب افزایش بازه بر خطاها



شکل ۱۳- ورق کششی با وجود ترک در گوشه (مثال ۳)

به منظور تعیین احتمال خرابی، توزیع متغیرهای w و c یکنواخت فرض شده است. اما از آنجا که متغیرهای مورد بررسی در مسائل مهندسی معمولاً دارای یکی از توزیع‌های نرمال، لوگ نرمال، اکستریم نوع ۱ و یا ویبول می‌باشند [۱]، برای متغیرهای K_{IC} و S حالات مختلف بیان شده در جدول ۲ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مقادیر میانگین و انحراف معیار متغیرها در جدول ۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۳- تاثیر اندازه ضریب افزایش بازه بر تعداد زیربازه‌ها

با توجه به شکل (۱۲) مشخص می‌گردد که با زیاد شدن ضریب افزایش بازه، تعداد زیربازه‌ها و در نتیجه دفعات محاسبه تابع حالت حدی کاهش می‌یابد. این بدین دلیل است که در حالت انتخاب ضریب افزایش بازه بزرگتر نسبت به حالتی با ضریب افزایش بازه کوچکتر با توجه به ثابت بودن تعداد لایه‌ها، زیربازه‌های لایه‌های نخستین، کوچکتر و زیربازه‌های لایه‌های انتهایی، بزرگتر می‌باشند، در نتیجه در تعداد زیادی از زیربازه‌های لایه‌های نخستین هیچ نمونه‌ای قرار نمی‌گیرد و این زیربازه‌ها در شمارش تعداد لایه‌ها و دفعات محاسبه تابع حالت حدی قرار نمی‌گیرند. اما همان‌گونه که در شکل (۱۳) نشان داده شده است، با زیاد شدن ضریب افزایش بازه (کم شدن بازه‌های محاسبات)، خطای محاسبات نیز افزایش می‌یابد که دلیل آن تقریب زیاد روش به واسطه وجود تعداد زیاد نمونه‌های موجود در زیربازه‌های ناحیه مرز خرابی و سلامت و در نتیجه شمارش همه این نمونه‌ها به عنوان نمونه سالم یا خراب می‌باشد. با توجه به شکل (۱۳) مشخص می‌گردد که خطای محاسبات در صورتی که ضریب افزایش بازه عددی بین ۱/۱ تا ۱/۴۵ انتخاب گردد در حد قابل قبولی (کمتر از ۰/۲٪) خواهد بود. البته لازم به ذکر است هر چه تعداد لایه‌ها بیشتر انتخاب شوند بهتر است ضریب افزایش بازه کوچکتر انتخاب گردد تا تناسب بین اندازه زیربازه‌های لایه‌های نخستین و انتهایی حفظ گردد.

۴-۳- مثال ۳

در این مثال تحلیل قابلیت اعتماد (تعیین احتمال خرابی) یک صفحه کششی در صورت وجود ترک در گوشه مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۱۴). در این مسأله تابع حالت حدی مطابق رابطه ۲۱ است [۳۵]:

همراه درصد خطای محاسبات در جدول ۳ نمایش داده شده‌اند. همچنین به منظور امکان مقایسه خطای روش پیشنهادی با روش‌های متداول FORM و SORM پاسخ این روشها به همراه خطای مربوطه در جدول ۳ آورده شده‌اند.

احتمال خرابی برای همه حالت‌های بیان شده در جدول ۲ با استفاده از روش مونت کارلو با تعداد 10^7 نمونه محاسبه شده است، جواب‌های به دست آمده در جدول ۳ نشان داده شده‌اند. به منظور حل مسأله با روش پیشنهادی، مسأله با فرض حالت ۱۵ لایه و ضریب افزایش بازه $1/2$ مورد بررسی قرار گرفته است. پاسخ‌های به دست آمده به

جدول ۲- مشخصات متغیرهای تصادفی مثال ۳

| متغیر تصادفی | مقدار میانگین (μ) | انحراف استاندارد (σ) | تابع توزیع |
|-----------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------|
| C | 5 cm | $cm 1/2\sqrt{3}$ | یکنواخت |
| W | 25 cm | $cm 4/2\sqrt{3}$ | یکنواخت |
| S | 500kgf/cm ² | 50 kgf/cm ² | حالت ۱ نرمال |
| | | | حالت ۲ لوگ-نرمال |
| | | | حالت ۳ اکستریم نوع ۱ |
| | | | حالت ۴ ویبول |
| K _{IC} | 4500 kgf/cm ^{1.5} | 450 kgf/cm ^{1.5} | حالت ۱ نرمال |
| | | | حالت ۲ لوگ-نرمال |
| | | | حالت ۳ اکستریم نوع ۱ |
| | | | حالت ۴ ویبول |

جدول ۳- مقایسه خطای روش‌های FORM، SORM و روش پیشنهادی با روش مونت کارلو

| | حالت ۱ | حالت ۲ | حالت ۳ | حالت ۴ |
|---|--------|--------|--------|--------|
| 10^{-3} × احتمال خرابی روش مونت کارلو | ۰/۵۹۷ | ۰/۳۶۷ | ۰/۷۳۲ | ۲/۶۵۶ |
| 10^{-3} × احتمال خرابی روش FORM | ۰/۷۸۱ | ۰/۵۱۴ | ۰/۹۸۵ | ۳/۱۵۸ |
| درصد خطای روش FORM نسبت به روش مونت کارلو | ۳۰/۸۲ | ۴۰/۰۵ | ۳۴/۵۶ | ۱۸/۹۰ |
| 10^{-3} × احتمال خرابی روش SORM | ۰/۷۰۵ | ۰/۴۴۸ | ۰/۸۳۵ | ۲/۸۰۴ |
| درصد خطای روش SORM نسبت به روش مونت کارلو | ۱۸/۰۹ | ۲۲/۰۷ | ۱۴/۰۷ | ۵/۵۷ |
| 10^{-3} × احتمال خرابی روش پیشنهادی | ۰/۵۸۵ | ۰/۳۵۷ | ۰/۷۱۷ | ۲/۶۱۲ |
| درصد خطای روش پیشنهادی نسبت به روش مونت کارلو | ۲/۰۱ | ۲/۷۲ | ۲/۰۵ | ۱/۶۶ |

محاسبات می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر روشی جهت کاهش تعداد دفعات محاسبه تابع حالت حدی در روش مونت کارلو با هدف وجود حداقل خطا در پاسخ نهایی ارائه شد. مبنای روش مذکور تولید نمونه بر مبنای روش شبیه‌سازی مونت کارلو، حذف برخی از نمونه‌های قطعاً سالم و به کارگیری زیربازه‌هایی جهت گروه‌بندی نمونه‌های تولید شده است.

مطابق نتایج حاصله از مثال‌های مورد بررسی، حذف نمونه‌های با فاصله‌ای کمتر از فاصله نزدیکترین نقطه در ناحیه خرابی و میانگین متغیرها در فضای اصلاح‌شده و همچنین محاسبه تابع حالت حدی مسأله تنها برای یک

با توجه به نتایج ثبت شده در جدول ۳ مشخص می‌گردد هر چند حجم محاسبات روش‌های FORM و SORM نسبت به روش‌های شبیه‌سازی بسیار کمتر است، اما در صورت غیرخطی بودن تابع حالت حدی، پاسخ این روش‌ها به هیچ وجه قابل قبول نمی‌باشد. بعلاوه خطای به وجود آمده در این روش‌ها تابعی از نوع توزیع متغیرهای تصادفی موجود در مسأله می‌باشد، در صورتی که در روش پیشنهادی نوع توزیع متغیرها تاثیری در خطای محاسبات ندارد.

لازم به ذکر است که تعداد دفعات محاسبه تابع حالت حدی در روش پیشنهادی در حالت‌های مورد بررسی در مثال ۳ هیچگاه بیشتر از ۱٪ نمونه‌های لازم برای روش مونت کارلو نگردیده است، که نشان دهنده کاهش قابل ملاحظه حجم

روند کلی کاهش همراهِ است. این امر به دلیل افزایش تعداد زیربازه‌ها می‌باشد که افزایش تعداد محاسبات تابع حالت حدی را نیز به دنبال دارد. همچنین مشخص گردید با زیاد شدن ضریب افزایش بازه، تعداد زیربازه‌ها و در نتیجه دفعات محاسبه تابع حالت حدی کاهش می‌یابد. دلیل این امر آن است که در حالتی با ضریب افزایش بازه بزرگتر نسبت به حالت با ضریب افزایش بازه کوچکتر، در صورت ثابت بودن تعداد لایه‌ها، زیربازه‌های لایه‌های نخستین بسیار کوچکتر از زیربازه‌های لایه‌های انتهایی می‌شوند. در نتیجه در تعدادی از زیربازه‌های لایه‌های نخستین هیچ نمونه‌ای قرار نمی‌گیرد که این امر موجب افزایش خطای محاسبات می‌گردد.

بر مبنای مثال‌های ارائه شده مشخص گردید، در صورتی که ضریب افزایش بازه عددی بین $1/1$ تا $1/4$ انتخاب گردد خطای محاسبات در حد قابل قبولی (کمتر از 0.2%) خواهد بود. البته لازم به ذکر است هر چه تعداد لایه‌ها بیشتر انتخاب شود بهتر است ضریب افزایش بازه کوچکتر انتخاب گردد تا تناسب بین اندازه زیربازه‌های لایه‌های مختلف حفظ گردد.

نمونه در هر زیربازه، به شکل مؤثری سبب کاهش تعداد دفعات مورد نیاز مدل‌سازی جهت برآورد دقیق احتمال خرابی شده است.

با بررسی مثال‌هایی با تابع حالت حدی غیرخطی (مسائل مکانیک شکست، دینامیک و ...) مشخص گردید تعداد محاسبات تابع حالت حدی بر اساس روش پیشنهادی در بدترین حالت کمتر از یک درصد نمونه‌های مورد نیاز در روش مونت کارلو می‌باشد، در صورتی که خطای محاسبات بسیار ناچیز است. در حالی که روش‌های متداول قابلیت اطمینان نظیر روش FORM و SORM قادر به ارائه پاسخ صحیح جهت حل اینگونه مسائل نبوده و معمولاً خطایی بیش از 25% به همراه داشته‌اند که این دقت برای برآورد ایمنی و طراحی سازه‌های مهندسی قابل قبول به نظر نمی‌رسد. بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند به شکلی مؤثر جهت ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌هایی با توابع حالت حدی پیچیده نظیر مسائل دینامیکی و مکانیک شکست به کار گرفته شود. در حالی که نیاز به تعداد شبیه‌سازی بسیار کمتری نسبت به روش مونت کارلوی معمول خواهد داشت. بعلاوه با توجه به مثال‌های ارائه شده مشخص گردید، در روش پیشنهادی با افزایش تعداد لایه‌ها خطای محاسبات با

مراجع

[1] A.S. Nowak, K.R. Collins, Reliability of structures, Second Edition, CRC Press, 2012.

[۲] ع. کاوه، ور. کلات جاری، نظریه قابلیت اعتماد و کاربرد آن در مهندسی سازه، چاپ اول، دانشگاه علم و صنعت ایران، ایران، ۱۳۷۳.

[3] R.E. Melchers, A.T. Beck, Structural Reliability Analysis and Prediction, Third Edition, John Wiley & Sons, 2017.

[4] A.M. Hasofer, N.C. Lind, "Exact and Invariant Second-Moment Code Format", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 100, No. 1, 1974, pp. 111–121.

[5] R. Rackwitz, B. Fiessler, "Structural reliability under combined random load sequences", Computers & Structures, Vol. 9, No. 5, 1978, pp. 489–494.

[6] Y.G. Zhao, A.H.S. Ang, "On the first-order third-moment reliability method", Structure and Infrastructure Engineering, Vol. 8, No. 5, 2012, pp. 517–527.

[7] G.F. Napa-Garcia, A.T. Beck, T.B. Celestino, "Reliability analyses of underground openings with the point estimate method", Tunnelling and Underground Space Technology, Vol. 64, No. 1, 2017, pp. 154–163.

[8] B. Fiessler, R. Rackwitz, H.J. Neumann, "Quadratic Limit States in Structural Reliability", Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 105, No. 4, 1979, pp. 661–676.

- [9] K. Breitung, "Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals", *Journal of the Engineering Mechanics*, Vol.110, No. 3, 1984, pp. 357–366.
- [10] Y.K. Lee, D.S. Hwang, "A Study on The Techniques of Estimating The Probability of Failure", *Journal of the Chungcheong Mathematica Society*, Vol. 21, No. 4, 2008, pp. 573–583.
- [11] Z.H. Lu, D.Z. Hu, Y.G. Zhao, "Second-Order Fourth-Moment Method for Structural Reliability", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 143, No. 4, 2016, pp. 10–21.
- [12] R. Chowdhury, B.N. Rao, "Structural failure probability estimation using HDMR and FFT", *Electronic Journal of Structural Engineering*, Vol. 8, 2008, pp. 67–76.
- [13] S. Guo, "An efficient third-moment saddlepoint approximation for probabilistic uncertainty analysis and reliability evaluation of structures", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 1, 2014, pp. 221–232.
- [14] M. Lemaire, *Structural reliability*, John Wiley & Sons, 2013.
- [15] K. Piric, "Reliability analysis method based on determination of the performance function's PDF using the univariate dimension reduction method", *Structural safety*, Vol. 57, 2015, pp. 18–25.
- [16] X. Zhang, M.D. Pandey, "Structural reliability analysis based on the concepts of entropy, fractional moment and dimensional reduction method", *Structural Safety*, Vol. 43, 2013, pp. 28–40.
- [17] J. Xu, Z.H. Lu, "Evaluation of Moments of Performance Functions Based on Efficient Cubature Formulation", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 143, No. 8, 2017, pp. 27–39.
- [18] E. Zio, *The Monte Carlo simulation method for system reliability and risk analysis*, London: Springer, 2013.
- [19] F. Kang, S. Han, R. Salgado, J. Li, "System probabilistic stability analysis of soil slopes using Gaussian process regression with Latin hypercube sampling", *Computers and Geotechnics*, Vol. 63, 2015, pp. 13–25.
- [20] M.F. Bugallo, V. Elvira, L. Martino, D. Luengo, J. Miguez, P.M. Djuric, "Adaptive importance sampling: the past, the present, and the future", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 34, No. 4, 2017, pp. 60–79.
- [21] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, N. Relun, "A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models", *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 111, 2013, pp. 232–240.
- [22] Y. Zhu, H. Zhou, X.T. Feng, C.Q. Zhang, M.Q. Zhang, F.J. Yang, "Directional simulation of failure probability of rock slope wedge", *Rock and Soil Mechanics*, Vol. 38, No. S1, 2017, pp.151–157.
- [23] V. Dubourg, B. Sudret, "Meta-model-based importance sampling for reliability sensitivity analysis", *Structural Safety*, Vol. 49, 2014, pp. 27–36.
- [24] M. de Angelis, E. Patelli, M. Beer, "Advanced line sampling for efficient robust reliability analysis", *Structural safety*, Vol. 52, 2015, pp. 170–182.
- [25] I. Depina, T.M.H. Le, G. Fenton, G. Eiksund, "Reliability analysis with metamodel line sampling", *Structural Safety*, Vol. 60, 2016, pp. 1–15.
- [26] I. Papaioannou, W. Betz, K. Zwirgmaier, D. Straub, "MCMC algorithms for subset simulation", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 41, 2015, pp. 89–103.
- [27] X. Huang, J. Chen, H. Zhu, "Assessing small failure probabilities by AK-SS: an active learning method combining Kriging and subset simulation", *Structural Safety*, Vol. 59, 2016, pp. 86–95.

- [28] H.J. Pradlwarter, G.I. Schuëller, "Local domain Monte Carlo simulation", *Structural Safety*, Vol. 32, No. 5, 2010, pp. 275–280.
- [29] Y. Zhang, A. Der Kiureghian, Two improved algorithms for reliability analysis, Editors: R. Rackwitz, G. Augusti, and A. Borr, In Proc. 6th IFIP WG7.5, Reliability and optimization of structural systems, 1995.
- [30] Y. Zhang, A. Der Kiureghian, "Finite element reliability methods for inelastic structures", Tech. Rep. no UCB/SEMM-97/05, University of California, Berkeley – Dpt of Civil Engineering, 1997.
- [31] L.P. Wang, R.V. Grandhi, "Efficient safety index calculation for structural reliability analysis", *Computers & Structures*, Vol. 52, 1994, pp.103–111.
- [32] M. Rashki, M. Miri, M. Azhdary Moghaddam, "A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point", *Structural Safety*, Vol. 39, No. 1, 2012, pp. 22–29.
- [33] A. Der Kiureghian, T. Dakessian, "Multiple design points in first and second order reliability", *Structural Safety*, Vol. 20, No. 1, 1998, pp. 37–49.
- [34] P. Ramu, N.H. Kim, and R.T. Haftka, "System Reliability Analysis Using Tail Modeling", the 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis & Optimization Conference, 6 – 8 September, Portsmouth, VA, 2006.
- [35] S. Mohammadi, *Extended finite element method for fracture analysis of structures*, Blackwell, Oxford, 2008.