تعمیم روش آنالیز حساسیت سوبول برای استفاده در مهندسی و علوم

ساسان معتقد[۱،*]، آزاد یزدانی[۲]، احمد نیکنام[۳] و مصطفی خانزادی[۴]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۱۷
پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۲۰

واژگان کلیدی:
مدل ورودی،
توزیع آماری،
واریانس،
عدم اطمینان،
تحلیل خطر.

چکیده

عدم اطمینان جزء تفکیک‌ناپذیر تحلیل‌های مهندسی است. توزیعِ مبین این عدم اطمینان-ها محدوده وسیعی از توزیع‌های آماری را در بر می‌گیرد. روش سوبول یکی از بهترین و شناخته‌شده‌ترین روش‌های آنالیز حساسیت است. مشکل روش سوبول به عنوان روش بسیار قوی آنالیز حساسیت، این است که تنها برای توزیع یکنواخت پیوسته قابل استفاده است. در این مقاله روش سوبول برای ورودی‌های با توزیع‌های مختلف پیوسته و گسسته توسعه داده شده است. به این ترتیب برای انواع مختلف مدل‌های موجود در مهندسی و علوم با توزیع‌های مختلف ورودی قابل استفاده خواهد بود. برای نشان دادن دادن کارایی روش در ارائه دقیق مقادیر عددی حساسیت، نتایج آنالیز حساسیت تحلیل خطر لرزه‌خیزی تهران به روش سوبول توسعه یافته داده شده است. علوم مرتبط با سازه و زمین لرزه به علت تغییرپذیری ذاتی مصالح، زمین و طبیعت تصادفی حرکات زمین مملو از انواع عدم اطمینان می‌باشند. محاسبه نقش عدم اطمینان هر پارامتر در عدم اطمینان کل می‌تواند به بهینه سازی تلاش‌ها و هزینه‌های لازم برای دقیق‌تر کردن خروجی‌ها باشد. به این ترتیب امکان ارائه عدد دقیق حساسیت فراهم آمده است. نتایج تحلیل در ارائه مقادیر دقیق انواع حساسیت رضایت بخش است.

۱- مقدمه

در علوم مهندسی، محاسبه و تفسیر عدم اطمینان‌ها به منظور ارائه پاسخ میانگین (یا میانه) با اطمینان مورد نظر و تخمین پراکندگی احتمالی نتایج ضروری است.

ورودی‌های مدل همواره عدم اطمینان‌هایی دارند که از منابع مختلف ناشی می‌شود. در این حالت عدم اطمینان ورودی از طریق مدل در خروجی انتشار می‌یابد. بنابراین خروجی نیز عدم اطمینان خواهد داشت. بدین ترتیب میزان پاسخ به طور دقیق مشخص نیست و تنها می‌توان محدوده آن یا بهترین تخمین آن را با دقت مشخص تعیین کرد. مدل‌ها معمولاً چندین ورودی دارند که ممکن است همگی عدم اطمینان داشته باشند. بنابراین خروجی یا خروجی-های آنها (یک یا چند) نیز عدم اطمینان منتشر شده ورودی‌ها را در خود خواهد داشت. این عدم اطمینان، عدم اطمینان ناشی از پارامتر گفته می‌شود. انواع دیگر عدم اطمینان مانند عدم اطمینان مفهومی یا مدل و عدم اطمینان سناریو نیز پاسخ‌های سیستم را تحت تأثیر قرار خواهند داد. بدیهی است در صورتی که هدف مطالعه کل سیستم و بررسی صحت نتایج باشد، لازم است همه انواع عدم اطمینان‌ها مطالعه شود.

معمولاً واژه‌های تحلیل عدم اطمینان و تحلیل حساسیت همراه هم می‌آیند و تداخل آنها با هم محتمل است. هدف

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: motaghed@bkatu.ac.ir
۱. استادیار، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان
۲. دانشیار، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان
۳. استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران
۴. دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران

تحل یل حساسیت (ناشی از پارامتر) تعیین پارامترهای مهم مدل و اهمیت نسبی آنهاست. به عنوان مثال، پارامتر A مهمتر از پارامتر B است؟ یا اهمیت آنها نسبت به C چیست؟ به عبارت دیگر آیا می‌توان پارامترها را به ترتیب اهمیت رتبه‌بندی کرد. اهمیت به معنای نقش آنها در خروجی است. آیا پارامترهایی وجود دارند که نقش آنها در خروجی به گونه‌ای باشد که بتوان آنها را در کل بازه مدلسازی و تحلیلی ثابت فرض نمود؟ در صورت تصمیم طراح به کاهش هزینه محاسبات و یا سایر الزامات بهتر است تلاش‌ها و منابع به چه صورت تخصیص داده شوند؟

به منظور در نظر گرفتن عدم اطمینان‌های موجود در ورودی‌ها، معرفی پارامترهای ورودی مدل با استفاده از توزیع‌های آماری صورت می‌گیرد. توانایی مدل آنالیز حساسیت در پذیرش و پردازش این ورودی‌ها می‌باشد. روش آنالیز حساسیت سوبول[1] به عنوان یکی از قویترین روش‌های پردازش، توانایی پذیرش ورودی‌ها با توزیع‌های مختلف را ندارد. در حالت فعلی این روش برای توزیع یکنواخت در فاصله بین صفر و یک قابل استفاده است . در این مقاله روشی برای تعمیم روش آنالیز حساسیت سوبول ارائه شده است به گونه‌ای که توانایی پذیرش توزیع‌های مختلف ورودی را داشته باشد. به این منظور بستر ریاضی روش سوبول با استفاده از مفاهیم آماری اصلاح شده است. به منظور نشان دادن توانایی روش، کاربرد آن در مهندسی زلزله، در قالب مثالی عددی، مورد آزمون قرار گرفته است.

۲- اصول روش‌های آنالیز حساسیت

رهیافت‌های انجام آنالیز حساسیت را می‌توان به دو دسته تقسیم بندی نمود: تعینی و احتمالی؛ که بعضا به عنوان رهیافت‌های محلی و کلی نیز شناخته شده‌اند.

اگر مدل بسیار پیچیده بوده و نتوان با روش مونت کارلو[2] آن را تحلیل نمود، معمولاً از روش آنالیز حساسیت تعینی استفاده می‌شود. در این حالت مدل با تعداد آنالیز کم، با ترکیب مختلف پارامترها که هر بار یکی از آنها تغییر می‌کند و با تحلیل ابتدایی تأثیر آنها بر خروجی‌ها سنجیده می‌شود، یا با استفاده از روش الحاقی مطالعه اثر فضای پارامتر مبتنی بر مشتقات پارامترها انجام می‌شود. در این حالت می‌توان به طور همزمان نتایج و تأثیر مقادیر محاسبه شده را با استفاده از اطلاعات مشتقات جزئی به دست آورد. مزیت این روش و همه روش‌های محلی این است که تنها اطلاعات محلی پیرامون پارامتر یا پارامترهای مورد نظر را مورد توجه قرار می‌دهد. معمولاً پارامترهای تحلیل خطر در محدوده وسیعی تغییر می‌کنند (تغییرات ممکن است در حد خود پارامتر باشد). بنابراین سوال آشکار این است که کدام مقدار پارامتر باید به عنوان مرجع انتخاب شود؟ آیا می‌توان مشتقات حول میانگین یا میانه پارامترهای ورودی، و یا مقادیر حد وسط بازه تغییرات برای هر پارامتر و یا سایر مقادیر را مد نظر قرار داد؟

ساخت تابع سطح پاسخ مدل تعینی نیز می‌تواند در مطالعه تغییرات محلی ناشی از تغییرات پارامترها مفید باشد. چنانچه تعداد کافی تحلیل با همه ترکیبات مختلف پارامترها انجام گیرد، می‌توان سطح پاسخ را ساخته و سرانجام با استفاده از الگوریتم‌های برازش آنرا تخمین زد. این تابع پاسخ را می‌توان با توجه به پارامترهای ورودی تحلیل نمود و تأثیر آنها را سنجید.

روش‌های احتمالی معمولاً نیاز به مدل‌های ساده‌ای دارند که بتوانند در شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده شوند. در این حالت مقادیر پارامترها از توابع چگالی احتمال (PDFs) بر اساس استراتژی از پیش تعیین شده نمونه‌گیری می‌شوند. پس از انجام شبیه‌سازی مونت کارلو بر اساس یکی از روش-های نمونه‌گیری می‌توان با پس پردازش عملیات را به پیش برد. حال سؤالات زیر پیش می‌آید: مشارکت واریانس توزیع هر پارامتر در واریانس توزیع خروجی چیست در حالتی که آنالیز حساسیت با رهیافت مبتنی بر واریانس انجام شده باشد؟ آیا مقدار واریانس داده شده یک پارامتر ورودی شدیداً پاسخ را تحت تأثیر قرار می‌دهد؟ کدام پارامتر بیشترین تأثیر را دارد؟ چگونه می‌توان پارامترها را با توجه به میزان تأثیرشان رتبه‌بندی کرد؟ آیا پارامترهایی وجود دارند که تأثیر قابل اغماض بر پاسخ‌ها داشته باشند؟ آیا می‌توان بین پارامترهای مؤثر و پارامترهای وابسته به PDF تمایز قائل شد؟

برای انجام آزمون‌های کمی ابزار آماری مانند تحلیل همبستگی (ضرایب همبستگی پیرسون، ضرایب همبستگی اسپیرمن، ضرایب همبستگی جزئی، ضرایب همبستگی رتبه‌ای جزئی)، تحلیل رگرسیون (ضرایب رگرسیون استاندارد شده، ضرایب رگرسیون رتبه‌ای استاندارد شده)،

[1] Sobol' sensitivity analysis

[2] Monte Carlo

پارتیشن بندی داده خروجی (آزمون‌های رتبه‌بندی اسمیرنوف[1]، من- ویتنی[2]، کرامر- ون میسز[3] و مربع) و سایر روش‌های مبتنی بر واریانس مانند ضرایب سوبول، FAST و FAST توسعه یافته و سوبول قابل استفاده است [۱-۶]. جدول ۱ خلاصه روش‌های مختلف آنالیز حساسیت و مزایا و معایب آنها را بیان می‌کند.

۳- تحلیل حساسیت مبتنی بر واریانس

روش‌های مبتنی بر واریانس شامل آنالیز حساسیت سوبول، FAST و FAST توسعه یافته مبتنی بر تئوری فیشر[4] در طرح آزمایش هستند. با طرح دقیق آزمایش می‌توان تأثیر عوامل را به تنهایی و اندرکنش دو به دو آنها و همچنین ترکیب آنها (اندرکنش مرتبه بالا) را سنجید. واریانس مرتبه اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_i = V\left(E\left(Y\middle|X_i = x_i^*\right)\right) \qquad (۱)$$

که $E\left(Y\middle|X_i = x_i^*\right)$ امید Y به شرط X_i با داشتن x_i^* ثابت و V واریانس بر همه مقادیر ممکن x_i^* است [۵].

واریانس کل با رابطه زیر با واریانس جزئی مرتبط می شود:

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(E\left(Y\middle|X_i = x_i^*\right)\right) \\ &+ E\left(V\left(Y\middle|X_i = x_i^*\right)\right) \end{aligned} \qquad (۲)$$

عبارت اول سمت راست برای تخمین معیار حساسیت در محاسبات عددی به کار می‌رود و نشان دهنده اثرات اصلی X_i بر Y است. تجزیه کامل واریانس بر حسب مجموع عبارات با افزایش بعد، اثرات مرتبه بالاتر را نشان می‌دهد:

$$V = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \sum_{i<j<m} V_{ijm} + \ldots + V_{12\ldots k} \qquad (۳)$$

با V_i مانند معادله ۱ و

$$\begin{aligned} V_{ij} &= V\left(E\left(Y\middle|X_i = x_i^*,\ X_j = x_j^*\right)\right) \\ &- V\left(E\left(Y\middle|X_i = x_i^*\right)\right) - V\left(E\left(Y\middle|X_j = x_j^*\right)\right) \end{aligned} \qquad (۴)$$

و به همین ترتیب.

اندیس‌های حساسیت سوبول نیز از تجزیه واریانس به دست می‌آید. روش سوبول تابع $f(X)$ را که X بردار تصادفی است و المان‌های آن در فضای چند بعدی هایپرکیوب[5] واحد تعریف شده‌اند، تجزیه می‌نماید [۶].

سوبول تجزیه f را بر سری‌های چندگانه فوریه- هار[6] مورد استفاده قرار داده و نشان داده است که تجزیه شرح داده شده در بالا جواب واحد دارد [۷]. واریانس کل D تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^n = \left(x\middle|\ 0 \le x_i \le 1;\ i = 1,\ldots,n\right)$$

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &= f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\ &+ \sum_{1\le i\le j\le n} f_{ij}(x_i, x_j) + \ldots + f_{12\ldots k}(x_1,\ldots,x_n) \end{aligned} \qquad (۵)$$

و واریانس جزئی بصورت زیر است:

$$D = \int_{R^n} f^2(x)dx - f_0^2 \qquad (۶)$$

با $1 < i1 \ldots < is < n$ و $s = 1,\ldots,n$.

سوبول نشان داده است که [۷ و ۸]

$$D_{i_1,\ldots,i_s} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f^2_{i_1,\ldots,i_s}(x_1,\ldots,x_s)dx_{i_1},\ldots,dx_{i_1} \qquad (۷)$$

بنابراین اندیس‌های حساسیت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$D = \sum D_i + \sum_{1\le i\le j\le n} D_{ij} + \ldots + D_{12\ldots n} \qquad (۸)$$

$$s_{ij} = D_{ij}/D,\ s_i = D_i/D \qquad (۹)$$

S_i اثر درجه ۱ (یا حساسیت درجه ۱) و S_{ij} اثر درجه ۲ (یا حساسیت درجه ۲) گفته می‌شود. در اثر درجه ۱ تأثیر یک عامل منفرد و در اثر درجه دو تأثیر زوج عوامل سنجیده می‌شود. به همین ترتیب اثرات درجات بالاتر قابل محاسبه هستند. مجموع همه جملات معادله ۸ برابر با ۱ می‌شود.

به طور خلاصه، اندیس حساسیت کل سوبول مجموع همه ضرایب حساسیت آن پارامتر است؛ مثلاً در حالت سه پارامتر، برای پارامتر ۱ حساسیت کل به صورت زیر خواهد بود:

$$TSI_1 = S_1 + S_{12} + S_{123} \qquad (۱۰)$$

که TSI_1 اندیس حساسیت کل پارامتر ۱، S_1 اندیس مرتبه اول پارامتر، S_{12} اندیس حساسیت مرتبه ۲ برای پارامترهای ۱ و ۲ یعنی اندرکنش بین ۱ و ۲ (اندرکنش مرتبه ۲)، S_{13} اندرکنش بین ۱ و ۳ (اندرکنش مرتبه ۲) را نشان داده و

[1] Smirnov
[2] Mann-Whitney
[3] Cramer-Von Mises
[4] Fisher theory
[5] hypercube sampling
[6] Multiple Series of Fourier-Haar

S_{123} اندرکنش مرتبه ۳ را نشان می‌دهد. سوبول یک سری از اعداد شبه تصادفی را برای محاسبه انتگرال‌های چند بعدی مورد استفاده قرار داده است [۷ و ۹].

۴- روش سوبول توسعه یافته

روش سوبول به شرحی که در بالا گفته شد تنها برای متغیرهای با توزیع پیوسته یکنواخت قابل استفاده است. آروارد و همکاران (۲۰۱۰) در سال توسعه‌ای از این روش را ارائه کرده‌اند که برای متغیرهای با توزیع نرمال نیز قابل استفاده است [۱۰].

آنها شرط تعامد را به صورت زیر اصلاح کرده‌اند:

$$\int_{R^1} F_{i_1,i_2,\ldots,i_s}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_s})\phi_1(x_k)dx_k = 0 \quad (۱۱)$$

برای $k=i_1,i_2,\ldots,i_s$

که $\Phi_1(x_k)$ تابع توزیع احتمال نرمال است.

جدول ۱ - مزایا و معایب روش‌های آنالیز حساسیت

روش	مزایا	معایب
نمودار پراکندگی	نمایش تصویری از داده‌ها و نشان دادن رفتار غیرخطی	کیفی، متأثر از همبستگی‌ها
ضرایب رگرسیون استاندارد شده	قابل انجام به صورت گام به گام	مشکل پردازش پارامترها، مرتبه اعداد مهم است، فرض خطی بودن مدل، نامناسب برای نتایج غیر یکنوا، متأثر از همبستگی‌ها
ضرایب رگرسیون رتبه‌ای استاندارد شده	قابل انجام بصورت گام به گام، پایایی برای مدل غیرخطی	فرض خطی بودن مدل، متأثر از همبستگی‌ها
ضریب همبستگی پیرسون	در حالت نرمال همبستگی صفر، دلالت بر استقلال دارد.	مشکل پردازش پارامترها، مرتبه اعداد مهم است، فرض خطی بودن مدل، نامناسب برای نتایج غیر یکنوا، متأثر از همبستگی‌ها
ضریب همبستگی اسپیرمن	محاسبه ساده است.	فرض خطی بودن مدل، متأثر از همبستگی‌ها
ضریب همبستگی جزئی	متأثر از همبستگی بین پارامترها نیست	مشکل پردازش پارامترها، مرتبه اعداد مهم است، فرض خطی بودن مدل، نامناسب برای نتایج غیر یکنوا
ضریب همبستگی رتبه‌ای جزئی	متأثر از همبستگی بین پارامترها نیست	فرض خطی بودن مدل، نامناسب برای نتایج غیر یکنوا
ضرایب سوبول، FAST و FAST توسعه یافته	اثرات مرتبه اول و سایر اثرات را محاسبه می‌کند. مدل را خطی فرض نمی‌کند، ارائه مقادیر حساسیت به صورت عددی	نامناسب برای همبستگی‌ها، تنها برای توزیع‌های یکنواخت و نرمال قابل استفاده است، زمان تحلیل بالا

بنابراین :

$$\int_{R^1} F_{i_1,i_2,\ldots,i_s}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_s}) \times F_{j_1,j_2,\ldots,j_s}(x_{j_2},x_{j_2},\ldots,x_{j_s})\phi_n dx = 0 \quad (۱۲)$$

$$f_1(x_i) = -f_0 + \frac{1}{\phi_1(x_i)}\int_R \ldots \int_R f(\mathrm{x})\phi_n(x)\,d\mathrm{x}_{\sim \mathrm{i}} \quad (۱۳)$$

$$f_{ij}(x_i,x_j) = -f_0 - f_i(x_i) - f_j(x_j) + \frac{1}{\phi_2(x_i,x_j)}\int_R \ldots \int_R f(\mathrm{x})\phi_{n-2}(x)\,d\mathrm{x}_{\sim(\mathrm{ij})} \quad (۱۴)$$

علیرغم این توسعه روش سوبول همچنان در بسیاری از موارد آنالیز حساسیت قابل استفاده نیست. زیرا توزیع‌ها محدود به یکنواخت و نرمال نیستند. به همین جهت در این مقاله توسعه جدیدی از روش سوبول ارائه می‌شود به گونه ای که روش برای همه توزیع‌های پیوسته و گسسته قابل استفاده شود. به این روش، روش سوبول توسعه یافته می‌گوییم.

در روش سوبول برخورد با مساله ریاضی است. چنانچه مساله از دیدگاه آماری بررسی شود تفسیر آن ساده‌تر خواهد بود. فرض شود $x_1,\ldots,x_d$ متغیرهای تصادفی با توزیع $d\upsilon(x)= d\upsilon_1(x_1) \ldots d\upsilon_d(x_d)$ و f تابع انتگرال‌پذیری در فضای هاسدورف[1] باشد. در این صورت f تجزیه متعامد یکتایی خواهد داشت که به آن تجزیه FANOVA گفته می شود.

$$f_0 = \int_{R^k} f(\mathrm{x})\,\phi_n(x)\,d\mathrm{x}. \quad (۱۵)$$

[1] Hausdorff space

$$f(x)=\mu_0+\sum_{j=1}^{d}\mu_j(x_j)+\sum_{j<k}^{d}\mu_{j,k}(x_j,x_k)+\sum_{j<k<1}^{d}\mu_{j,k,l}(x_j,x_k,x_l)+\ldots+\mu_{1,\ldots,d}(x_1,\ldots,x_d) \quad (۱۶)$$

یعنی:

$$\begin{aligned}&\mu_0=E[f(x)]\\&\mu_k(x_k)=E[f(x)|x_k]-\mu_0\\&\mu_{j,k}(x_{j,k})=\\&E[f(x)|x_k,x_k]-\mu_j(x_j)-\mu_k(x_k)-\mu_0\end{aligned} \quad (۱۷)$$

سایر ضرایب سوبول نیز به روش مشابه قابل محاسبه است. بنابراین برای مناسب‌سازی روش سوبول برای هر توزیع دلخواه کافیست میانگین و میانگین های شرطی تابع f محاسبه شود.

روش کلاسیک سوبول در فضای ریاضی ارائه شده است . بدین معنی که بحثی از توزیع در آن نیست. در این روش انتگرال‌ها در فاصله [۰و۱] مورد توجه است. انتقال این روش به فضای آماری معادل توزیع یکنواخت در فاصله [۰و۱] است. به منظور استفاده از این روش لازم است متغیرهای ورودی یکنواخت فرض شده و به نحوی به محدوده [۰و۱] آورده شوند. بدیهی است این عمل برای متغیرهایی که بازه تغییرات آنها علامت ثابت داشته باشد ممکن خواهد بود. به دلیل همین محدودیت، در آنالیز حساسیت سوبول به روش کلاسیک دو مشکل اساسی زیر قابل شناسایی است:

* با توجه به یکنواختی توزیع متغیرهای ورودی اهمیت نوع توزیع قابل تعیین نیست.
* با توجه به ثابت بودن فاصله تغییرات، اهمیت بازه تغییرات قابل تعیین نیست.

بنابراین روش سوبول کلاسیک مدلی دقیق با ورودی‌های غیردقیق تعریف خواهد نمود که نمی‌تواند صحت نتایج را تضمین نماید. همچنین سنجش دقت سایر روش‌های آنالیز حساسیت بر این اساس ممکن نخواهد بود.

در انجام آنالیز حساسیت معمولاً محاسبات به دو مرحله تقسیم می‌شود: آنالیز مقدماتی و آنالیز دقیق. در آنالیز مقدماتی هدف تعیین کلیات رفتار مدل و احیاناً اصلاح آن است. در آنالیز دقیق مقادیر دقیق ضرایب اهمیت ورودی ارائه می‌شود. معمولاً توصیه آن است که در آنالیز مقدماتی برای متغیرها از توزیع‌های یکنواخت یا لگاریتم یکنواخت استفاده شود. تا هزینه محاسباتی کم شود. سپس با کاهش تعداد متغیرها در مدل آنالیز دقیق با توزیع‌های دقیق انجام شود.

انجام آنالیز حساسیت با توزیع دقیق در علوم مختلف یک ضرورت است. با توجه به وزن نسبتاً پایین برخی از متغیرها در مدل، با آنالیز حساسیت دقیق می‌توان پارامترهای مهم‌تر را مشخص نمود. در سایر آنالیزهای کمی این مساله چندان روشن نیست.

در روش سوبول توسعه یافته، اصلاح نحوه تعیین ضرایب به گونه‌ای انجام شده است که روش برای همه توزیع‌ها با هر محدوده‌ای قابل استفاده باشد. لازم به ذکر است که در صورت انجام تحلیل به روش عددی نمونه‌گیری از توزیع-های مختلف به روش مونت کارلو، بوت استرپ[1] یا سایر روش‌ها انجام گرفته و ضرایب حساسیت تعیین خواهد شد. به این ترتیب مهم‌ترین کاربردهای روش سوبول توسعه یافته در مقایسه با روش سوبول کلاسیک به شرح زیر است:

۱- تعیین میزان حساسیت دقیق مقدار خروجی به مقادیر ورودی‌ها
۲- تعیین تأثیر توزیع ورودی بر مقادیر حساسیت
۳- تعیین تأثیر پارامترهای توزیع ورودی بر حساسیت
۴- تعیین تأثیر محدوده نوسان متغیرها بر مقادیر حساسیت

۵- مثال عددی

به منظور روشن شدن مسأله و نشان دادن توانایی روش سوبول اصلاح شده در حل مسائل پیچیده، در این بخش مثالی عددی از مباحث تحلیل خطر زلزله ارائه شده است. در این مثال آنالیز حساسیت تحلیل خطر احتمالی زلزله منطقه تهران (دایره‌ای به مرکزیت تهران و با شعاع ۲۰۰ کیلومتر) مورد توجه قرار گرفته است.

مهندسی زلزله و لرزه شناسی مهندسی، علومی شبه تجربی هستند که در آنها، رفتار مدل تحلیلی با استفاده از تئوری به دست می‌آید؛ اما شکل، ضرایب و مقادیر آنها با استفاده از داده‌های تجربی تعیین می‌شوند. بدیهی است در نهایت قوت و دقت مدل در همخوانی آن با داده‌های تجربی تعیین می شود[۱۲].

تحلیل خطر امروزه بیشتر به روشی انجام می‌گیرد که توسط کُرنل [۱۰] و مرز و کُرنل [۴۹] ارائه شد. در روش آنها مشارکت انحراف معیار رابطه کاهندگی در انتگرال تحلیل

[1] boot strap

خطر به طور صریح اعمال شده است. کرنل بیان می‌کند که فرض می‌شود که معادله کاهندگی فرم تابعی[1] دارد. در واقع روابط کاهندگی روابطی خام با پراکندگی بسیار بالا حول مقدار رگرسیونی هستند. استوا قبلا پراکندگی را دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار σ بیان کرده بود.

مساله ارزیابی تأثیر تغییرپذیری پیش‌بینی‌های حرکت زمین چندین دهه مورد بحث قرار گرفته است. اولین نتیجه کمی توسط مک گیر [۱۳] و مک گیر و شلدوک [۱۴] ارائه شده است. آنها ابهامات تعریف برخی از متغیرهای ورودی تحلیل خطر را مشخص و تأثیر مقادیر مختلف آنها را بر نتایج خطر شرق ایالات متحده نشان داده‌اند و روشی محاسباتی برای تعیین تغییرپذیری تحلیل خطر منتج از عدم اطمینان‌های آماری مدل‌ها و پارامترها ارائه داده‌اند. آنها استفاده از درخت منطقی را تنها برای محاسبه میانگین پارامترهای غیر همبسته متقارن مجاز دانسته‌اند.کاپراسمیت و یانگز نحوه استفاده از درخت منطقی در محاسبه عدم اطمینان را تشریح کرده‌اند که در NRC(1988) نیز مورد استفاده قرار گرفت [۹]. سپس فرانکل و همکاران با تأیید یافته‌های آنها، قواعدی برای استفاده از روابط کاهندگی، تخصیص وزن‌ها و آنالیز حساسیت آنها ارائه نمودند [۱۴].

بوستس و بومر آنالیز حساسیت را بر اساس تفکیک خطر لرزه‌ای[2] برای امارات متحده عربی انجام داده‌اند. هدف آنها رفع ابهام در مورد منحنی‌های خطر مختلف ارائه شده در این منطقه بوده است. آنها پارامترهایی کلیدی تحلیل خطر به منظور آنالیز حساسیت را حداقل بزرگا، پارامترهای لرزه‌خیزی $(\nu_{min}, \beta, M_{max})$، روابط کاهندگی و وزن‌های درخت منطقی می‌دانند. آنها تأثیر تغییر پارامترها را بر خطر تفکیک شده مورد بررسی قرار داده و بهترین (محافظه کارانه‌ترین) مقادیر پارامترها را برای تحلیل خطر مورد استفاده قرار داده‌اند [۷۵].

فرانکل و همکاران در حوضه ایلینوی[3] تغییرپذیری تحلیل خطر را ٪۷۰ نشان داده‌اند. آنها مهم‌ترین عوامل تغییر-پذیری را حداقل بزرگا، نرخ لرزه‌خیزی و روابط کاهندگی ذکر کرده‌اند [۶۲].

بر اساس تحقیقات گذشته، توزیع اختصاص داده شده به متغیرهای اصلی تحلیل خطر زلزله نرمال، لوگ نرمال، گسسته وزنی، ویبول و یکنواخت بوده است [۱۵ و ۱۶]. به همین دلیل استفاده از روش سوبول در این حالات امکان-پذیر نبوده است. در این تحقیقات از روش‌های آنالیز غیردقیق استفاده شده است [۱۱ و ۱۷].

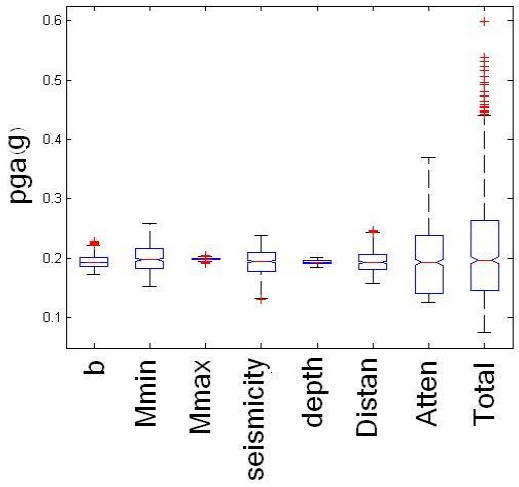
تحلیل خطر احتمالی منطقه تهران بر اساس اطلاعات موجود در مقاله یزدانی و همکاران انتخاب شده است [۱۸]. در این مثال متغیرهای تحلیل خطر بر اساس جدول ۲ در نظر گرفته شده است. بر اساس مدل‌های موجود، این متغیرها در روند تحلیل خطر احتمالی بیشترین نقش را دارند.

جدول ۲- توزیع متغیرهای تحلیل خطر زلزله

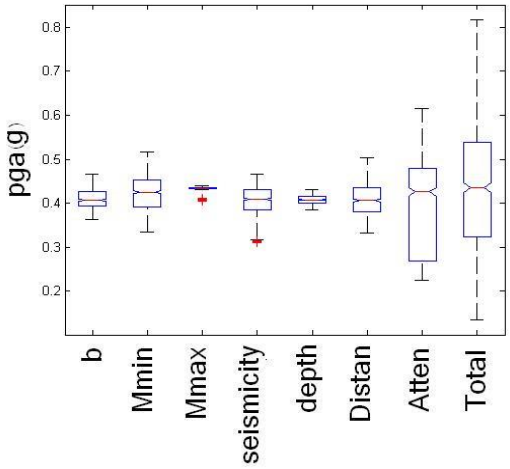
متغیر	توزیع
رابطه کاهندگی(Atten)	گسسته وزنی
مقدار b (گوتنبرگ- ریشتر)(b)	نرمال
حداقل بزرگا (Mmin)	نرمال
حداکثر بزرگا (Mmax)	یکنواخت
عمق زلزله (depth)	لوگ نرمال
فاصله گسل تا ساختگاه(Distan)	ویبول
نرخ لرزه خیزی(seismicity)	یکنواخت

با توجه به توزیع‌های اختصاص داده شده به متغیرها، آنالیز حساسیت به روش مقدماتی قابل انجام است. این روش بیشترین استفاده را در تحقیقات پیشین داشته است. نتایج آنالیز حساسیت مقدماتی انجام شده در این پژوهش، در اشکال (۱) و (۲) دیده می‌شود. در روش مقدماتی تعدادی نمونه (عدد) در محدوده توزیع تخصیص داده شده به متغیرها به صورت دستی انتخاب و محاسبات خطر برای مجموعه انتخاب شده انجام می‌شود. چنانچه در شکل دیده می‌شود اهمیت رابطه کاهندگی (Atten) نسبت به بقیه پارامترها بیشتر است. عمق زلزله (depth) و حداکثر بزرگا (Mmax) اهمیت کمی دارند. در این اشکال نتایج به صورت کلی و حسی ارائه شده است و اهمیت نسبی پارامترها با توزیع‌های مختلف دیده می‌شود اما مقدار دقیق حساسیت قابل دسترسی نیست.

[1] functional form
[2] hazard disaggregation
[3] Illinois Basin



شکل۱- نمودار حساسیت خطر به پارامترهای ورودی (احتمال تجاوز ۱۰٪ در ۵۰ سال)



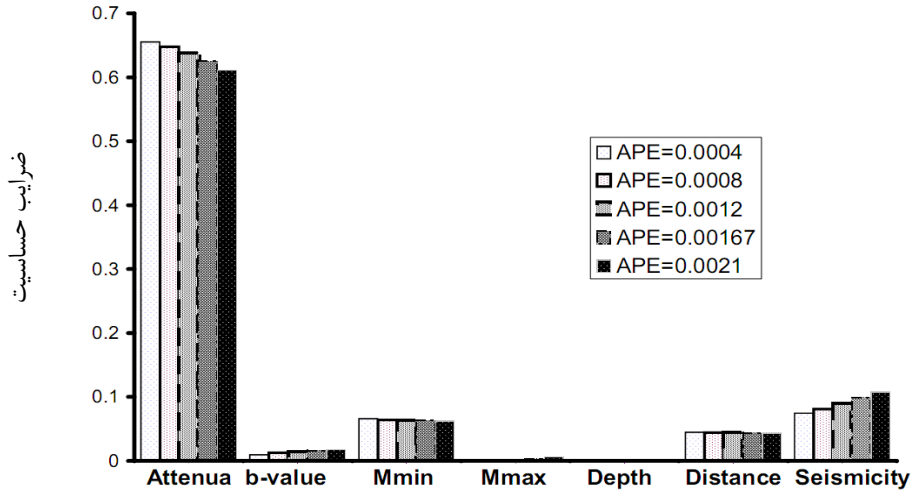
شکل۲- نمودار حساسیت خطر به پارامترهای ورودی (احتمال تجاوز ۲٪ در ۵۰ سال)

با توجه به آنکه قانون خاصی بر انتخاب نمونه در آنالیز حساسیت مقدماتی حاکم نیست، نتایج چندان قابل اعتماد نخواهد بود. روش سوبول توسعه داده شده در این مقاله می‌تواند این مشکل را مرتفع کند. در ادامه آنالیز حساسیت به روش سوبول توسعه یافته انجام می‌شود. هدف این آنالیزها به شرح زیر است: با توجه به توزیع انتخاب شده وزن هر یک از عوامل در نتایج خطر چقدر است؟ تأثیر انتخاب مدل ورودی بر اهمیت پارامترها چقدر است؟ بدیهی است که سوال دوم در روش سوبول قابل انجام نیست زیرا ورودی‌ها تنها می‌توانند توزیع یکنواخت داشته باشند.

در جدول ۳ و شکل (۳) نتایج آنالیز حساسیت (اثرات درجه ۱) برای پارامترهای مختلف در احتمال تجاوزهای متفاوت ارائه شده است. به عنوان مثال حساسیت رابطه کاهندگی در احتمال تجاوز ۲٪ در ۵۰ سال ۰٫۶۳ بوده و در احتمال تجاوز ۱۰٪ در ۵۰ سال به حدود ۰٫۶۲ رسیده است. کاهش بسیار اندک در ضریب حساسیت که میزان کاهش رفتاری یکنوا دارد. چنین رفتاری البته بصورت کاهشی یا افزایش بسیار کم در مورد سایر پارامترها نیز دیده می‌شود. به ترتیب با افزایش احتمال تجاوز سالانه میزان تغییرات ضرایب حساسیت چندان قابل توجه نبوده و قابل اغماض است. به عبارت دیگر نتایج بدست آمده از آنالیز حساسیت در یک احتمال تجاوز خاص قابل تعمیم به سایر احتمال تجاوزها خواهد بود.

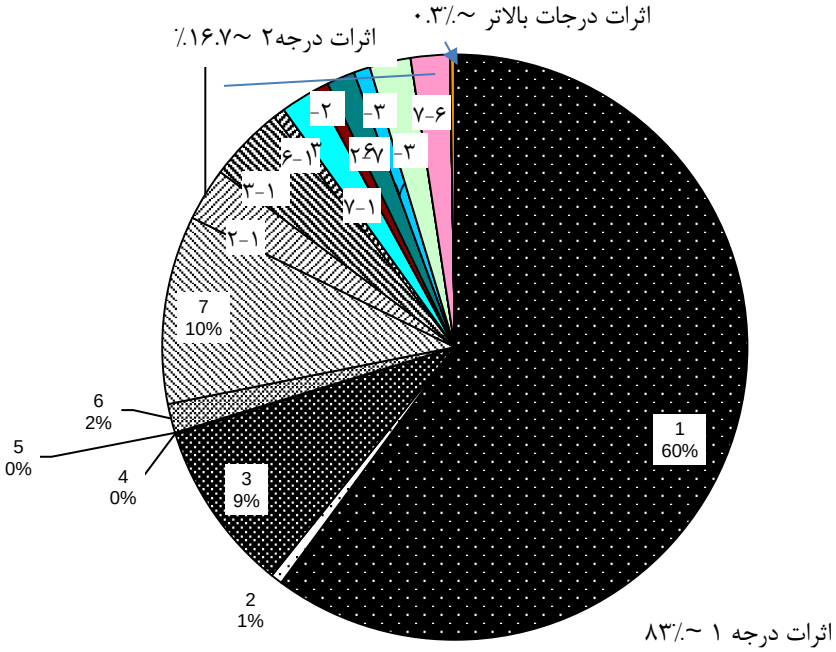
جدول ۳- نتایج آنالیز حساسیت آنالیز ۱ (اثرات درجه ۱)

پارامتر	احتمال فراگذشت سالیانه (APE)				
	۰٫۰۰۲۱	۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۴
رابطه کاهندگی	۰٫۶۲۵۹۷۵	۰٫۶۳۹۶۲۷	۰٫۶۶۷۹۵۹	۰٫۰۶۴۷۸۵۷	۰٫۰۶۳۹۶۸
مقدار b (گوتنبرگ- ریشتر)	۰٫۰۱۸۱۰۷	۰٫۰۱۶۳۱۹	۰٫۰۱۴۷۴۱	۰٫۰۱۲۴۰۳	۰٫۰۰۹۳۸۷
حداقل بزرگا	۰٫۰۶۴۰۰۸	۰٫۰۶۴۳۱۷	۰٫۰۶۶۳۵۳	۰٫۰۶۳۸۵۷	۰٫۰۶۴۵۲۳
حداکثر بزرگا	۰٫۰۰۶۲۱۵	۰٫۰۰۳۸۱۵	۰٫۰۰۰۹۶۴	۰٫۰۰۰۰۸۷۴	۰٫۰۰۰۰۸۵۷
عمق زلزله	۰٫۰۰۱۴۱۱	۰٫۰۰۰۰۸۱	۰٫۰۰۰۱۰۱	۰٫۰۰۰۱۳۱	۰٫۰۰۰۰۹۴۳
فاصله گسل تا ساختگاه	۰٫۰۴۴۲۱۶	۰٫۰۴۴۸۴	۰٫۰۴۶۲۸۵	۰٫۰۴۴۳۸۱	۰٫۰۴۳۶۹۲
نرخ لرزه خیزی منطقه	۰٫۱۱۰۰۶۷	۰٫۰۱۰۱۰۰۱	۰٫۰۹۳۵۹۸	۰٫۰۸۱۲۸۳	۰٫۰۷۲۵۳۸



شکل ۳- نمودار حساسیت مرتبه اول با تغییر احتمال تجاوز سالانه (APE)

شکل شماره (۴) نتیجه آنالیز حساسیت بر حسب روش سوبول را برای منطقه تهران نشان می‌دهد. در این شکل مقادیر دقیق حساسیت دیده می‌شود. این شکل اهمیت نسبی ضرایب حساسیت مراتب مختلف را نشان می‌دهد. ضرایب مرتبه اول حدود ۸۳ درصد، مرتبه دوم حدود ۱۶,۷ درصد و ضرایب ۳ تا ۷ حدود ۰,۳ درصد کل را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب اهمیت ضرایب مرتبه اول مشخص می‌شود. یعنی با انجام تنها آنالیز مرتبه اول می‌توان حدود ۸۳ پاسخ را پوشش داد. نتایج به دست آمده در زمینه روابط کاهندگی و ضریب لرزه‌خیزی همخوانی خوبی با تحقیقات پیشین دارد [۱۹-۲۱]. حاکمیت این موضوع به حدی است که بسیاری از تحقیقات انجام شده در منطقه تهران تنها تغییرپذیری روابط کاهندگی را در محاسبات تحلیل خطر در نظر گرفته‌اند [۲۲ و ۲۳]. در زمینه حداقل بزرگا اختلاف اندکی با برخی تحقیقات غالب در تحلیل خطر دارد و البته برخی از محققان اخیراً به اهمیت حداقل بزرگا تأکید داشته‌اند [۲۴]. علت این تفاوت را می‌توان بالا رفتن دقت محاسبه در روش سوبول توسعه یافته دانست.



شکل ۴- نمودار ضرایب حساسیت سوبول توسعه یافته برای پارامترهای تحلیل خطر زلزله در منطقه تهران با نمایش سهم نسبی پارامترها و مراتب ضرایب؛ ۱: کاهندگی، ۲: مقدار b، ۳: حداقل بزرگا، ۴: حداکثر بزرگا، ۵: عمق زلزله، ۶: فاصله گسل تا ساختگاه ، ۷: نرخ لرزه‌خیزی منطقه ؛ اثرات مرتبه ۲ با اعداد نشانگر دو پارامتر سهیم نوشته شده است.

۶- نتیجه‌گیری

برای انجام آنالیز حساسیت روش‌های مختلفی وجود دارد. روش‌های مبتنی بر رگرسیون و روش‌های مبتنی بر واریانس. روش‌های مبتنی بر واریانس به علت دقت بالاتر بهتر هستند. در میان روش‌های مبتنی بر واریانس روش سوبول که مبتنی بر جداسازی تابع هدف است، توانایی ارائه پاسخ حساسیت دقیق را دارست. این روش عددی مبتنی بر روش نمونه‌گیری مونت کارلو است. در این مقاله از روش مبتنی بر واریانس سوبول استفاده شده است. این روش که ابتدا برای توزیع یکنواحت قابل استفاده بوده است در سال ۲۰۱۰ توسط آروارد و همکاران برای توزیع نرمال نیز توسعه یافته و در مسائل سازه‌ای استفاده شده است [۱۰]. با توجه به محدوده وسیع توزیع‌های پارامترهای ورودی در سایر علوم از جمله تحلیل خطر زلزله، روش سوبول به این صورت قابل استفاده نبوده و لازم است حداقل دو امکان به فرمول-بندی اضافه شود.

- سایر توزیع ها بتوانند به عنوان ورودی استفاده شوند.
- برای توزیع‌های گسسته قابل استفاده باشد.

در این پژوهش توسعه این روش با استفاده از ترکیب مفاهیم آماری با روش ریاضی موجود انجام شده است. بدین ترتیب روش سوبول توسعه داده شده، برای همه توزیع‌های پیوسته مناسب‌سازی شده است. مثال ارائه شده کاربردی بودن روش را نشان می‌دهد. با توجه به همخوانی مناسب نتایج با کارهای انجام شده گذشته در منطقه [۲۴ و ۲۵]، روش سوبول توسعه یافته در این مقاله می‌تواند برای تعیین مقادیر دقیق ضرایب حساسیت در همه مسائل با هر نوع توزیع مورد استفاده قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

بدینوسیله از جناب آقای دکتر محمد صالحی ویسی و خانم مژگان خزاعی به دلیل ارائه مشاوره‌های آماری و ریاضی تشکر می‌شود. همچنین مراتب قدردانی خود را از داوران محترم به دلیل ارائه رهنمودهای اساسی در اصلاح مقاله اعلام می‌داریم.

مراجع

[1] A. Saltelli, & R. Bolado, "An alternative way to compute Fourier amplitude sensitivity test (FAST)", Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 26, No.4, pp. 445–460.

[2] A. Saltelli, & S. Funtowicz, When all models are wrong, Issues in Science and Technology, 30–2, 2013.

[3] A. Saltelli, M. Ratto, S. Tarantola, & F. Campolongo, "Update 1 of: sensitivity analysis for chemical models", Chemical reviews, Vol. 112, No. 5, 2012, pp. PR1–PR21.

[4] I.M. Sobol, "Sensitivity analysis or nonlinear mathematical models", Math Model Comput Exp, Vol. 1, No. 4, 1993, pp. 407–414.

[5] I.M. Sobol, "On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models", Matematicheskoe Modelirovanie, Vol. 2, No. 1, 1990, pp. 112–118.

[6] J. Nossent, P. Elsen, & W. Bauwens, "Sobol'sensitivity analysis of a complex environmental model", Environmental Modeling & Software, Vol. 26, No. 12, 2011, pp. 1515–1525.

[7] B. Iooss, & P. Lemaître, "A review on global sensitivity analysis methods", In Uncertainty Management in Simulation-Optimization of Complex Systems, Springer US, 2015, pp. 101–122.

[8] Z. Wu, D. Wang, P. Okolo, F. Hu, & W. Zhang, "Global sensitivity analysis using a Gaussian Radial Basis Function metamodel", Reliability Engineering & System Safety, Vol. 154, 2016, pp. 171–179.

[9] F. Sabetta, A. Lucantoni, H. Bungum, & J.J. Bommer, "Sensitivity of PSHA results to ground motion prediction relations and logic-tree weights", Soil dynamics and earthquake engineering, Vol. 25, No. 4, 2005, pp. 317–329.

[10] S.R. Arwade, M. Moradi, & A. Louhghalam, "Variance decomposition and global sensitivity for structural systems", Engineering Structures, Vol. 32, No. 1, 2010, pp. 1–10.

[11] L. Eisner, P.M. Duncan, W.M. Heigl, & W.R. Keller, "Uncertainties in passive seismic monitoring", The Leading Edge, Vol. 28, No. 6, 2009, pp. 648–655.

[۱۲] ح. بخشی، م. رخشانی مهر، م. نوروزی، "تحلیل خطر لرزه ای و تهیه نقشه های هم شتاب شهرستان نیشابور"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۵، شماره ۵۰، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۲۱۱-۲۲۳.

[13] G. Aldama-Bustos, J.J. Bommer, C.H. Fenton, & P.J. Stafford, "Probabilistic seismic hazard analysis for rock sites in the cities of Abu Dhabi, Dubai and Ra's Al Khaymah, United Arab Emirates", Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards, Vol. 3, No. 1, 2009, pp. 1–29.

[14] A.D. Frankel, C. Mueller, T. Barnhard, D. Perkins, E. Leyendecker, N. Dickman, & M. Hopper, "National seismic-hazard maps: documentation", US Geological Survey, 1996, pp. 96–532.

[۱۵] م. رخشانی مهر، م. راشکی، م. میری، م. اژدری مقدم، "ارزیابی قابلیت اطمینان قاب‌های خمشی فلزی با استفاده از روش شبیه‌سازی وزنی و درونیابی تابع پایه شعاعی"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۴، شماره ۴۷، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۲۱-۳۲.

[۱۶] م.م. خطیبی، م.ر. آشوری، ع.ر. آلبویه، "میزان‌سازی دقیق شکل مودهای آنالیز مودال محیطی با استفاده از آنالیز حساسیت"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۵، شماره ۱۹، زمستان ۱۳۸۸، صفحه ۱-۱۰.

[17] G.M. Atkinson, & K. Goda, "Effects of seismicity models and new ground-motion prediction equations on seismic hazard assessment for four Canadian cities", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 101, No.1, 2011, pp. 176–189.

[18] A. Yazdani, A. Nicknam, M. Khanzadi, & S. Motaghed, "An artificial statistical method to estimate seismicity parameter from incomplete earthquake catalogs, A case study in metropolitan Tehran, Iran", Scientia Iranica, Transaction A, Civil Engineering, Vol. 22, No. 2, 2015, 400–409.

[19] T. Ornthammarath, J. Douglas, R. Sigbjörnsson, C. Lai, "Assessment of ground motion variability and its effects on seismic hazard analysis: A case study for Iceland", Bulletin of Earthquake Engineering, Springer Verlag, Vol. 9, No. 4, 2011, pp.931–953.

[20] G. Ameri, F. Hollender, V. Perron, & C. Martin, "Site-specific partially nonergodic PSHA for a hard-rock critical site in southern France: adjustment of ground motion prediction equations and sensitivity analysis", Bulletin of Earthquake Engineering, Vol. 15, No. 10, 2017, pp. 4089–4111.

[21] C. Molkenthin, F. Scherbaum, A. Griewank, H. Leovey, S. Kucherenko, & F. Cotton, "Derivative-Based Global Sensitivity Analysis: Upper Bounding of Sensitivities in Seismic-Hazard Assessment Using Automatic Differentiation", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 107, No. 2, 2017, pp. 984–1004.

[22] J.J. Bommer, & H. Crowley, “The Purpose and Definition of the Minimum Magnitude Limit in PSHA Calculations", Seismological Research Letters, Vol. 88, No. 4, 2017, pp. 1097–1106.

[23] M. Moradi, M.R. Delavar, & B. Moshiri, "Sensitivity analysis of ordered weighted averaging operator in earthquake vulnerability assessment", In Proceedings of SMPR 2013 Conference, 2013, pp. 5–8.

[24] M. Mahmoudi, M. Shayanfar, M.A. Barkhordari, & E. Jahani, "New fuzzy method in choosing Ground Motion Prediction Equation (GMPE) in probabilistic seismic hazard analysis", Earthquakes and Structures, Vol. 10, No. 2, 2016, pp. 389–408.

[25] G.G. Amiri, R. Motamed, & H.R. Es-Haghi, "Seismic hazard assessment of metropolitan Tehran, Iran", Journal of Earthquake Engineering, Vol. 7, No. 3, 2003, pp. 347–3