مبدل دولوله‌ای مارپیچ پر شده از محیط متخلخل تحت شار حرارتی نامتقارن

مازیار دهقان [۱،*]، نیما تیرانداز [۲]، محمدصادق ولی‌پور [۳]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۱۴

پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۲/۰۴

واژگان کلیدی:

شار حرارتی نامتقارن،

مبدل دو لوله‌ای مارپیچ،

حل تحلیلی،

محیط متخلخل،

جابجایی اجباری.

چکیده

در مقاله حاضر مبدل حرارتی دو لوله‌ای مارپیچ پر شده از محیط متخلخل که تحت شار حرارتی نامتقارن قرار دارد به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. معادلات مومنتوم و انرژی به دستگاه مختصات گرمانو انتقال داده شده و سپس پروفیل‌های سرعت و دما بر حسب توان‌های انحنای بدون بعد به کمک روش اغتشاشات بدست می‌آیند. همچنین کانتورهای سرعت و دما برای ارائه دید بهتر هندسه پیچیده مورد بررسی، ارائه می‌شوند. نتایج مشخص می‌سازند که پروفیل سرعت محوری به دلیل انحنای هندسه، نامقتارن می‌باشد که شدت این عدم تقارن تابعی از انحنا است. همچنین نشان داده می‌شود که عدد ناسلت با افزایش انحنا و همچنین افزایش نسبت شعاع لوله داخلی به لوله خارجی افزایش پیدا می‌کند.

۱- مقدمه

از آنجا که جریان در لوله مارپیچ، حالت ساده و کلاسیک بررسی جریان خون در رگ‌ها و بالاخص جریان در رگ‌های کرونری قلب می‌باشد، پدیده جریان در لوله مارپیچ مورد توجه محققین بوده است. همچنین استفاده از مبدل‌های دو لوله‌ای مارپیچ نیز محققین را به سمت تحلیل انتقال حرارت در هندسه مذکور سوق داده است [۱] که حالتی جامع‌تر از مبدل حرارتی تک / دو لوله‌ای است که محققیقن بسیاری به مطالعه بهبود عملکردی آن پرداخته‌اند [۲ و ۳].

از آنجا که یکی از راه‌های بهبود انتقال حرارت در مبدل، استفاده از محیط متخلخل است، پدیده جریان و انتقال حرارت در محیط متخلخل قرار گرفته در یک لوله مارپیچ به روش اغتشاشات[۴] توسط نایلد و کوزنتسوف [۱] برای اولین بار به صورت تحلیلی مطالعه شد. ایشان توزیع سرعت و عدد ناسلت را بر حسب پارامترهای موثر برای حالت انحنا[۵] و پیچش[۶] کم (کوچکتر از واحد) بدست آوردند. چنگ و کوزنتسوف [۴] جریان در محیط متخلخل قرار گرفته در لوله مارپیچ را به صورت عددی برای اولین بار حل نمودند. آن‌ها معادله مومنتوم گسترده دارسی – برینکمن – فورچهایمر[۷] را در نظر گرفتند و تاثیر پارامترهای موثر بر میدان سرعت را بررسی نمودند. در ادامه مطالعه ذکر شده، چنگ و کوزنتسوف [۵] مساله انتقال حرارت در محیط متخلخل قرار گرفته در درون لوله مارپیچ را به صورت عددی و برای اولین بار حل کردند. آورامنکو و کوزنتسوف [۶] مساله جریان در درون کانال مارپیچ با سطح مقطع مستطیلی پر شده از محیط متخلخل را به کمک سری‌های فوریه به صورت تحلیلی حل کردند. آن‌ها تاثیر پارامترهای هندسی و عدد دارسی بر جریان را بر مبنای پاسخ بدست آمده مطالعه نمودند. هاشمی و همکاران [۷] جریان و انتقال حرارت در محیط متخلخل قرار گرفته در درون مبدل دولوله‌ای[۸] را به صورت تحلیلی حل و تاثیر پارامترهای موثر بر جریان و انتقال حرارت را بررسی نمودند.

روش اغتشاشات یک روش قدرتمند در حل معادلات (دیفرانسیل، جبری و انتگرالی) می‌باشد که به خصوص در زمینه جریان و انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل روش قابل اعتمادی برای محققین است. هومن و رنجبر [۸] و هومن [۹] به ترتیب به بررسی جریان و انتقال حرارت در درون لوله و کانال پر شده از محیط متخلخل به روش

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m-dehghan@semnan.ac.ir

۱. دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۲. کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۳. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

[4] Perturbations
[5] Curvature
[6] Torsion
[7] Darcy-Brinkman-Forchheimer
[8] Annulus

اغتشاشات پرداختند. دهقان و همکاران [۱۰ و ۱۱] پدیده عدم تعادل حرارتی در انتقال حرارت در محیط متخلخل را به کمک تحلیل اغتشاشی مطالعه نمودند. مطالعه آن‌ها به ارائه یک عدد بدون بعد برای تعیین میزان شدت عدم تعادل حرارت موضعی منتج شد. همچنین دهقان و همکاران [۱۲] به بررسی کاربرد روش‌های اغتشاشات برای حل معادلات حاکم بر جریان سیال در محیط‌های متخلخل در دستگاه های مختصات کارتزین و استوانه‌ای پرداختند. اخیرا مساله انتقال حرارت همبسته جابجایی - تشعشع در محیط متخلخل به روش اغتشاش هموتوپی توسط دهقان و همکاران [۱۳ و ۱۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها با مقایسه پاسخ حاصل از روش اغتشاش هموتوپی با حل عددی، مزایا و معایب روش‌های نیمه تحلیلی مشابه در مورد معادلات با شدت غیر خطی بالا را بررسی نمودند. همچنین به کمک روش اغتشاشات، دهقان و همکاران [۱۵] مساله انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی پر شده از محیط متخلخل با هدایت حرارتی متغیر با دما را به صورت تحلیلی حل کردند. آن‌ها نشان دادند که عدد ناسلت با افزایش خطی هدایت حرارتی با دما، به صورت خطی افزایش می یابد.

مطالعه حاضر به بررسی تحلیلی جریان و انتقال حرارت محیط متخلخل قرار گرفته در یک فضای حلقوی بین دو لوله هم‌مرکز مارپیچ به کمک روش اغتشاشات می‌پردازد. معادلات مومنتوم و انرژی برای این مساله تحت تبدیل مختصات متعامد ارائه شده توسط گرمانو [۱۶ و ۱۷] قرار می‌گیرند و به کمک روش اغتشاشات، میدان سرعت و میدان دما در محیط متخلخل مذکور تعیین می‌شوند. در ادامه تاثیرات پارامترهای دخیل (از جمله انحنا بدون بعد و نسبت شعاع) بر رفتار مبدل حرارتی مطالعه می‌گردد.

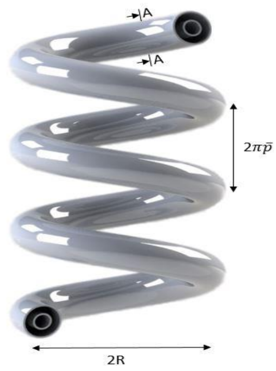
۲- تحلیل میدان جریان سیال

جریان و انتقال حرارت توسعه یافته، دائمی و آرام در محیط متخلخل قرار گرفته در فضای بین دو لوله استوانه‌ای مارپیچ هم‌مرکز در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱) طرحواره مساله را نمایش می‌دهد. معادله پیوستگی و اندازه حرکت (قانون دارسی) حاکم بر جریان است [۱ و ۱۸]:

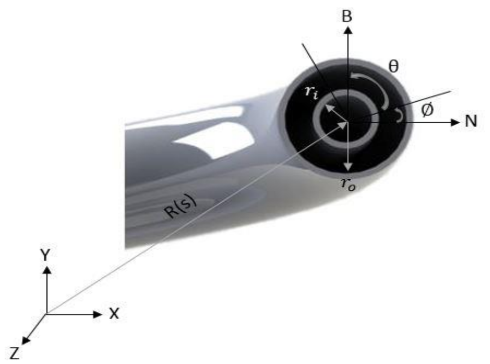
$$\nabla \cdot V^* = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\mu}{K} V^* = -\nabla P^* \qquad (۲)$$

که در آن $V^* = (u^*, v^*, w^*)$ بردار سرعت، μ ویسکوزیته سیال، K گذردهی محیط متخلخل[1] و P^* فشار است. بالانویس ستاره برای مشخص نمودن متغیرهای با بعد استفاده می‌شود. توجه شود از آنجا که میدان سرعت توسط رابطه دارسی (۲) مدل می‌شود و رابطه دارسی نیز یک رابطه جبری است، لذا میدان سرعت مستقل از شرایط مرزی بدست می‌آید.



(الف)



(ب)

شکل ۱: طرحواره مساله؛ الف) مبدل دو لوله‌ای مارپیچ، ب) دستگاه مختصات

متغیرهای بدون بعد مساله متناسب با هندسه مفروض به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$s = \frac{s^*}{H} \qquad (۳)$$

$$r = \frac{r^*}{H} \qquad (۴)$$

$$(u, v, w) = \left(\frac{u^*}{U^*}, \frac{v^*}{U^*}, \frac{w^*}{U^*}\right) \qquad (۵)$$

[1] Permeability

$$P = \frac{P^*}{\rho U^{*2}} \quad (۶)$$

$$\lambda = \frac{\tau}{\kappa} \quad (۷)$$

s محور بدون بعد در راستای جریان اصلی، r محور بدون بعد شعاعی، λ نسبت پیچش ($(\tau = \bar{p} / (R^2 + \bar{p}^2)$) به انحنا ($k = R/(R^2 + \bar{p}^2)$)، $H = r_o - r_i$ فاصله بین دو لوله مارپیچ، P فشار بدون بعد و U^* سرعت مشخصه را نشان می‌دهد.

با توجه به پارامترهای بدون بعد، معادلات بی‌بعد شده‌ی پیوستگی و اندازه حرکت در دستگاه مختصات مارپیچ به صورت زیر خواهند شد:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon\omega(v \sin\xi + w \cos\xi - \lambda\frac{\partial u}{\partial \xi}) = 0 \quad (۸)$$

$$u = -\omega \mathrm{ReDa}\left(\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial \xi}\right) \quad (۹)$$

$$v = -\mathrm{ReDa}\frac{\partial P}{\partial r} \quad (۱۰)$$

$$w = -\frac{1}{r}\mathrm{ReDa}\frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (۱۱)$$

در اینجا انحنای بدون بعد به صورت $\varepsilon = \kappa\, H$ و زاویه در دستگاه مختصات جدید به صورت $\xi = \theta + \phi$ تعریف می‌شود. همچنین تعاریف زیر برای بی‌بعدسازی ارائه می شود:

$$\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon r \sin\xi} \quad (۱۲)$$

$$\mathrm{Da} = \frac{\kappa}{H^2} \quad (۱۳)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U^* R_h^*}{\mu} \quad (۱۴)$$

که شعاع هیدرولیکی R_h^* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_h^* = \frac{2A}{P_w} \quad (۱۵)$$

که در رابطه ی فوق A سطح مقطع عبور جریان می باشد که به صورت $A = \pi\,(r_o^{*2} - r_i^{*2})$ محاسبه می‌شود و همچنین P_w محیط ترشده می‌باشد که به صورت $P_w = 2\pi\,(r_o + r_i)$ بدست می‌آید در نتیجه شعاع هیدرولیکی به صورت $R_h^* = r_o - r_i = H$ حاصل می شود، که با این تعریف عدد رینولدز به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\mathrm{Re} = \frac{U^* H}{\vartheta} \quad (۱۶)$$

که ϑ ویسکوزیته سینماتیک سیال است. با فرض انحنای بدون بعد مختصر ($\varepsilon \ll ۱$) و اینکه λ ، Da و Re از مرتبه‌ی مقداری محدود می‌باشند، می‌توان برای سرعت و فشار پاسخ را بر اساس انحنای بدون بعد به صورت زیر بسط داد:

$$u = u_0(r) + \varepsilon u_1(\xi, r) + \varepsilon^2 u_2(\xi, r) + \cdots \quad (۱۷)$$

$$v = v_0(r) + \varepsilon v_1(\xi, r) + \varepsilon^2 v_2(\xi, r) + \cdots \quad (۱۸)$$

$$w = w_0(r) + \varepsilon w_1(\xi, r) + \varepsilon^2 w_2(\xi, r) + \cdots \quad (۱۹)$$

$$P = P_0(s) + \varepsilon P_1(\xi, r) + \varepsilon^2 P_2(\xi, r) + \cdots \quad (۲۰)$$

با قرار دادن روابط (۱۷) تا (۲۰) در معادلات (۸) تا (۱۱) و دسته‌بندی بر اساس توان‌های انحنای بدون بعد (ε) می‌توان پاسخ را بدست آورد. از حل معادلات مرتبه صفر بدست می‌آید:

$$U_0 = -\mathrm{ReDa}\frac{\partial P_0}{\partial s}\,, v_0 = 0\,, w_0 = 0 \quad (۲۱)$$

معادلات فوق نشان می‌دهند که قسمت مرتبه صفر سرعت کاملا محوری است. از حل معادلات مرتبه اول می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{v_1}{r} = 0 \quad (۲۲)$$

$$u_1 = -\mathrm{ReDa}\left(\frac{\partial P_1}{\partial s} - r \sin\xi\, \frac{\partial P_0}{\partial s}\right) \quad (۲۳)$$

$$v_1 = -\mathrm{ReDa}\frac{\partial P_1}{\partial r} \quad (۲۴)$$

$$w_1 = -\frac{1}{r}\mathrm{ReDa}\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \quad (۲۵)$$

به دلیل اینکه به هنگام میل کردن r به سمت صفر، سرعت باید محدود باشد طبق معادله‌ی (۲۵)، $\partial P_1/\partial \xi = 0$ خواهد بود که متعاقبا $w_1 = 0$ خواهد شد. همچنین طبق معادله‌ی (۲۲)، عبارت $r v_1$ تنها تابعی از s و ξ است، دوباره

برای اینکه به هنگام میل کردن r به سمت صفر، سرعت محدود باشد $v_1 = 0$ خواهد بود. بنابراین بر اساس رابطه‌ی (۲۴) خواهیم داشت: $\partial P_1/\partial r = 0$. در نتیجه P_1 تنها تابعی از s است. با انتگرال‌گیری نسبت به s از یک انتهای کانال تا انتهای دیگر می‌توان نشان داد که: $P_1 = 0$.
نهایتا حل معادلات مرتبه‌ی اول به صورت زیر خواهد شد:

$$u_1 = \mathrm{ReDa} \cdot r \sin\xi \left(-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right) \tag{۲۶}$$

$$v_1 = 0 \tag{۲۷}$$

$$w_1 = 0 \tag{۲۸}$$

معادلات مرتبه‌ی دوم نشان می‌دهند که:

$$\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial \xi} = -\lambda \mathrm{ReDa} \cdot r \cos\xi \ \frac{\partial P_0}{\partial s} \tag{۲۹}$$

$$u_2 = -\mathrm{ReDa}\left(\frac{\partial P_2}{\partial s} + r^2 \sin^2\xi \ \frac{\partial P_0}{\partial s}\right) \tag{۳۰}$$

$$v_2 = \mathrm{ReDa}\frac{\partial P_2}{\partial r} \tag{۳۱}$$

$$w_2 = -\frac{1}{r}\mathrm{ReDa}\frac{\partial P_2}{\partial \xi} \tag{۳۲}$$

که از حل آن‌ها می‌توان دریافت:

$$u_2 = \mathrm{ReDa}(r\sin\xi)^2\left(-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right) \tag{۳۳}$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\lambda \mathrm{ReDa} \cdot r \cos\xi \left(-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right) \tag{۳۴}$$

$$w_2 = 0 \tag{۳۵}$$

در نتیجه طبق حل مرتبه‌های صفر، اول و دوم، نمایه سرعت محوری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u = \mathrm{ReDa}\left(-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right)(1 + \varepsilon r \sin\xi + \varepsilon^2 r^2 \sin^2\xi) \tag{۳۶}$$

حال ابتدا سرعت متوسط (U) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$U = \frac{\int u \, dA}{A} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{r_i^*}^{r_o^*} u r^* \, dr^* \, d\xi}{\pi\left(r_o^{*2} - r_i^{*2}\right)} \tag{۳۷}$$

سپس با ادغام معادلات (۳۶) و (۳۷) در می‌یابیم:

$$U = \mathrm{ReDa}\left(-\frac{\partial P_0}{\partial s}\right)\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(r_o^2 + r_i^2\right)\right] \tag{۳۸}$$

در نهایت سرعت محوری نرمال شده از ادغام معادلات (۳۶) و (۳۸) بدست می‌آید:

$$\bar{u} = \frac{u}{U} = 1 + \varepsilon r \sin\xi + \varepsilon^2 (r^2 \sin^2\xi - \frac{r_o^2 + r_i^2}{4}) \tag{۳۹}$$

۳- تحلیل انتقال حرارت

معادله‌ی بقای انرژی در حالت دائمی برای جریان مورد نظر به صورت زیر است [۱ و ۱۸]:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{k}{\rho c_p}\nabla^2 T^* \tag{۴۰}$$

که در این رابطه T^* دمای محیط متخلخل، k ضریب هدایت حرارتی موثر محیط متخلخل و c_p ظرفیت گرمای ویژه سیال در فشار ثابت است. برای شرایط مرزی فرض می‌شود که دیواره‌ی خارجی در معرض شار ثابت قرار دارد و دیواره‌ی داخلی عایق می‌باشد.
با استفاده از قانون اول ترمودینامیک برای یک المان دیفرانسیلی می‌توان نوشت [۱۰، ۱۱ و ۱۵]:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{2q''}{\rho c_p U^*\left(r_o^{*2} - r_i^{*2}\right)} \tag{۴۱}$$

حاصل تاثیر عملگر لاپلاسین روی دما در دستگاه مختصات مارپیچ به صورت زیر است [۱۶ و ۱۷]:

$$\nabla^2 T^* = \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi^2} \tag{۴۲}$$

در اینجا مناسب است عدد بدون بعد ناسلت معرفی شود:

$$\mathrm{Nu} = \frac{h D_h^*}{k} \tag{۴۳}$$

که در این رابطه قطر هیدرولیکی D_h^* برابر است با:

$$D_h^* = r_o^* - r_i^* \tag{۴۴}$$

همچنین در رابطه‌ی (۴۳) ضریب انتقال حرارت جابجایی (h) به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$h = \frac{q''}{(T_m^* - T_w^*)} \tag{۴۵}$$

در اینجا T_w^* دمای دیواره و T_m^* دمای متوسط حجمی جریان می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_m^* = \frac{2(1-\mathrm{n})}{U^* H^2 (1+\mathrm{n})}\int_{r_i^*}^{r_o^*} r^* U^* T^* \, dr^* \tag{۴۶}$$

که در اینجا :

$$n = \frac{r_i}{r_o} \tag{۴۷}$$

همچنین دمای بدون بعد $\bar{T}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{T} = \frac{T^* - T_w^*}{T_m^* - T_w^*} \tag{۴۸}$$

T_w^* دمای دیواره‌ای است که تحت شار حرارتی قرار دارد. با توجه به معادلات (۳۹) تا (۴۳)، (۴۵) و (۴۸) معادله‌ی انرژی بدون بعد به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} = \frac{-\mathrm{Nu} \cdot r_i}{(r_o + r_i)} \times \left[1 + \varepsilon r \sin\xi + \varepsilon^2 (r^2 \sin^2\xi - \frac{r_o^2 + r_i^2}{4})\right] \tag{۴۹}$$

با شرایط مرزی زیر :

$$\begin{gathered} \bar{T}(r_o, \xi) = 0 \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}(r_i, \xi) = 0 \\ \bar{T}(r, \xi) = \bar{T}(r, \xi + 2\pi) \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}(r, \xi) = \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}(r, \xi + 2\pi) \end{gathered} \tag{۵۰}$$

با توجه به این که معادله‌ی (۴۹) یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی می باشد می توان از اصل برهم نهی برای یافتن پاسخ تحلیلی آن استفاده کرد که نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{T}(r, \xi) = \bar{T}_0 \varepsilon^0 + \bar{T}_1 \varepsilon^1 + \bar{T}_2 \varepsilon^2 \tag{۵۱}$$

که ضرایب به صورت زیر می‌باشند:

$$\bar{T}_0 = \frac{\mathrm{Nu} \cdot r_o}{4(r_o + r_i)} \times \left[(r_o^2 - r^2) + 2r_i^2 \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)\right] \tag{۵۲}$$

$$\bar{T}_1 = \frac{\mathrm{Nu} \cdot r_o \cdot \sin\xi}{8(r_o + r_i)} \times \left\{ \begin{matrix} \left[r_o^2 - \frac{r_i^2}{r_i^2 + r_o^2}(r_o^2 - 3r_i^2)\right] r + \\ \left[\frac{r_i^2 r_o^2}{r_i^2 + r_o^2}(r_o^2 - 3r_i^2)\right] r^{-1} - r^3 \end{matrix} \right\} \tag{۵۳}$$

$$\bar{T}_2 = \frac{\mathrm{Nu} \cdot r_o}{r_o + r_i} \times \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{32}\left[r_o^4 - r^4 + 4r_i^4 \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)\right] - \frac{1}{16} \\ \left[r_o^2 - r^2 + 2r_i^2 \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)\right] + \frac{\cos 2\xi}{24} \\ \cdot \\ \left[\begin{matrix} \left(\frac{r_i^4}{r_i^4 + r_o^4}(r_o^2 - 2r_i^2) - r_o^2\right) r^2 \\ + \left(\frac{r_i^4 r_o^4}{r_i^4 + r_o^4}(2r_i^2 - r_o^2)\right) r^{-2} \\ + r^4 \end{matrix}\right] \end{matrix} \right\} \tag{۵۴}$$

دمای بالک بدون بعد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\bar{T}_m = \frac{\int \bar{u}\bar{T}\, dA}{\int \bar{u}\, dA} \tag{۵۵}$$

حال با توجه به اینکه $\bar{T}_m = 1$ می‌باشد [۱۹] عدد ناسلت از رابطه‌ی زیر محاسبه می شود:

$$\frac{1 - n}{\pi(1 + n)} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \bar{u}\bar{T} r \, dr \, d\xi = 1 \tag{۵۶}$$

که نتیجه به صورت زیر خواهد شد :

$$\mathrm{Nu} = B(1 + C\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3) \tag{۵۷}$$

که ضرایب به صورت زیر می‌باشند:

$$B = \frac{\left[\frac{32}{\pi} n(n+1)^2 (n-1)^5\right]}{\left[\begin{matrix} \frac{2}{(n-1)^2} - \left(1 + 2n^2 - \frac{4}{\pi}\right) - 4n^5 \\ -4n^5(n+2) + 4n^2 \\ (-2n^2 + 4n^2 \ln(n) + 2) \\ (n-1)^2 \end{matrix}\right]} \tag{۵۸}$$

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \tag{۵۹}$$

$$c_1 = \left[\frac{n^2(n+1)}{3\begin{pmatrix} -n^5 + 3n^4 - 2n^3 \\ -2n^2 + 3n - 1 \end{pmatrix}}\right] \times \left\{ \frac{\left[\begin{matrix} 3(n-1)^4 \\ (2n^4 - 4n^3 + 2n^2 - 1) + n^4 \\ (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) \\ -6(n-1)^6 (2n^2 \ln(n)) \end{matrix}\right]}{\left[\begin{matrix} -\frac{2}{(n-1)^2} + \left(1 + 2n^2 - \frac{4}{\pi}\right) \\ +4n^5(n+2) + 4n^2 \\ (2n^2 - 4n^2 \ln(n) - 2) \\ (n-1)^2 \end{matrix}\right]} \right\} \tag{۶۰}$$

$$c_2 = \left[\frac{n+1}{3\begin{pmatrix} n^5 - 3n^4 + 2n^3 \\ +2n^2 - 3n + 1 \end{pmatrix}}\right] \times$$

$$\left\{\frac{\begin{bmatrix}3(n-1)^4\\(2n^4-4n^3+2n^2-1)\\+(n^4-4n^3+6n^2-4n+1)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-\frac{2}{(n-1)^2}+\left(1+2n^2-\frac{4}{\pi}\right)\\+4n^5(n+2)\\+4n^2(2n^2-4n^2\ln(n)-2)\\(n-1)^2\end{bmatrix}}\right\} \tag{۶۱}$$

$$c_3=\frac{[(n^2+1)(n-1)^2]}{\pi\times\begin{bmatrix}2+(n-1)^2\\\left(-1-2n^2+\frac{4}{\pi}\right)\\-4n^5(n-1)^2(n+2)\\+4n^2\\(-2n^2+4n^2\ln(n)+2)\\(n-1)^4\end{bmatrix}} \tag{۶۲}$$

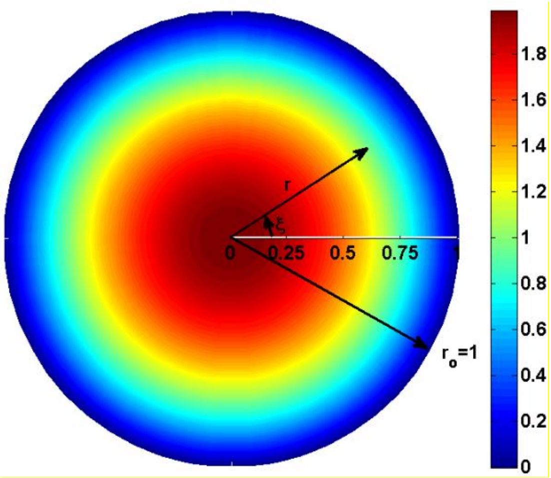
$$c_4=\left[\frac{n^2(n^2+1)}{(n-1)^2}\right]\times\left\{\frac{\begin{bmatrix}n^3(n+2)-(n-1)^2\\(4n^2\ln(n)-2n^2+2)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-\frac{2}{(n-1)^2}+\left(1+2n^2-\frac{4}{\pi}\right)\\+4n^5(n+2)\\+4n^2(2n^2-4n^2\ln(n))\\(n-1)^2\end{bmatrix}}\right\} \tag{۶۳}$$

۴- نتایج و بحث

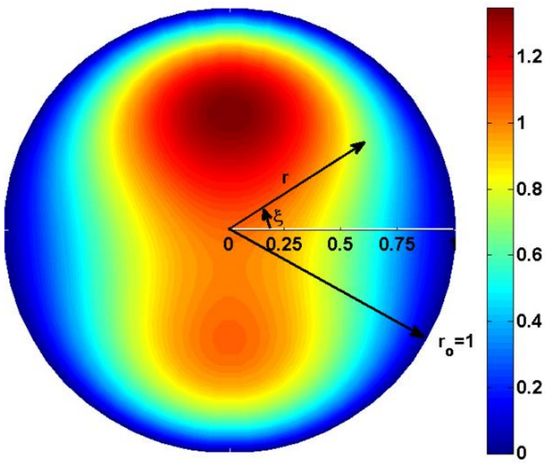
برای اعتبار سنجی، اگر در پروفیل دمای بدست آمده (رابطه (۵۱)) $r_i=0$ قرار داده شود (که نشان‌گر یک لوله مارپیچ پر شده از محیط متخلخل است)، رابطه (۵۴) حاصل می شود که دقیقا همان پروفیل دمای بدست آمده توسط نایلد و کوزنتسوف [۱] است. برای نمایش بصری بهتر، کانتور میدان دمای یک لوله مارپیچ پر شده از محیط متخلخل (رابطه (۵۴)) به ازای دو مقدار مختلف انحنای بدون بعد در شکل (۲) رسم شده است:

$$\bar{T}=\frac{1}{4}\mathrm{Nu}\left\{\begin{matrix}1-r^2+\frac{1}{2}\varepsilon r(1-r^2)\sin\xi\\-\frac{1}{24}\varepsilon^2\begin{bmatrix}3-6r^2+3r^4+\\4r^2(1-r^2)\cos2\xi\end{bmatrix}\end{matrix}\right\} \tag{۶۴}$$

شکل (۳) نتایج توزیع دمای مطالعه حاضر (معادله‌ی (۵۱)) برای مبدل دو لوله‌ای مستقیم هم‌مرکز ($\varepsilon=0$) با نسبت شعاع لوله درونی به لوله بیرونی (n) برابر ۰/۵ پر شده از محیط متخلخل را در مقایسه با نتایج هاشمی و همکاران [۷] نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که نتایج حل حاضر به خوبی با نتایج مطالعه هاشمی و همکاران [۷] مطابقت دارد. در شکل (۳) همچنین دیده می‌شود هنگامی که دیواره داخلی عایق و دیواره خارجی تحت شار حرارتی ثابت قرار داشته باشد، دمای بدون بعد (که با دمای دیواره تحت شار حرارتی بدون بعد شده است) از دیواره خارجی ($r_i=0$) و با مقدار صفر شروع به افزایش می‌کند به طوریکه گرادیان دما روی دیواره داخلی ($r_i=1$) برابر صفر است که نشان‌گر دیواره عایق می‌باشد.



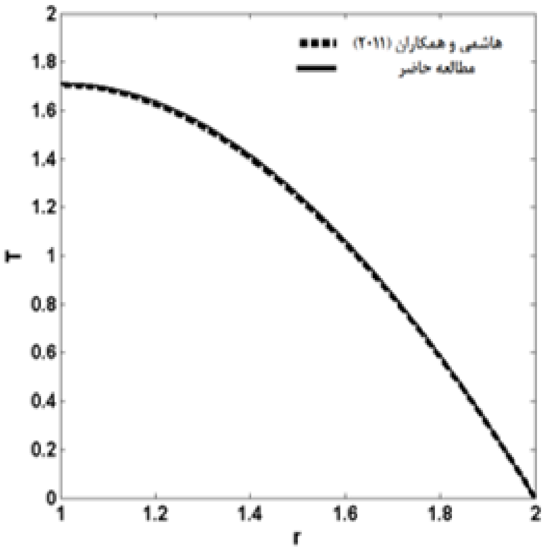
(الف)



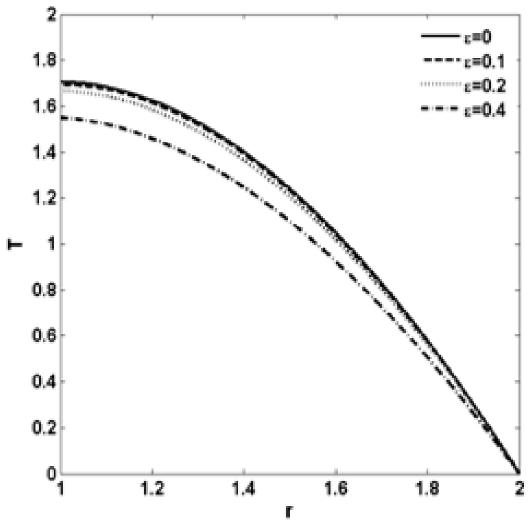
(ب)

شکل ۲: کانتور میدان دمای بدون بعد ($\bar{T}$) برای: الف) یک لوله بدون انحنا پر شده از محیط متخلخل ($\varepsilon=0$ ، $r_i=0$ و $r_o=1$) ب) یک لوله مارپیچ پر شده از محیط متخلخل ($\varepsilon=0.4$ ، $r_i=0$ و $r_o=1$)

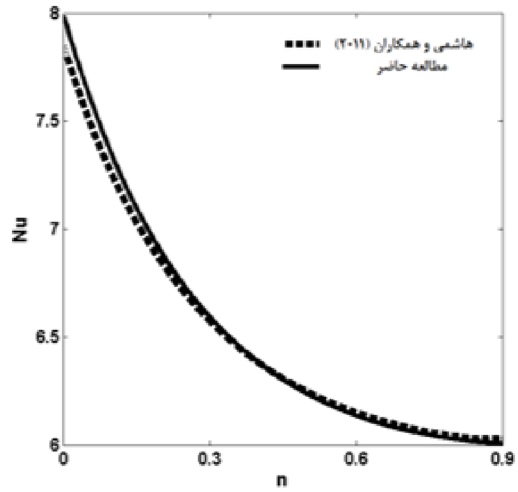
شکل (۴) تاثیرات انحنای بدون بعد روی توزیع دما را برای نسبت شعاع (n) برابر ۰,۵ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار انحنای بدون بعد، مقدار بیشینه دما کاهش می‌یابد، به عبارت دیگر تغییرات دما در سیال کاهش می‌یابد. دلیل این امر نیز افزایش قابلیت انتقال حرارت به دلیل افزایش انحنا می‌باشد که به یکنواختی بیشتر میدان دمای سیال منجر می‌شود.



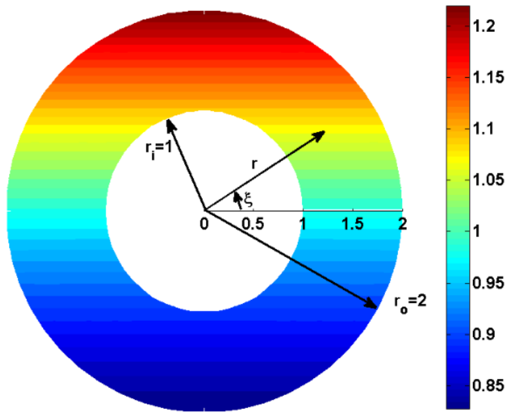
شکل ۳: توزیع دمای مطالعه حاضر در مقایسه با نتایج هاشمی و همکاران [۷] برای $\varepsilon = 0$ ، $r_i = 1$ و $r_o = 2$



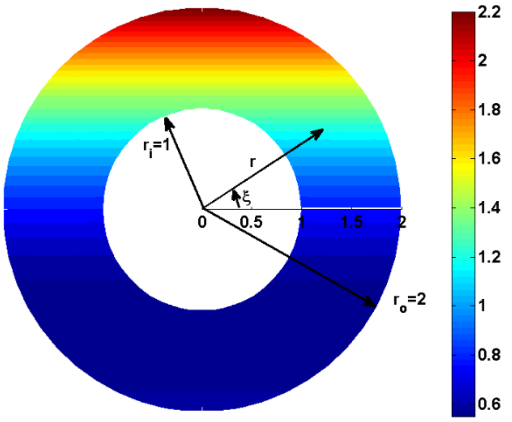
شکل ۴: تاثیر انحنای بدون بعد بر توزیع دما برای $n = 0.5$



شکل ۵: عدد ناسلت مطالعه حاضر در مقایسه با نتایج هاشمی و همکاران [۵]



(الف)



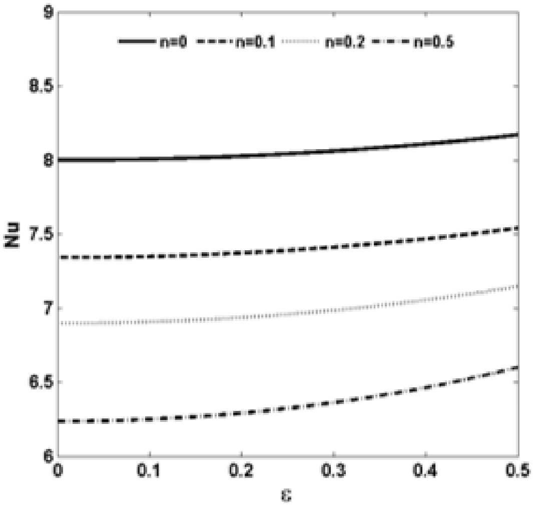
(ب)

شکل ۶: کانتور سرعت نرمال شده محوری $(\bar{u})$ برای $r_i = 1$ ، $r_o = 2$ ؛ الف) $\varepsilon = 0.1$ و ب) $\varepsilon = 0.4$

شکل (۵) عدد ناسلت را برای مبدل دولوله‌ای مستقیم $(\varepsilon = 0)$ پر شده از محیط متخلخل در مقایسه با نتایج هاشمی و همکاران [۷] بر حسب نسبت شعاع لوله درونی به لوله بیرونی (n) نشان می‌دهد. هنگامی که نسبت شعاع برابر صفر است، مبدل تبدیل به یک لوله تحت شار حرارتی ثابت می‌شود که عدد ناسلت آن دقیقا برای ۸ است و مطالعه حاضر به خوبی آن را پیش بینی می‌کند. همچنین هنگامی که نسبت شعاع به سمت یک میل می‌کند، هندسه جریان متمایل به جریان بین دو صفحه موازی می‌شود که یک صفحه آن تحت شار حرارتی ثابت و صفحه دیگر عایق است که عدد ناسلت متناظر آن مطابق با نتایج مطالعه حاضر برابر ۶ است [۱۸]. معادله (۵۵) نشان می‌دهد که عدد ناسلت با انحنای بدون بعد (ε) افزایش می‌یابد. این افزایش از درجه دوم انحنا (ε^2) در مقدار عدد ناسلت به دلایل زیر رخ می دهد: تغییرات مرتبه دوم پروفیل سرعت (معادله (۳۹)) نسبت به انحنا، تغییرات مرتبه دوم پروفیل دما (معادله (۵۱)) نسبت به انحنا و تاثیرات متقابل تغییرات مرتبه اول

پروفیل سرعت نسبت به انحنا و تغییرات مرتبه اول پروفیل دما نسبت به انحنا [۴]. برای مشاهده تاثیرات انحنای بدون بعد بر میدان سرعت، کانتور سرعت محوری نرمال شده (رابطه (۳۹)) به ازای دو مقدار متفاوت انحنای بدون بعد در شکل (۶) رسم شده است که به تجسم میدان سرعت کمک شایانی می‌نماید. نکته دیگر اینکه با اینکه بردار سرعت نسبت به پیچش (λ) از مرتبه دوم اندازه تغییر می‌کند (معادله (۳۴))، اما اعداد ناسلت بدست آمده نسبت به پیچش تغییری نمی‌کنند. دلیل این امر هم این است که تاثیر پیچش بر روی مؤلفه شعاعی سرعت (راستای B در شکل (۱-الف)) به دلیل حضور عبارت $\sin\xi$ در نیمی از لوله مثبت و در نیمی از آن منفی است. بنابراین تاثیر کلی آن خنثی می‌شود [۴ و ۲۰].

برای مشاهده تاثیر انحنا روی عدد ناسلت شکل (۷) رسم شده است. مشاهده می‌شود که عدد ناسلت با افزایش انحنا افزایش می‌یابد. همچنین از آنجا که این افزایش طبق معادله (۵۵) از مرتبه دوم می‌باشد، هرچه انحنا افزایش بیشتری داشته باشد تاثیر آن در بهبود انتقال حرارت بیشتر است. از طرف دیگر در شکل (۵) مشاهده می‌شود که عدد ناسلت با افزایش نسبت شعاع کاهش می‌یابد. این کاهش به دلیل میل عدد ناسلت از مقدار حدی عدد ناسلت برای جریان در درون لوله مارپیچ به مقدار حدی برای جریان در بین دو صفحه موازی مارپیچ است.



شکل ۷: تغییرات عدد ناسلت با انحنای بدون بعد (ε)

۵-جمع‌بندی

معادلات مومنتوم و انرژی برای محیط متخلخل قرار گرفته در فضای حلقوی بین دو لوله مارپیچ هم‌مرکز در دستگاه مارپیچ به روش اغتشاشات حل شده و برای اولین بار پروفیل‌های سرعت و دما به صورت تحلیلی ارائه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند مؤلفه سرعت محوری تا مرتبه دوم اندازه انحنای بدون بعد تابعی از پیچش بدون بعد نیست. همچنین طبق نتایج بدست آمده، فقط مؤلفه سرعت شعاعی تابعی از پیچش است، آن هم از مرتبه دوم اندازه انحنای بدون بعد است. بنابراین تاثیر پیچش نسبت به انحنا قابل صرف نظر است. نتایج نشان می‌دهند که عدد ناسلت با افزایش انحنای بدون بعد افزایش می‌یابد. این افزایش از مرتبه دوم اندازه انحنای بدون بعد است. همچنین مشاهده شده است که عدد ناسلت تا مرتبه دوم اندازه انحنای بدون بعد نسبت به تغییر پیچش بدون تغییر می‌ماند.

۶- فهرست علائم و نشانه‌ها

A	سطح مقطع جریان عبوری، m^2
B	ثابت
C	ثابت
c_i	ثابت، i=1-4
c_p	ظرفیت گرمایی ویژه، kJ/kg K
Da	عدد دارسی
D_h^*	قطر هیدرولیکی، m
h	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، $w / m^2 K$
H	فاصله ی بین دو استوانه، m
K	ضریب نفوذپذیری
k	ضریب انتقال حرارت هدایتی، W/m K
n	نسبت شعاع استوانه های هم مرکز
Nu	عدد ناسلت
P	فشار بی‌بعد
P^*	فشار، Pa
$\bar{P}$	گام استوانه ی مارپیچ، m
P_w	محیط تر شده، m
q"	شار حرارتی، W/m^2
R	شعاع بی بعد
r_i	شعاع بی بعد استوانه ی داخلی
r_o	شعاع بی بعد استوانه ی خارجی
r_i^*	شعاع استوانه ی داخلی، m
r_o^*	شعاع استوانه ی خارجی، m
R	شعاع مارپیچ، m
Re	عدد رینولدز
S	راستای محوری بی بعد استوانه مارپیچ
S^*	راستای محوری استوانه مارپیچ، m
T^*	دما، K
T_m^*	دمای متوسط حجمی، K
T_w^*	دمای دیواره، K

$\bar{T}$	دمای بدون بعد	
u, v, w	مولفه های بی بعد سرعت	
$\bar{u}$	سرعت نرمال شده	
U^*	سرعت متوسط، m/s^2	
x^*	راستای محوری استوانه ی مستقیم، m	

علایم یونانی

ε	انحنای بدون بعد	
κ	انحنای استوانه ی مارپیچ، 1/m	
λ	نسبت پیچش به انحنا	
μ	ویسکوزیته‌ی دینامیکی، Pa.s	
ϑ	وسکوزیته‌ی سینماتیکی، m^2/s	
ξ	زاویه در دستگاه مارپیچ	
ρ	چگالی سیال، kg/m^3	
τ	پیچش استوانه‌ی مارپیچ، 1/m	
ω	پارامتر تعریف شده در معادله‌ی (۱۲)	

بالانویس‌ها

*	کمیت یا متغیر با بعد	

زیرنویس‌ها

I	دیوار داخلی	
o	دیوار خارجی	

۷- مراجع

[1] D.A. Nield, and A.V. Kuznetsov, "Forced convection in a helical pipe filled with a saturated porous medium", International journal of heat and mass transfer, Vol. 47, NO. 24, November 2004, pp. 5175– 5180.

[2] A. Jamarani, M. Maerefat, and M.E. Nimvari, "Numerical study of heat transfer in double-tube heat exchanger filled with porous material in a turbulent fluid flow", Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, NO. 3, 2016, pp. 173 – 184.

[3] A. Jamarani, M. Maerefat, and M.E. Nimvari, "Numerical investigation of nanofluid's effect on heat transfer in a pipe partially filled with porous material in a turbulent fluid flow", Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, NO. 6, 2016, pp. 255 – 258.

[4] L. Cheng, and A.V. Kuznetsov, "Heat transfer in a laminar flow in a helical pipe filled with a fluid saturated porous medium", International journal of thermal sciences, Vol. 44, NO. 8, August 2005, pp. 787 – 798.

[5] L. Cheng, and A.V. Kuznetsov, "Investigation of laminar flow in a helical pipe filled with a fluid saturated porous medium", Journal of Mechanics - B/Fluids, Vol. 24, NO. 3, May 2005, pp. 338 – 352.

[6] A. Avramenko, and A.V. Kuznetsov, "Flow in a Curved Porous Channel with a Rectangular Cross Section", Journal of Porous Media, Vol. 11, NO. 3, 2008, pp. 241 – 246.

[7] S.M.H. Hashemi, S.A. Fazeli, and H. Shokouhmand, "Fully developed non-Darcian forced convection slip-flow in a micro-annulus filled with a porous medium: Analytical solution", Energy Conversion and Management, Vol. 52, NO. 2, February 2011, pp. 1054 – 1060.

[8] K. Hooman, and A.A. Ranjbar-Kani, "A perturbation based analysis to investigate forced convection in a porous saturated tube", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 162, NO. 2, January 2004, pp. 411 – 419.

[9] K. Hooman, "A perturbation solution for forced convection in a porous-saturated duct", Journal of computational and applied mathematics, Vol. 211, NO. 1, January 2002, pp. 57 – 66.

[10] M. Dehghan, M.S. Valipour, and S. Saedodin, "Perturbation analysis of the local thermal non-equilibrium condition in a fluid saturated porous medium bounded by an iso-thermal channel", Transport in porous media, Vol. 102, NO. 2, March 2014, pp. 139 – 152.

[11] M. Dehghan, M.T. Jamal-Abad, and S. Rashidi, "Analytical interpretation of the local thermal non-equilibrium condition of porous media imbedded in tube heat exchangers", Energy Conversion Management, Vol. 85, September 2014, pp. 264 – 271.

[12] M. Dehghan, S. Saedodin, and M.S. Valipour, "Perturbation methods in hydrodynamics of porous media", 2nd Iranian Conference on Heat and Mass Transfer-ICHMT, Semnan, Iran, November 2014.

[13] M. Dehghan, Y. Rahmani, S. Saedodin, M.S. Valipour, and D.D. Ganji, "HPM analysis of forced convection in metal foams in the presence of radiation heat transfer", Journal of Modeling in Engineering, 2015, accepted manuscript.

[14] M. Dehghan, Y. Rahmani, D.D. Ganji, S. Saedodin, M.S. Valipour, and S. Rashidi, "Convection–radiation heat transfer in solar heat exchangers filled with a porous medium: Homotopy perturbation method versus numerical analysis", Renewable Energy, Vol. 74, February 2015, pp. 448 – 455.

[15] M. Dehghan, M.S. Valipour, and S. Saedodin, "Temperature-dependent conductivity in forced convection of heat exchangers filled with porous media: a perturbation solution", Energy Conversion and Management, Vol. 91, February 2015, pp. 259 – 266.

[16] M. Germano, "On the effect of torsion on a helical pipe flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 125, December 1989, pp. 1 – 8.

[17] M. Germano, "The Dean equations extended to a helical pipe flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 203, June 1982, pp. 289 – 305.

[18] D.A. Nield, and A. Bejan, " Convection in Porous Media ", 3rd Ed., Springer, New York, February 2006.

[19] M. Dehghan, Y. Mahmoudi, M.S. Valipour, and S. Saedodin, "Combined Conduction-Convection-Radiation Heat Transfer of Slip Flow inside a Micro - channel Filled with a Porous Material", Transport in Porous Media, Vol. 108, NO. 2, June 2015, pp. 413 – 436.

[20] R.C. Xin, and M.A. Ebadian, "The effect of Prandtl numbers on local and average convective heat transfer in a helicoidal pipe", Journal of Heat Transfer, Vol. 119, NO. 3, August 1997, pp. 467 – 473.