فضای کاری بهینه جابجایی دینامیکی برای ربات بازویی تک لینکی

امین نیکوبین[۱،*]، زهرا فراشی[۲]، محسن عسگری[۳] و مجتبی مرادی[۴]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۱۲/۱۳

پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۱۸

واژگان کلیدی:

جابجایی دینامیکی،

فضای کاری،

ربات تک لینکی،

کنترل بهینه،

روش غیر مستقیم.

چکیده

در جابجایی دینامیکی اجسام، با پرتاب جسم توسط ربات می‌توان جسم مورد نظر را در نقاطی بسیار دورتر از فضای کاری قابل دسترس ربات قرار داد. در این مقاله مفهوم فضای کاری قابل پرتاب یا فضای کاری جابجایی دینامیکی به صورت مجموعه نقاطی از فضا که ربات قادر به پرتاب جسم در آن‌ها می‌باشد، تعریف می‌گردد. حال جهت به دست آوردن ماکزیمم فضای کاری قابل پرتاب یعنی دورترین نقاطی که ربات می‌تواند جسم مورد نظر را در آن‌ها قرار دهد، لازم است تا در ابتدا مسأله پرتاب بهینه حل شود. مسأله پرتاب بهینه در این مقاله به صورت یک مسأله کنترل بهینه تعریف می‌شود که برای حل آن روش غیر مستقیم براساس قضیه اساسی حساب تغییرات به کار گرفته می شود. با اعمال معادله پرتاب به صورت یک شرط مرزی متحرک در مسأله، شرایط بهینگی استخراج شده به صورت یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای در خواهد آمد که با حل آن پاسخ پرتاب بهینه به دست خواهد آمد. نهایتاً براساس مسأله پرتاب بهینه، یک الگوریتم جهت محاسبه ماکزیمم فضای کاری قابل پرتاب ارائه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی برای یک ربات تک لینکی ارائه می‌شود تا مفاهیم معرفی شده و کارایی روش پیشنهادی در حل مسأله بهینه نشان داده شود.

۱-مقدمه

جابجایی دینامیکی یک زمینه‌ی کاری جدید در علم رباتیک است که به طور کلی به بررسی مهارت‌های جابجایی، که ناشی از تعاملات بین ربات و جسم است، می‌پردازد و ربات را قادر می‌سازد جسم را به خارج از محدوده‌ی فضای کاری، پرتاب کند [۱]. از جمله مزایای آن می‌توان به ساده و کم هزینه بودن تجهیزات مکانیکی، افزایش انعطاف‌پذیری سیستم‌ها و سریع‌تر شدن فرآیند انتقال اشاره کرد [۲]. برای مدت‌های زیادی از وسایل پرتاب کننده برای هدف آموزشی ورزشی استفاده می‌شده است که می‌توان به ماشین‌های پرتاب توپ تنیس [۳]، تنیس روی میز [۴]، ماشین‌های فوتبال [۵] و توپ گلف [۶] و... اشاره کرد. از دیگر تحقیقاتی که در زمینه ربات پرتاب‌کننده انجام گرفته است، می‌توان به مواردی که در ادامه آمده است اشاره نمود. موری و همکاران به بررسی و کنترل مستقل متغیر های سینماتیکی در پرتاب، توسط ربات یک درجه آزادی پرداخته‌اند [۱]. فرانک و همکاران مسأله پرتاب را با درنظرگرفتن مقاومت هوا، برای یک ربات یک درجه آزادی

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: anikoobin@semnan.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۲. کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۳. دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۴. دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه امیر کبیر

بررسی کرده‌اند [۷]. شوجی و همکاران یک روش کنترلی براساس مفهوم دینامیک صفر ناپایدار را برای حرکت پرتابی یک ربات دو لینکی ارائه داده‌اند [۸]. ناکازاکی و همکاران پرتاب دارت [۹] و هو و همکاران پرتاب توپ به داخل سبد بسکتبال را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۰]. مکارم و همکاران به بررسی مدلسازی و بهینه‌سازی پرتاب اجسام فعال پرداخته‌اند [۱۱]. بیگ‌زاده و همکاران چند مثال از جابجایی دینامیکی را بررسی کرده‌اند که در آن جسم تحت تأثیر وزن خود در مسیری حرکت می‌کند [۱۲]. اکبری‌مجد و همکاران بحث جابجایی دینامیکی اجسام چند ضلعی توسط بازوهای یک درجه آزادی پشت سرهم [۱۳] و همچنین دو ربات سه درجه آزادی [۱۴] را مورد بررسی قرار داده‌اند. تارویردی‌زاده و همکاران به بررسی جابجایی دینامیکی اشیاء به وسیله بازوی مکانیکی انعطاف‌پذیر به صورت تئوری و عملی برای ربات تک‌لینکی [۱۵] و همچنین طراحی مسیر بهینه برای ربات دو لینکی صلب-انعطاف‌پذیر با هدف جابجایی دینامیکی، پرداخته‌اند [۱۶]. ایچینز و همکاران ربات الگوبرداری شده از بازوی انسان را طبق روش کنترلی که براساس صفر خروجی است، برای حرکت پرتابی بررسی کرده‌اند [۱۷]. فرنک و همکاران به بررسی پرتاب جسم، توسط ربات ۶ درجه آزادی پرداخته‌اند [۱۸]. یکی از روش‌های افزایش کارایی ربات‌ها، طراحی مسیر بهینه می‌باشد. تا کنون طراحی مسیر حرکت ربات‌های سری [۲۷]، طراحی مسیر حرکت ربات‌های متحرک جهت دست‌یابی به پایدارترین حرکت [۱۹] و یا طراحی مسیر برای ربات‌های یدک کش [۲۰] در تحقیقات گذشته انجام گرفته است. با بررسی‌های انجام شده، طراحی مسیر برای ربات‌ها جهت رسیدن به یک پرتاب بهینه تاکنون انجام نشده است. به طور کلی مسأله طراحی مسیر بهینه را می‌توان به یک مسأله کنترل بهینه تبدیل نمود که دو روش مستقیم و غیر مستقیم برای حل آن وجود دارد [۲۱]. در روش مستقیم ابتدا متغیرهای حالت و کنترل، تفکیک شده و مسأله کنترل بهینه به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود. سپس از الگوریتم‌های بهینه‌سازی نظیر تبرید شبیه سازی شده، الگوریتم ژنتیک و غیره برای محاسبه مقدار بهینه پارامترها استفاده می‌شوند[۲۲]. روش غیر مستقیم به عنوان یک روش دقیق، بر اساس روش حساب تغییرات می باشد و سرعت همگرایی بسیار بالایی دارد که ابتدا مسأله را به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل نموده و سپس متغیرهای حالت و کنترل، تفکیک شده و شرایط لازم بهینگی از اصل مینیمم پونتریاگین استخراج می‌شود [۲۳-۲۴]. در طراحی مسیر بهینه می‌توان توابع هدف مختلفی را در نظر گرفت که شامل گشتاور کمینه، مدت زمان کمینه حرکت، توان کمینه و غیره می‌باشد. از فعالیت‌های انجام شده در زمینه طراحی مسیر بهینه به روش غیر مستقیم، می‌توان به مقالاتی که در ادامه آمده است، اشاره نمود.

بسکاریول و همکاران [۲۵] برای ربات‌های بازویی با لینک انعطاف‌پذیر، کالیس و همکاران برای یک ربات سری صلب [۲۶]، صالحی و همکاران [۲۷] برای ربات بازویی با مفاصل انعطاف پذیر و همچنین قاسمی و همکاران [۲۸] برای ربات سری، از روش غیر مستقیم برای طراحی مسیر زمان بهینه استفاده کرده‌اند. نیکوبین و همکاران [۲۹] بالانس بهینه برای ربات‌های سری را با استفاده از جرم و فنر ارائه کرده‌اند. کورایم و همکاران به طراحی مسیر بهینه برای ربات کابلی معلق [۳۰]، ربات کابلی فضایی [۳۱] و ربات‌های متحرک با لینک‌ها و مفصل‌های انعطاف پذیر [۳۲]، با روش غیرمستقیم پرداخته اند. قربانی و همکاران روش جدیدی را برای طراحی مسیر بهینه برای یک شناور تندروی پروازی پیشنهاد داده‌اند [۳۳]. با بررسی کارهای انجام شده در زمینه طراحی مسیر بهینه و همچنین کارهای انجام شده به روش غیر مستقیم، مشاهده می‌شود که تاکنون برای مکانیزم‌های پرتاب کننده، پرتاب بهینه مورد بررسی قرار نگرفته است. در این مقاله این کار با روش غیر مستقیم انجام گرفته و علاوه بر آن به مفهوم جدیدی به نام فضای کاری قابل پرتاب که تاکنون بررسی و حل نگردیده، پرداخته شده است. با توجه به محدودیت گشتاور موتورها، جسم مورد نظر در یک محدوده مشخصی پرتاب می‌شود که در این مقاله به نام فضای کاری قابل پرتاب معرفی شده است. در ادامه، ابتدا با به دست آوردن معادلات دینامیکی ربات تک لینکی و سپس با در نظر گرفتن یک تابع هدف و تعریف متغیرهای شبه حالت، تابع همیلتونین بدست آمده و شرایط لازم بهینگی با استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات و اصل مینیموم پونتریاگن استخراج می‌شود. معادلات بدست آمده، یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را تشکیل می‌دهندکه با استفاده از دستور bvp4c در نرم افزار متلب حل می‌شود. در ادامه مسأله طراحی مسیر بهینه برای مکانیزم تک لینکی در نظر گرفته می‌شود. سپس با ارائه

یک الگوریتم، به فضای کاری پرتاب ربات پرداخته می‌شود. نهایتاً با شبیه‌سازی‌های انجام گرفته میزان دقت و کارآیی روش پیشنهاد شده نشان داده می‌شود.

۲- فرمولاسیون مسأله در حالت کلی

۲-۱- استخراج کلی معادلات دینامیکی

معادلات حرکت یک ربات بازویی n درجه آزادی را می‌توان با استفاده از روش لاگرانژ استخراج کرده و به شکل خلاصه معادله (۱) نوشت[۳۴].

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{G}(\mathbf{q})=\mathbf{u} \qquad (۱)$$

که $\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس اینرسی، $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ بردار نیروهای کریولیس و جانب مرکز، $\mathbf{G}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ اثرات جاذبه و $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ نیروهای تعمیم‌یافته اعمالی توسط محرک‌ها یا گشتاور ورودی می‌باشد. $\mathbf{q}$ و $\dot{\mathbf{q}}$ نیز به‌ترتیب موقعیت و سرعت زاویه‌ای مفاصل به صورت زیر می‌باشند.

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & \dots & q_n\end{bmatrix}^T=[\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n]^T$$
$$\dot{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dots & \dot{q}_n\end{bmatrix}^T=[\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,\dots,\dot{\theta}_n]^T$$

۲-۲- استخراج شرایط لازم بهینگی

برای بیان مسأله کنترل بهینه، در ابتدا لازم است معادلات حرکت ربات به فرم فضای حالت نوشته شوند. انتخاب متغیرهای حالت باید به‌گونه‌ای باشد که حرکت جرم بازو را به‌طور کامل تبیین نماید. با انتخاب موقعیت و سرعت زاویه‌ای بازو به‌عنوان متغیرهای حالت طبق رابطه (۲)

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

که

$$\mathbf{x_1}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{x_2}=\begin{bmatrix}x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n}\end{bmatrix}^T$$

معادله حرکت (۱) به شکل فضای حالت مطابق با رابطه (۳) بیان می‌شود.

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_2\\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\left[\mathbf{u}-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2-\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\right]\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

معادله (۳) را می‌توان به فرم خلاصه معادله (۴) نوشت.

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \qquad (۴)$$

که در آن

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_2\\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\left[\mathbf{u}-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2-\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\right]\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

حال مسأله طراحی مسیر بهینه بازو را می‌توان به صورت مسأله کنترل بهینه بیان نمود. اگر $\overline{U}$ مجموعه کنترل قابل قبول در بازه‌ی زمانی $t\in[t_0,t_f]$ باشد، مسأله بهینه سازی یافتن $u^*(t)\in\overline{U}$، به طوری که سیستم داده شده در رابطه (۴) تابع هدف (۶) را مینیمم کند.

$$J=\int_{t_0}^{t_f}L\left(\mathbf{u}(t),t\right)dt \qquad (۶)$$

در این معادلات t_0 و t_f زمان‌های اولیه و نهایی معلوم می‌باشند و L تابع هدف و در حالت کلی تابعی از سیگنال کنترل گشتاورها و حالت‌ها می‌باشد. در ادامه با تعریف بردار شبه حالت به صورت رابطه (۷)

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_3\\ \mathbf{x}_4\end{bmatrix} \qquad (۷)$$

تابع همیلتونین به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$H=L+\boldsymbol{\psi}^T\mathbf{F} \qquad (۸)$$

با جایگذاری روابط (۵) و (۷)، در رابطه (۸)، تابع همیلتونین به شکل معادله (۹) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}H&=L+\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2\\ &+\mathbf{x}_4\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1}(\mathbf{u}-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2-\mathbf{G}(\mathbf{x}_1))\end{aligned} \qquad (۹)$$

حال با استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات در صورتی که محدودیتی روی سیگنال کنترل وجود نداشته باشد برای کمینه شدن تابع J، باید معادلات (۱۰) تا (۱۲) برآورده شود [۳۵].

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\psi}} \qquad (۱۰)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}} \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}}=0 \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری معادله (۹) در روابط (۱۰) و (۱۱)، شرایط بهینگی براساس رابطه (۱۳) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\
\dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\left[\mathbf{u}-\mathbf{C}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2-\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\right] \\
\dot{\mathbf{x}}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} \\
\dot{\mathbf{x}}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_2}
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

حال با تعریف تابع هدف به صورت رابطه (۱۴)

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \qquad (۱۴)$$

با استفاده از معادله (۱۲) قانون کنترل بهینه به صورت معادله (۱۵) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{x}_4\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) \qquad (۱۵)$$

که $\mathbf{M}$ ماتریس اینرسی می‌باشد. با توجه به اینکه موتور هر مفصل دارای منحنی عملکرد مشخصی است و در یک محدوده مشخصی کار می‌کند لذا محدوده کنترلی قابل قبول $\overline{\mathrm{U}}$ به‌صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود.

$$\overline{\mathbf{U}} = \left\{\mathbf{u}\left|\mathbf{U}^- \le \mathbf{u} \le \mathbf{U}^+\right.\right\} \qquad (۱۶)$$

که در رابطه (۱۶) U^- و U^+ به ترتیب حد پایین و بالا سیگنال کنترل اعمال شده به سیستم می‌باشند. در صورت وجود محدودیت روی تابع کنترل ورودی، اصل مینیمم پونتریاگن بیان می‌کند که برای مینیمم شدن تابع هدف J، کنترل بهینه $\mathbf{u}^*(t) \in \overline{\mathrm{U}}$، باید همیلتونین را مینیمم کند. به عبارت دیگر رابطه (۱۷) باید به ازای هر $\mathbf{u} \in \overline{\mathrm{U}}$ و $t \in [t_0, t_f]$ برقرار باشد[۳۵]. در معادلات بالا نماد (*) مقادیر بهینه را نشان می‌دهد.

$$H\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\psi}^*,t\right) \le H\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u},\boldsymbol{\psi}^*,t\right) \qquad (۱۷)$$

در این صورت، با استفاده از معادله (۱۷) قانون کنترل بهینه به صورت معادله (۱۸) بیان می‌شود.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{U}^+ & \mathbf{u} > \mathbf{U}^+ \\ -\mathbf{x}_4\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) & \mathbf{U}^- \le \mathbf{u} \le \mathbf{U}^+ \\ \mathbf{U}^- & \mathbf{u} < \mathbf{U}^- \end{cases} \qquad (۱۸)$$

با جایگزین کردن گشتاور بهینه حاصل از معادله (۱۵) در معادله (۱۳)، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول غیرخطی به‌دست می‌آید که دو شرط مرزی آن مطابق رابطه (۱۹) در ابتدای مسیر می‌باشد.

$$\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{q}_0 \quad , \quad \mathbf{x}_2(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه برای پرتاب جسم به یک نقطه، زوایا و سرعت‌های پرتاب بی‌شماری وجود دارد، مطابق [۳۵]، برای یافتن زاویه و سرعت پرتاب بهینه، شرط مرزی متحرک برای یافتن دو شرط انتهایی به کار گرفته می‌شود. برای شرط مرزی انتهایی اول، معادله مسیر پرتاب را به‌عنوان شرط مرزی متحرک به‌کار می‌بریم تا در انتهای مسیر حرکت پنجه ربات، پرتابه در زاویه بهینه به مسیر پرتاب رهنمون گردد. لذا معادله قیدی (۲۰) به‌کار گرفته می‌شود.

$$w_i(\mathbf{x}(t_f)) = 0 \qquad (۲۰)$$

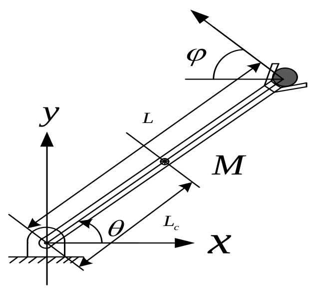
که در معادله (۲۰)، w همان معادله مسیر پرتاب می‌باشد. شرط مرزی انتهایی دیگر نیز با حذف d از رابطه (۲۱) محاسبه می‌گردد [۳۵].

$$\begin{aligned}
-P(t_f) &= d_1\left[\frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}(t_f)\right)\right]+ \\
&\ldots + d_k\left[\frac{\partial w_k}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}(t_f)\right)\right]
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که در آن w و $\mathbf{x}$ به ترتیب قیدها و متغیرهای حالت و کنترل می‌باشند. چهار معادله (۱۳) به همراه شرایط مرزی فوق، یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را تشکیل می‌دهند.

۳-۲- بیان مسأله برای ربات تک لینکی

شکل (۱) یک ربات تک لینکی با زاویه پرتاب φ را نشان می‌دهد که در هنگام پرتاب جرم پرتابه به صورت عمود از پنجه رها می‌شود.



شکل ۱- ربات تک لینکی با زاویه پرتاب φ

با توجه به شکل ۱، x_0، y_0 و φ از معادله (۲۲) به‌دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} x_0 = l\cos\theta \\ y_0 = l\sin\theta \end{cases}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \xrightarrow{or} \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{V_{0y}}{V_{0x}}\right) \qquad (۲۲)$$

که در رابطه (۲۲)، φ، x_0 و y_0 به ترتیب زاویه پرتاب، مختصات افقی و عمودی انتهای لینک یا نقطه شروع پرتاب می‌باشند. با محاسبه انرژی جنبشی و پتانسل ربات و استفاده از روش لاگرانژ، معادله دینامیکی ربات تک لینکی به صورت رابطه (۲۳) به دست می‌آید [۳۴].

$$(I+m_pl^2+\frac{ml^2}{4})\ddot{\theta} \\ +(\frac{m}{2}+m_p)glcos\theta+c\dot{\theta}=\tau \qquad (۲۳)$$

که در آن m_p، c، m، l و I به ترتیب جرم پرتابه، ضریب میرایی، جرم، طول و ممان اینرسی لینک می‌باشند.
با توجه به روابط (۵) و (۱۳)، فرم فضای حالت و همیلتونین معادله دینامیکی، به‌ترتیب طبق رابطه (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آید.

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{\tau-cx_2-\left(\dfrac{mgl}{2}+m_pgl\right)\cos x_1}{I+m_pl^2+\dfrac{ml^2}{4}} \end{bmatrix} \qquad (۲۴)$$

$$H=L+x_3x_2 \\ +x_4\left(\frac{\tau-cx_2-(\dfrac{mgl}{2}+m_pgl)cosx_1}{I+m_pl^2+\dfrac{ml^2}{4}}\right) \qquad (۲۵)$$

با جایگذاری همیلتونین (۲۵) در معادلات (۱۳)، معادلات بهینگی مطابق (۲۶) به‌دست می‌آید:

$$\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial\psi_1}=\frac{\partial H}{\partial x_3}=x_2 \\ \dot{x}_2=\frac{\partial H}{\partial\psi_2}=\frac{\partial H}{\partial x_4} \\ =\frac{1}{(I+\dfrac{ml^2}{4}+m_pl^2)}(\tau-cx_2 \\ -m_pg\frac{l}{2}\cos x_1-\frac{mgl\cos x_1}{2}) \\ \dot{x}_3=\dot{\psi}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ =\frac{x_4}{(I+\dfrac{ml^2}{4}+m_pl^2)}(-m_pgl\sin x_1 \\ -\frac{mgl\sin x_1}{2}) \qquad (۲۶)$$

$$\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial\psi_1}=\frac{\partial H}{\partial x_3}=x_2 \\ \dot{x}_4=\dot{\psi}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}= \\ -x_3+\frac{cx_4}{(I+\dfrac{ml^2}{4}+m_pl^2)}$$

حال می‌توان قانون کنترلی بهینه را مطابق معادله (۲۷) نوشت:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0\rightarrow u=-\frac{x_4}{\left(I+\dfrac{ml^2}{4}+m_pl^2\right)} \qquad (۲۷)$$

با جایگزین کردن گشتاور بهینه حاصل از معادله (۲۷) در (۲۶) چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول غیرخطی به‌دست می‌آید که حل آن مستلزم اعمال چهار شرط مرزی در نقاط ابتدا و انتها می‌باشد. شرایط مرزی در ابتدای مسیر طبق رابطه‌ی (۱۹) در نظر گرفته شده‌است. برای شرط مرزی در انتهای مسیر، معادله پرتابه (۲۸)

$$(x_f-x_0)\tan\varphi-\frac{g(x_f-x_0)^2}{2V_0^{\,2}\cos^2\varphi}+y_0 \\ -y_f=0 \qquad (۲۸)$$

به‌عنوان شرط مرزی متحرک در نظر گرفته می‌شود تا به‌وسیله آن زاویه بهینه پرتاب محاسبه گردد. با توجه به اینکه معادله قیدی سیستم دارای $\tan\varphi$ می‌باشد و tan دارای نقاط تکین است، به‌منظور اجتناب از نقاط تکین، با انجام ساده‌سازی‌های معمول، معادله قیدی رابطه (۲۸) را می‌توان به صورت بی‌بعد به صورت رابطه (۲۹) خلاصه کرد.

$$-2V_0^2\sin\theta(\frac{x_f}{l}\cos\theta+\frac{y_f}{l}\sin\theta-1) \\ -gl(\frac{x_f}{l}-\cos\theta)^2=0 \qquad (۲۹)$$

که در آن $V_0=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$، x_f و y_f به ترتیب سرعت پرتابه، مختصات افقی و عمودی نقطه هدف می‌باشند. شرط انتهایی دیگر نیز با استفاده از رابطه (۲۱) با حذف d از روابط (۳۰) به دست می‌آید.
معادلات بهینگی بهدست آمده در کنار دو شرط مرزی ابتدای مسیر (۱۹) و دو شرط انتهایی (۲۹) و (۳۰)، یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را تشکیل داده که با استفاده از دستور bvp4c در نرم‌افزار متلب قابل حل می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
-x_3 &= d\frac{\partial w}{\partial x_1} = d\frac{\partial w}{\partial \theta} \\
&= -d(l\, g\sin\theta(x_f - l\cos\theta) \\
&+ l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta(x_f - l\cos\theta) \\
&- l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta(x_f - l\cos\theta) \\
&+ 2l^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta(y_f - l\sin\theta)) \\
-x_4 &= d\frac{\partial w}{\partial x_2} = d\frac{\partial w}{\partial \dot{\theta}} \\
&= -d(2l^2\dot{\theta}\sin^2\theta(y_f - l\sin\theta) \\
&+ 2l^2\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta(x_f - l\cos\theta))
\end{aligned}
\qquad (۳۰)
$$

۳- شبیه‌سازی برای ربات تک لینکی صفحه‌ای

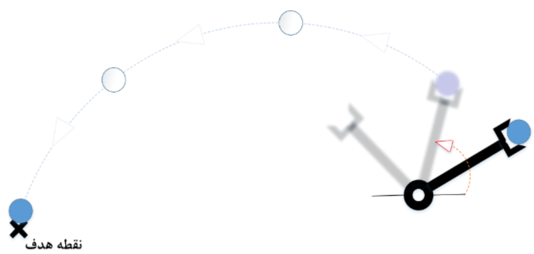
در این بخش شبیه‌سازی برای ربات تک لینکی صفحه‌ای که مشخصات آن در جدول ۱ آورده شده است، ارائه می-شود.

جدول ۱- پارامترهای عددی مربوط به ربات تک لینکی

پارامتر	مقدار	واحد
طول لینک	0.5	m
جرم لینک	1	kg
جرم پرتابه	0.5	kg
ممان اینرسی	0.02083	kgm^2
ضریب میرایی	0	N.s/m
زاویه اولیه	0	rad
سرعت اولیه	0	rad/s
گشتاور ورودی	12	N.m

شکل (۲) شماتیکی از نحوه پرتاب توسط ربات تک لینکی را نمایش می‌دهد.

به منظور صرف نظر کردن از قیدهای موجود در لحظه رها سازی جسم از بازوی ماهر، مطابق شکل (۲) می‌توان مجری نهایی را به‌صورت دو انگشتی با تماس نقطه‌ای در نظر گرفت که در زاویه مورد نظر آروارها در راستای عمود بر صفحه پرتاب به صورت آنی باز شده و جسم را رها می‌کند [۸] و [۱۷].

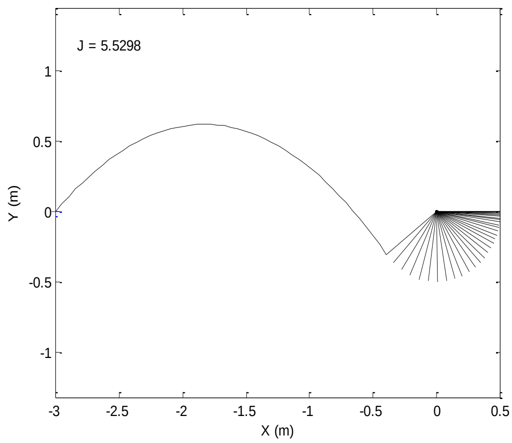


شکل ۲- شماتیک پرتاب توسط ربات یک درجه آزادی

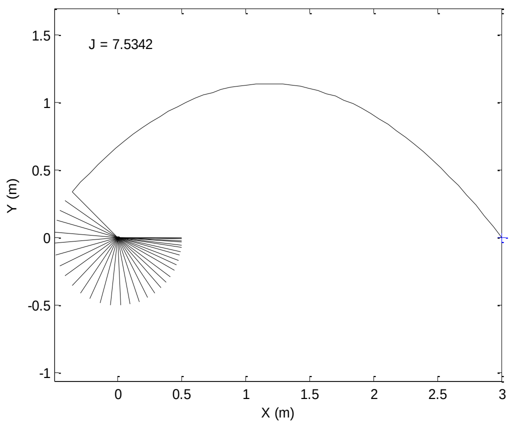
در ادامه ابتدا پرتاب بهینه برای دو نقطه فرضی با مختصات معلوم انجام می‌گیرد. سپس الگوریتمی برای محاسبه ماکزیمم فضای کاری قابل پرتاب برای ربات تک لینکی ارائه شده و و به بررسی ماکزیمم پرتاب در راستای افقی و عمودی پرداخته می‌شود. در آخر نیز به بررسی پرتاب در هر راستا با زاویه دلخواه پرداخته خواهد شد.

۳-۱- بررسی پرتاب جسم به یک نقطه معلوم

در این بخش مسیر بهینه برای نقطه‌های فرضی، مانند$(-3,0)$ و $(3,0)$ در فضای کاری ربات، به ازای تابع هدف داده شده بدست می‌آید. از داده‌های موجود در جدول ۱ و هم چنین معادلات (۲۶) و شرایط مرزی (۱۹)، (۲۹) و (۳۰)، برای پرتاب بهینه استفاده می‌شود. موقعیت و سرعت زاویه‌ای ربات در زمان$t = 0$ برابر 0 و در زمان $t_f = 0.5s$ هر دو با حل معادلات تحت شرایط مرزی مورد نظر محاسبه می‌شود. شکل‌های (۳) و (۴) پرتاب‌های بهینه به دو نقطه در جهت های مثبت و منفی محورها را نشان می-دهد.



شکل ۳- پرتاب بهینه به نقطه $(-3,0)$



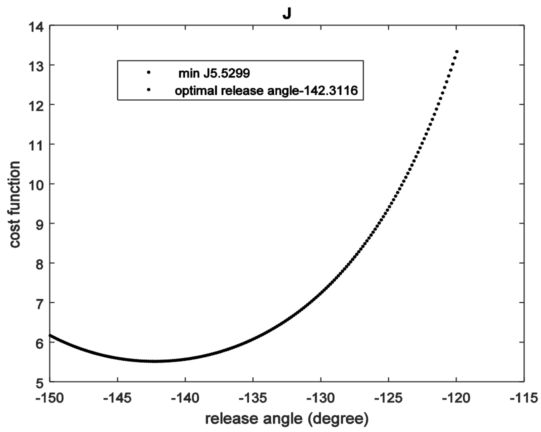
شکل ۴- پرتاب بهینه به نقطه $(3,0)$

زاویه بهینه به‌دست آمده برای پرتاب به نقطه معلوم (3,0-) برابر با 142- درجه می‌باشد که مقدار تابع هزینه آن J=5.53 است. به منظور بررسی صحت نتایج بهینه سازی فوق، با بازنویسی رابطه (۲۹) به‌صورت رابطه (۳۱) و جایگذاری مختصات نقطه هدف در آن می‌توان مقدار سرعت در لحظه آغاز پرتاب یا همان سرعت انتهایی ربات را به‌صورت تابعی از زاویه پرتاب با استفاده از رابطه (۳۱) محاسبه نمود.

$$V_0 = \frac{-\sqrt{gl}\left(\dfrac{x_f}{l} - \cos\theta\right)}{\sqrt{2\sin\theta\left(\dfrac{x_f}{l} - \cos\theta + \dfrac{y_f}{l} - \sin\theta - 1\right)}} \qquad (۳۱)$$

با اعمال زاویه‌های مختلف پرتاب و بدست آمدن سرعت‌های پرتاب متناظر با آن، یک مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای با شرایط مرزی انتهایی معین تشکیل می‌گردد. با حل مساله مقدار مرزی به ازای زوایای پرتاب مختلف، مقدار تابع هزینه متناظر با هر زاویه و در نتیجه کمترین مقدار تابع هزینه را می‌توان به‌دست آورد. شکل (۵) نمودار تابع هزینه به‌دست آمده به ازای زوایای مختلف پرتاب را برای نقطه هدف با مختصات معلوم (3,0-) نمایش می‌دهد.

مطابق شکل (۵) زاویه بهینه پرتاب برای حالت حرکت نقطه به نقطه با شرایط مرزی انتهایی معین برابر 142- درجه و تابع هزینه متناظر آن J=5.53 است که برابر با نتایج حاصل از حل مساله مقدار مرزی با شرط انتهایی متحرک در شکل(۳) می‌باشد.



شکل ۵- تابع هزینه بر حسب زوایای پرتاب در حرکت نقطه به نقطه با شرط انتهایی معین

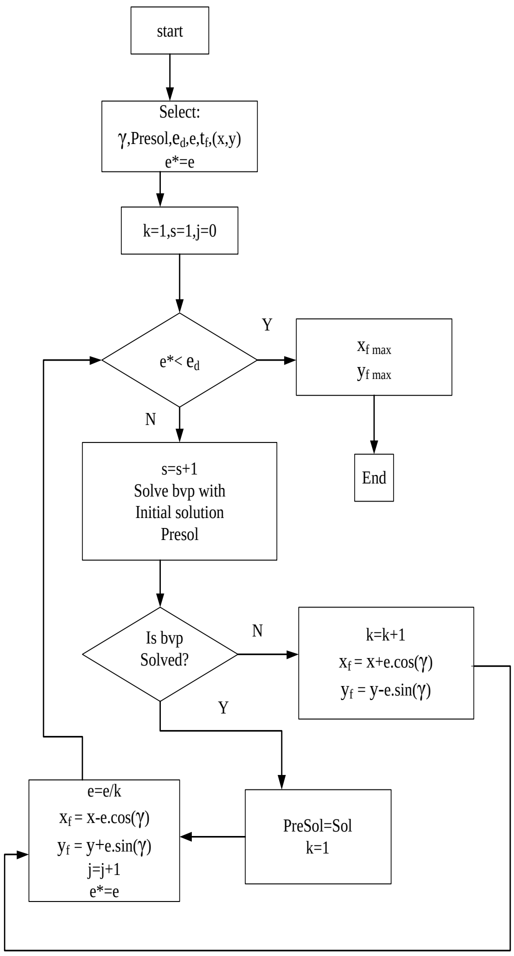
۲-۳- فضای کاری قابل پرتاب برای ربات تک لینکی

به دست آوردن مسیر بهینه یک مسأله پرکاربرد بوده که در بسیاری از تحقیقات نظیر [۱۸] و [۲۹-۲۲] مورد توجه قرار گرفته‌است. موتورها به دلیل محدودیت گشتاور، در محدوده مشخصی قادر به پرتاب جسم می‌باشند که در این مقاله با نام فضای کاری قابل پرتاب ربات، معرفی شده است.

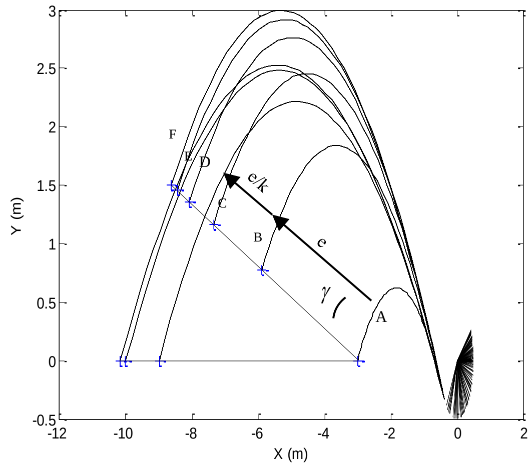
در ادامه الگوریتمی جهت محاسبه فضای کاری قابل پرتاب که در شکل (۶) نشان داده شده است، پیشنهاد می‌شود. هدف این است که الگوریتم مورد نظر با تکرار کم با دقت قابل قبولی به جواب بهینه همگرا شود.

اساس کار الگوریتم رسیدن تدریجی از یک مقدار اولیه A به حداکثر پرتاب جسم در امتداد افقی و قائم و در حالت کلی تر در امتداد دلخواه با زاویه γ می‌باشد، که زاویه γ در شکل (۷) نشان داده شده است.

برای حل مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای، نیاز به یک حل اولیه برای شروع فرآیند حل می‌باشد. در الگوریتم مورد نظر از حل بهینه به‌دست آمده برای پرتاب به نقطه A برای ایجاد حل اولیه استفاده شده‌است. حل اولیه شامل حدس اولیه برای حالت‌ها و شبه‌حالتها به ازای $t \in [t_0, t_f]$ به صورت رابطه (۳۲) در نظر گرفته می‌شود.



شکل۶- الگوریتم محاسبه فضای کاری پرتاب



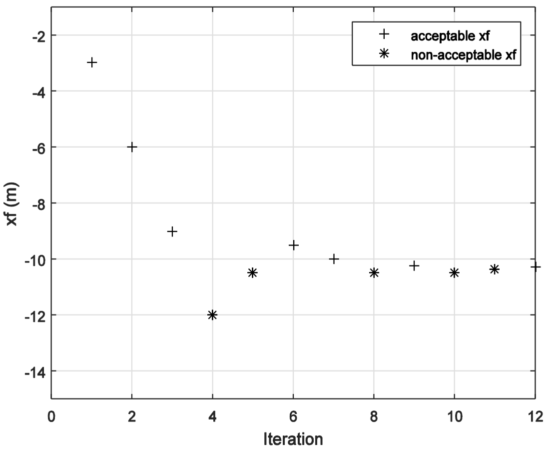
شکل ۷- نمایش زاویه

$$\text{PreSol} = \begin{bmatrix} x_{1pre} & x_{2pre} & x_{3pre} & x_{4pre} \end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

هدف الگوریتم مورد نظر به‌دست آوردن دورترین نقطه‌ای است که ربات بتواند جسم را به آن نقطه پرتاب کند. به این منظور، مطابق شکل (۷) نقطه‌ای مانند A در نزدیکی ربات در نظر گرفته می‌شود و خطی با زاویه γ از این نقطه رسم می‌گردد. نقطه هدف بر روی خط رسم شده تغییر می‌کند. ابتدا مسافت با گام e افزایش می‌یابد و در صورت حل مساله با این گام، فضای‌کاری تا نقطه‌ی B افزایش یافته و مجددا در مرحله بعد نیز گام e برای حل در نظر گرفته خواهد شد. در مرحله بعد، در صورت غیر قابل حل بودن مسأله با گام مورد نظر، با افزایش k، مقدار e به صورت e/k کاهش می‌یابد تا با حل مجدد مساله با گام e/k، فضای‌کاری به نقطه‌ی C افزایش یابد. حل مساله با گام e/k تا زمان غیر قابل حل شدن مساله ادامه می‌یابد که برای قابل حل شدن مساله، گام به $e/k+1$ کاهش یافته و فضای‌کاری به نقطه D افزایش می‌یابد. روند مذکور تا زمانی که مقدار e در $e=e^*$ به محدوده دقت مورد نظر e_d برسد ادامه می‌یابد. به این طریق محاسبه حداکثر پرتاب تا نقطه F در راستای زاویه γ با دقت e_d تضمین می‌گردد.

در شکل (۸) مراحل طی شده توسط الگوریتم شکل (۶) و نحوه همگرایی آن به جواب نشان داده شده‌است.

مسافت‌هایی که مساله مقدار مرزی به ازای آنها حل شده‌است با علامت '+' و مسافت‌هایی که مساله حل نشده‌است با '*' نشان داده‌شده‌است. همان گونه که در شکل ۸ ملاحظه می‌گردد در مرحله اول، حل به ازای مسافت x=-3 انجام شده و سپس در هر مرحله به اندازه e به مسافت اضافه می‌گردد تا در تکرار چهارم مقدار x=-12 شود. با توجه به محدودیت گشتاور، به ازای این مسافت ایجاد شده، مساله غیر قابل حل بوده و x به دست آمده غیر قابل قبول می‌باشد. در مرحله بعد مقدار e پله به پله کاهش می‌یابد تا مجددا در تکرار ششم مساله قابل حل می‌گردد. حل مساله ادامه می‌یابد تا نهایتا فضای کاری بهینه در مرحله دوازدهم برابر x=-10.25 به دست می‌آید.

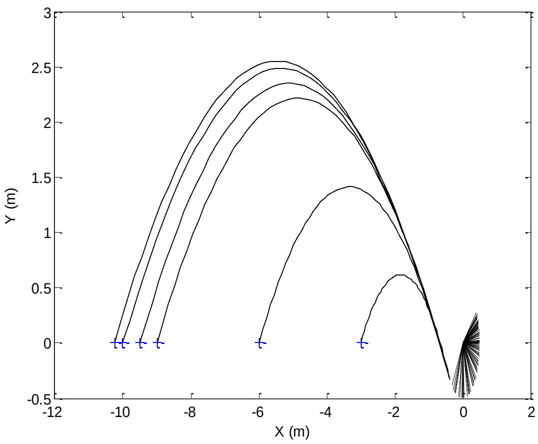


شکل ۸- فضای کاری بدست آمده در امتداد افق در هر تکرار

۳-۳- ماکزیمم پرتاب جسم در جهت افقی

در این قسمت به بررسی ماکزیمم پرتاب در راستای افقی، پرداخته شده است. با توجه به الگوریتم شکل (۶)، با قرار دادن $\gamma=0$، حداکثر پرتاب در راستای افقی محاسبه می‌گردد.

شکل (۹) ماکزیمم پرتاب در راستای افقی را نمایش می‌دهد.



شکل ۹- ماکزیمم پرتاب در راستای x

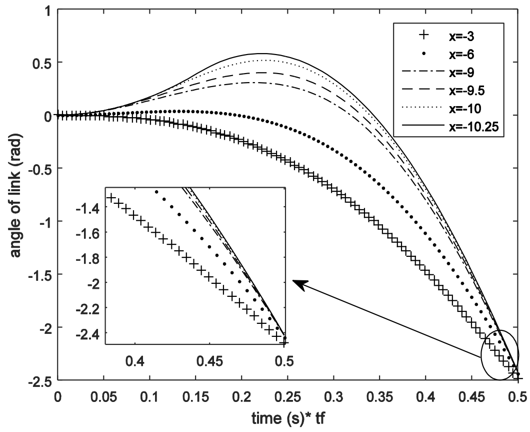
مطابق شکل (۹)، با انتخاب مختصات (-3,0) به‌عنوان هدف اولیه، پرتاب با گام e شروع شده و سپس با توجه به

محدودیت گشتاور با کوچک شدن گام توسط الگوریتم به ماکزیمم فضای‌کاری با مختصات (-10.25,0) در راستای افق همگرا شده‌است.

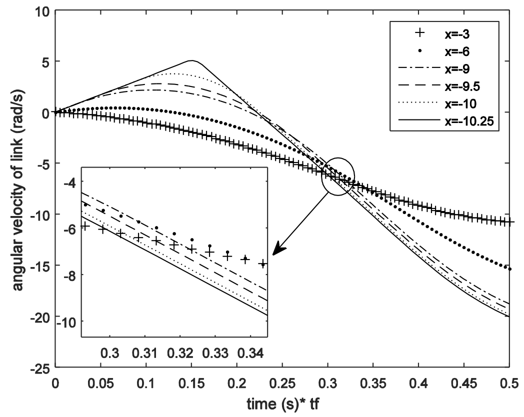
شکل‌های (۱۰)، (۱۱) به ترتیب نمودار موقعیت و سرعت زاویه‌ای ربات را در زمان‌های مختلف نمایش می‌دهند.

در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) موقعیت و سرعت زاویه‌ای برای پرتاب به نقطه (-3,0) تا رسیدن به ماکزیمم فضای کاری افقی با در نظر گرفتن محدودیت گشتاور رسم شده‌اند.

شکل (۱۲) گشتاور ربات را به ازای پرتاب‌های مختلف نمایش می‌دهد. همان‌گونه که در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود در نزدیکی مرز فضای‌کاری قابل پرتاب، با رسیدن منحنی گشتاور به مقادیر حدی تعیین شده، حالت پله‌ای و یا همان بنگ بنگ ایجاد می‌گردد که با توجه به شکل (۹) حداکثر فاصله‌ای که ربات در جهت منفی محور افقی، تحت گشتاور$u = \pm$ ۱۲ می‌تواند پرتاب کند، ۱۰/۲۵ متر می‌باشد.



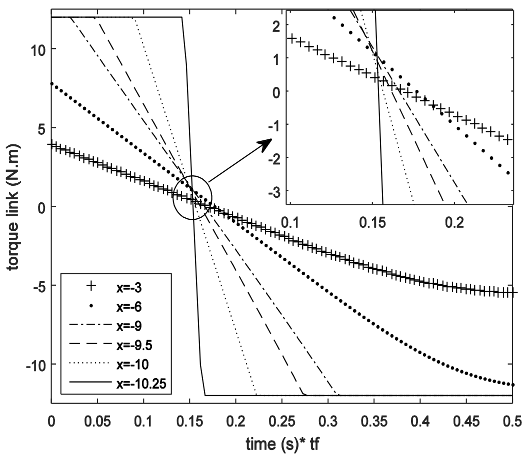
شکل ۱۰- موقعیت زاویه‌ای لینک بر حسب زمان



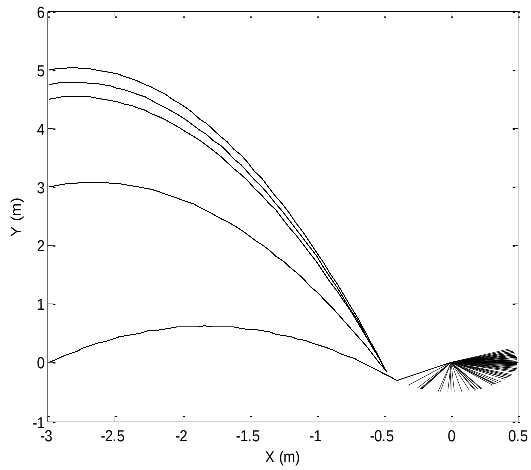
شکل ۱۱- سرعت زاویه‌ای لینک بر حسب زمان

۴-۳- ماکزیمم پرتاب جسم در جهت عمودی

در این قسمت به بررسی و محاسبه ماکزیمم پرتاب در راستای قائم، پرداخته شده است. شکل (۱۳) نمایش طریقه پرتاب جسم در جهت عمودی می‌باشد که با قرار دادن مقدار $\gamma =$ ۹۰ حداکثر پرتاب در این راستا به دست می‌آید.



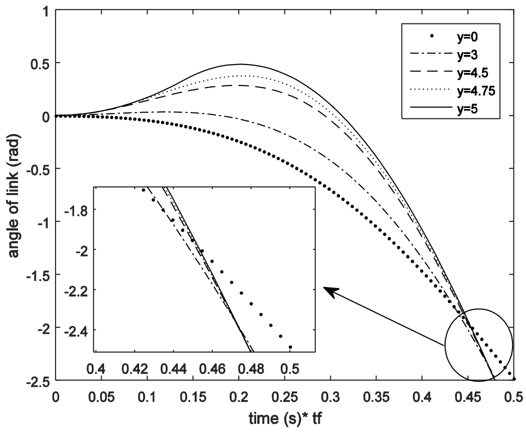
شکل ۱۲- گشتاور لینک بر حسب زمان



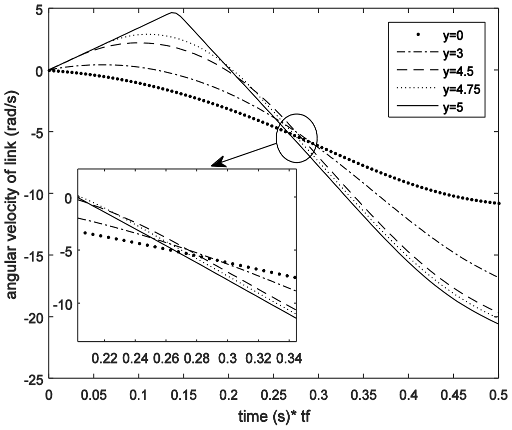
شکل ۱۳- نمایش پرتاب جسم در راستای y

مطابق شکل (۱۳)، با انتخاب مختصات (-3,0) به‌عنوان هدف اولیه، پرتاب با گام e شروع شده و سپس با توجه به محدودیت گشتاور با کوچک شدن گام توسط الگوریتم به ماکزیمم فضای کاری با مختصات (-3,5) در راستای قائم همگرا شده است.

نمودار موقعیت و سرعت زاویه‌ای ربات برای پرتاب عمودی به‌ترتیب در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) به ازای پرتاب‌های مختلف نشان داده شده است. در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) موقعیت و سرعت زاویه‌ای برای پرتاب به نقطه (-3,0) تا رسیدن به ماکزیمم فضای کاری عمودی با در نظر گرفتن محدودیت گشتاور رسم شده است. شکل (۱۶) گشتاور ربات را به ازای پرتاب‌های مختلف نمایش می‌دهد.

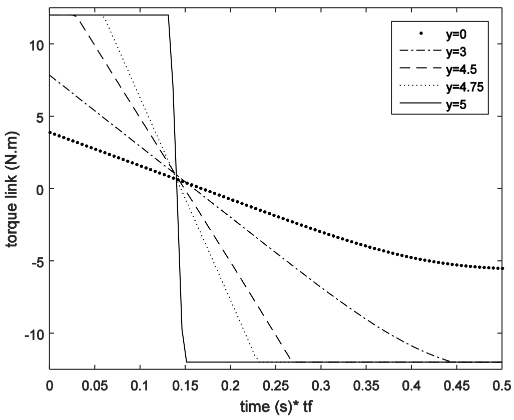


شکل ۱۴- موقعیت زاویه‌ای لینک بر حسب زمان



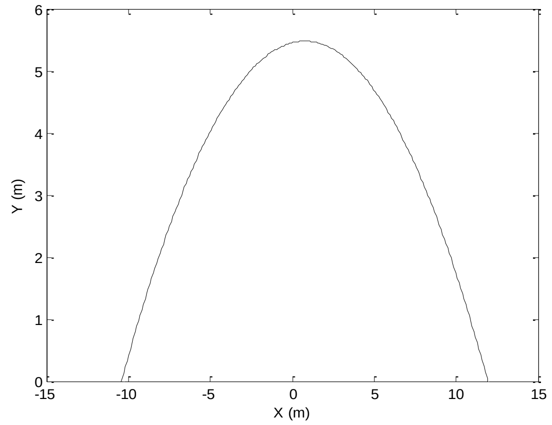
شکل ۱۵- سرعت زاویه‌ای لینک بر حسب زمان

در شکل (۱۶) نیز مانند حالت پرتاب افقی، منحنی گشتاور وقتی به حالت مینیمم و ماکزیمم خود می‌رسد، حالت پله-ای یا همان بنگ بنگ را پیدا می‌کند. با توجه به شکل های (۱۳) و(۱۶) حداکثر فاصله‌ای که ربات در جهت قائم تحت گشتاور $u = \pm$ ۱۲ می‌تواند پرتاب کند، ۵/۰۴ متر می‌باشد.



شکل ۱۶- گشتاور لینک بر حسب زمان

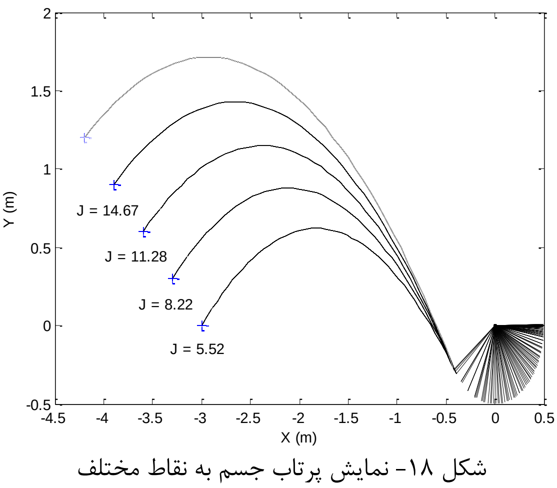
در شکل (۱۷) فضای‌کاری تحت پارامترهای جدول ۱، با توجه به محدودیت‌های گشتاور، برای ربات تک لینکی به دست آمده است.



شکل ۱۷- فضای کاری قابل پرتاب برای ربات تک‌لینکی

در شکل (۱۷) فضای‌کاری با در نظر گرفتن هر دو جهت مثبت و منفی محورها رسم شده است. در حالت کلی تر با مقداردهی به زاویه γ با مقادیری غیر از صفر و 90 می‌توان مقدار فضای کاری قابل پرتاب را در راستای دلخواه به‌دست آورد. شکل (۱۸) پرتاب جسم به نقاط مختلف در راستای دلخواه را نمایش می‌دهد.

مطابق شکل (۱۸) ملاحظه می‌گردد که برد پرتابه در راستای زاویه γ افزایش یافته تا به بیشترین حد خود برسد که با افزایش برد پرتاب، مقدار تابع هزینه آن نیز افزایش یافته است.



شکل ۱۸- نمایش پرتاب جسم به نقاط مختلف

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، پرتاب بهینه برای ربات تک لینکی صفحه‌ای بر اساس حل غیر مستقیم مسأله کنترل بهینه، ارائه شده است. هم چنین مفهوم جدیدی به نام فضای کاری قابل پرتاب ربات معرفی و الگوریتمی برای محاسبه آن ارائه شد. روش ارائه شده در این مقاله علاوه بر پرتاب جسم به نقطه

مورد نظر که در مقالات قبلی مورد بررسی قرار گرفته اند، پرتاب بهینه را با در نظر گرفتن کمترین تلاش کنترلی انجام می‌دهد. برای انجام چنین کاری، با در نظر گرفتن یک تابع هدف و با به‌کارگیری معادله پرتابه به صورت معادله قیدی، مسأله به یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای تبدیل شد و با حل آن مسیر بهینه برای پرتاب دقیق جسم به نقطه مورد نظر به‌دست آمد. حل با روش غیرمستقیم یک حل دقیق است و همگرایی سریعی در همسایگی جواب دارد و در این صورت زمان حل مسأله نسبت به روش مستقیم بسیار کمتر است. نهایتاً با شبیه سازی های انجام شده صحت، دقت و کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی در به‌دست آوردن مسیر بهینه و ماکزیمم فضای کاری برای ربات تک لینکی نشان داده شد.

مراجع

[1] W. Mori, J. Ueda, T. Ogasawara, “A 1-dof dynamic pitching robot that independently controls velocity, angular velocity and direction of a ball”, Advanced Robotics, Vol. 24, No. 5, 2010, pp. 921-942.

[2] Miyashita, Hideyuki, Tasuku Yamawaki, and Masahito Yashima, “Parts assembly by throwing manipulation with a one-joint arm”, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010.

[3] L. Acosta, J.J. Rodrigo, J.A. Mendez, G.N. Marichal, M. Sigut, “Ping-Pong Player Prototype”, IEEE Robotics and Automation Magazine, Vol. 10, No. 4, 2003, pp. 44-52.

[4] MSBL Sports, Jugs Football Machine. Available:http://www.msblsports.com/footballmachine.html.

[5] S. Suzuki, H. Inooka, “Golf-Swing Robot Emulating a Human motion”, Proceedings on IEEE International Workshop on Robot and Human Communication, 1997, pp. 28 -33.

[6] Adventure Sports Ltd., Clay Pigeon Shooting Basics. Available: http://www.adventuresport.co.uk/clay _shoot/clay_pigeon_shooting_basics.pdf.

[7] H. Frank, A. Mittnacht, Th. Moschinsky, F. Kupzog, “1-dof-robot for fast and accurate throwing of objects”, IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA), 2009.

[8] T. Shoji, Sh. Katsumata, Sh. Nakaura, M. Sampei, “Throwing Motion Control of the Springed Pendubot”, IEEE Transactins on control systems technology, Vol. 21, No. 3, 2013, pp. 950-957.

[9] J. Nakagawa, Y. Ishikawa, H. Oka, K. Takakusaki, H. Yamakawa, A. Yamashita, H. Asama, “Analysis of Joint Correlation between Arm and Lower Body in Dart Throwing Motion”. International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 2013.

[10] J.Sh. Hu, M.Ch. Chien, Y.J. Chang, Sh. H. Su, Ch.Y. Kai, “A Ball-Throwing Robot with Visual Feedback”. The International Conference on Intelligent Robots and Systems, Taipei, Taiwan, 2010.

[11] L. Makarem, A. Akbarimajd, M. Nili Ahmadabadi, “Dynamic manipulation of active objects: modeling and optimization”, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2009.

[12] B. Beigzadeh, A. Meghdari, S. Sohrabpour, “Passive Dynamic Object Manipulation: Preliminary Definition and Examples”, Acta Automatica Sinica, Vol. 36, No. 12, 2010, pp. 1711-1719.

[13] A. Akbarimajd, M.N. Ahmadabadi, B. Beigzadeh, “Dynamic Object Manipulation by an array of 1-DOF manipulators: Kinematic modeling and planning”, Robotics and Autonomous Systems, Vol. 55, No. 6, 2007, pp. 444-459.

[14] A. Akbarimajd, M. Nili Ahmadabadi, “Manipulation by juggling of planar polygonal objects using two 3-DOF manipulators”, IEEE/ASME international conference on Advanced intelligent mechatronics, 2007.

[15] B. Tarvirdizadeh, Kh. Alipour, “Trajectory Optimization of Two-Link Rigid Flexible Manipulators in Dynamic Object Manipulation Missions”. RSI International Conference on Robotics and Mechatronics, Tehran, Iran, 2015.

[16] B. Tarvirdizadeh, A. Yousefi-Koma, “Dynamic Object Manipulation by a Flexible Robotic Arm: Theory and Experiment”, International Journal of Robotics & Automation, Vol. 27, 2010, pp. 263-285.

[17] Sh. Ichinose, Sh. Katsumata, Sh. Nakaura, M. Sampei, M. Acevedo, E. Haro, F. Martínez, “Throwing Motion Control Experiment utilizing 2-Link Arm with Passive Joint”. SICE Annual Conference, 2008.

[18] F. Lombai, G. Szederkenyi, “Throwing motion generation using nonlinear optimization on a 6-degree-of-freedom robot manipulator”. Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, Malaga, Spain, 2009.

[19] S.A.A. Moosavian, Sh. Hosseini, “Most Stable Motion Design of the Mobile Robot in the Specified Path”, Journal of Modeling in engineering, Vol. 11, No. 33, 2012, pp. 1-14.

[20] D. Jannat, E. Masehian, “Path Planning of Tractor-Trailer Robot by Fast Marching Methode (FMM) ”, Journal of Modeling in engineering, Vol. 11, No. 34, 2012, pp. 31-47.

[21] T. Chettibi, H.E. Lehtihet, M. Haddad, S. Hanchi, “Minimum cost trajectory planning for industrial robots”, European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 23, No. 4, 2004, pp. 703–715.

[22] I. Hajizade, S. Ebrahimi, P. Payvandy, “Optimization of a New-developed Needle Drive Mechanism in Sewing Machines using the Genetic Algorithm”, Journal of Modeling in engineering, Vol. 14, No. 46, 2016, pp. 11-23.

[23] A. Gasparetto, V. Zanotto, “Optimal trajectory planning for industrial robots”, Advances in Engineering Software, Vol. 41, No. 4, 2010, pp. 548–556.

[24] R. Callies, P. Rentrop, “Optimal Control of Rigid-Link Manipulators by Indirect Methods”, GAMM-Mitteilungen, Vol. 31, No. 1, 2008, pp. 27-58.

[25] P. Boscariol, A. Gasparetto, “Model-based trajectory planning for flexible-link mechanisms with bounded jerk”, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 29, No. 4, 2013, pp. 90-99.

[26] R. Callies, P. Rentrop, “Optimal control of rigid-link manipulators by indirect methods”, GAMM-Mitteilungen, Vol. 31, No. 1, 2008, pp. 27-58.

[27] M. Salehi, A. Nikoobin, “Optimal trajectory planning of flexible joint manipulator: Maximum load carrying capacity-minimum vibration”, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 14, 2014, pp. 68-80.

[28] M. H. Ghasemi, N. Kashiri, M. Dardel, “Time-optimal trajectory planning of robot manipulators in point-to-point motion using an indirect method”, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 226, No. 2, 2011, pp. 473-484.

[29] A. Nikoobin, M. Moradi, “Optimal balancing of the robotic manipulators, In Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots”, Springer International Publishing, 2016, pp 337-363.

[30] M.H. Korayem, M. Bamdad, H. Tourajizadeh, A. Habibnejad Korayem, S. Bayat, “Analytical design of optimal trajectory with dynamic load-carrying capacity for cable-suspended manipulator”, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 60, No. 1-4, 2012, pp. 317-327.

[31] M. H. Korayem, H. Tourajizadeh, M. Jalali, E. Omidi, “Optimal Path Planning of Spatial Cable Robot Using Optimal Sliding Mode Control”, International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 9, 2012, pp. 168.

[32] M. H. Korayem, H. N. Rahimi, A. Nikoobin, “Path planning of mobile elastic robotic arms by indirect approach of optimal control”, International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 8, No. 1, 2011, pp. 10-20.

[33] M. T. Ghorbani, H. Salarieh, N. Assadian, “Time optimal trajectory planning for a high speed planning boat”, Journal of Control, Vol. 5, No. 3, 2011, pp. 57–68.

[34] R. Schilling, Fundamentals of robotics, 2013.

[35] D.E. Kirk, Optimal control theory: an introduction, Courier Corporation, 2012.