

## بررسی تنش الاستیک در یک استوانه‌ی جداره ضخیم ساخته شده از مواد گرادایانی دو بعدی با مدل ماده جدید

امیر نجیبی<sup>۱\*</sup>، رمضانعلی حاجی قربانی<sup>۲</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۱۵	<p>در این مقاله تحلیل الاستیک تنش در یک استوانه‌ی جداره ضخیم با طول کوتاه و ساخته شده از مواد خواص گرادایانی دو بعدی که خواص مواد در آن بر اساس مدل موری - تاناکا<sup>۳</sup> ارائه شده، انجام شده است. بارهای اعمالی بر این استوانه به صورت فشار خارجی یا فشار داخلی بوده است و از روش المان محدود که المان‌های آن توابع درونیاب درجه سوم لاگرانژی دارند، برای حل مسأله استفاده شده است. همچنین اعتبارسنجی مسأله به کمک مقایسه با مسأله‌ی ساده‌تری که تحلیل تنش به روش بدون مش پتروف - گلرکین<sup>۴</sup> در آن صورت گرفته، انجام پذیرفته است. با توجه به نتایج، مقادیر تنش به دست آمده در اثر فشار خارجی بیشتر از مقادیر تنش در اثر فشار داخلی می‌باشد. همچنین تنش مؤثر نرمال در راستای خط مرکزی شعاعی بر اساس توزیع درصد حجمی فاز فلزی با تغییر <math>n_z^5</math>، تغییرات چشمگیری دارد و تنش مؤثر نرمال در نقطه‌ی مرکزی دیواره‌ی استوانه با افزایش مقادیر <math>n_r^6</math> زیاد می‌شود. در پایان، بیشینه تنش مؤثر نرمال برای تمامی درصد حجمی‌های ممکن روی دیواره‌ی استوانه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که کمترین مقدار برای بیشینه‌ی تنش مؤثر نرمال در هر دو حالت فشار داخلی و خارجی مربوط به <math>n_r</math> برابر ۲۰ و <math>n_z</math> برابر ۰٫۱ می‌باشد. به عبارت دیگر دیواره‌ی سیلندر ساخته شده از سرامیک دوم (سیلیکون نیتراید) دارای کمترین مقدار تنش مؤثر نرمال خواهد بود.</p>
پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۳/۳۰	
<p><b>واژگان کلیدی:</b> مواد خواص گرادایانی دو بعدی، استوانه جداره ضخیم با طول کوتاه، موری - تاناکا، تنش الاستیک.</p>	

### ۱- مقدمه

مواد خواص گرادایانی، نوعی مواد کامپوزیتی هستند که خواص ماده در ضخامت یا سطح قطعه به صورت پیوسته تغییر می‌کند. این مواد در ابتدا توسط دانشمندان ژاپنی در اواسط دهه‌ی ۸۰ میلادی ارائه شده‌اند. کاربرد این مواد در شرایطی است که در آن تغییرات درجه حرارت مانند صنایع هوافضا و راکتورهای هسته‌ای، اجتناب‌ناپذیر است [۱]. حل دقیق و بسته برای تنش و جابجایی برای مخازن استوانه‌ای و کروی ساخته شده از مواد گرادایانی تحت فشار داخلی در سال ۲۰۰۱ توسط توتونکو و اوزترک ارائه شد. در این

تحلیل از تئوری خطی الاستیسیته استفاده شده و مدول الاستیسیته به صورت تابع نمایی در جهت ضخامت متغیر بوده و ضرایب پواسون ثابت فرض شده است [۲]. در ادامه این روند با در نظر گرفتن تغییرات خواص مکانیکی در راستای ضخامت استوانه، در سال‌های ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳ میلادی توسط جباری و همکاران صورت پذیرفت. در این تحقیقات بارگذاری حرارتی در حالت پایدار و متقارن محوری و نیز نامتقارن محوری فرض شده بود [۳ و ۴]. همچنین در تحقیقی دیگر با استفاده از روشی عددی تحلیل استوانه ساخته شده از مواد گرادایانی تحت بارگذاری

\*. پست الکترونیک نویسنده مسئول: a.najbi@semnan.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۲. مربی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

<sup>3</sup> Mori-Tanaka

<sup>4</sup> MLPG

<sup>5</sup> Power exponent along axial direction

<sup>6</sup> Power exponent along radial direction

روش جابجایی معادلات هندسی مرتبه بالا استخراج و حل شده است [۹]. شاو و وانگ در همین زمان حل سه بعدی یک پانل استوانه‌ای با طول محدود ساخته شده از مواد با خواص گرادیانی تحت اثر بار مکانیکی و حرارتی پایدار ارائه داده‌اند. در این تحقیق خواص مکانیکی و حرارتی مستقل از دما فرض شده و به صورت پیوسته در جهت شعاعی متغیر می‌باشند. شرایط تکیه‌گاهی ساده در نظر گرفته شده و توزیع تنش و دما با استفاده از سری‌های مثلثاتی و توانی به دست آمده‌اند [۱۰]. در تحقیقی دیگر هانگجان و همکاران رفتار الاستیک یک استوانه گرادیانی با دو مدول لایه‌ای و تغییرات پیوسته خواص را مطالعه کردند. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در این تحلیل متغیر به کار گرفته شده و استوانه تحت اثر فشار یکنواخت داخلی و خارجی قرار گرفته است. در مدل لایه‌ای برای هر لایه همگن حل دقیق با استفاده از حل لامه به دست آمده است، لیکن در مدل پیوسته با استفاده از روش جابجایی معادلات مرتبه بالای هندسی و معادلات ویتاکر به طور هم‌زمان حل شده است. در این تحقیق نیز تغییرات خواص در جهت شعاعی بوده و مسأله در حالت متقارن محوری و کرنش صفحه‌ای حل شده است [۱۱]. توتونکو در این سال با فرض سری‌های توانی برای جابجایی و تنش و استفاده از روابط الاستیسیته خطی در یک استوانه گرادیانی تحت فشار داخلی توزیع تنش‌ها را به دست آورده است. ضریب پواسون ثابت و مدول الاستیسیته به صورت نمایی در جهت ضخامت متغیر می‌باشد [۱۲].

یک مدل تحلیلی برای محاسبه تنش‌های ایجاد شده و وقوع تسلیم در یک محور استوانه‌ای توخالی دوار و ساخته شده از مواد گرادیانی با فرض کرنش صفحه‌ای در سال ۲۰۰۶ توسط اکیس و همکاران ارائه شده است. مدول الاستیسیته و مقاومت تسلیم محور در جهت شعاعی به صورت غیر خطی متغیر می‌باشد. روابط تحلیلی برای مقادیر بحرانی خواص ماده که به مودهای مختلف پلاستیک شدن منجر می‌شود و نیز حد الاستیک سرعت دوران بر مبنای معیار تسلیم ترسکا به دست آمده است [۱۳]. اراسلان و همکاران نیز در این سال یک حل بسته برای استوانه توپر دوار و دیسک دوار ساخته شده از مواد گرادیانی با فرض کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای ارائه داده‌اند. مدول الاستیسیته ماده در جهت شعاعی با دو مدل نمایی و سهموی تغییر کرده و روابط تحلیلی برای مقادیر تنش‌ها در مرکز به دست

حرارتی و مکانیکی در حالات استاتیکی و نیمه استاتیکی صورت گرفت. در این تحقیق خواص مکانیکی به صورت تابع نمایی فرض شده است و همچنین برای حالات بارگذاری ارائه شده، سازه بهینه شده است [۵].

در سال ۲۰۰۵ تنش‌های حرارتی و مکانیکی، جابجایی و توزیع دما در یک استوانه گرادیانی با طول محدود تحت بارگذاری حالت پایدار مکانیکی و حرارتی متقارن محوری توسط شاو بررسی شده است. در این تحلیل از روش‌های لایه‌ای استفاده شده و خواص ماده در راستای شعاعی متغیر و مستقل از دما در نظر گرفته شده است. با استفاده از سری‌های توانی و اعمال شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و پیوستگی بین لایه‌ها، معادلات انتقال حرارت و ترموالاستیسیته حاکم بر مسأله حل شده‌اند [۶].

چینگ و یین در سال ۲۰۰۵ از روش بدون المان پتروف - گلرکین برای تحلیل مسائل ترمودینامیکی سازه‌های دو بعدی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی بهره جستند. در این تحقیق مدل‌سازی تغییرات خواص به دو روش انجام گرفته است. در روش اول از توابع توانی و نمایی برای بیان تغییرات خواص استفاده شده است و روش دوم بر اساس معادلات میکرومکانیکی موری - تاناکا می‌باشد. سازه‌های مختلف نظیر تیر با تکیه‌گاه‌های ساده و استوانه با پروفیل - های مختلف تغییرات خواص، مورد بررسی قرار گرفته است. شایان ذکر است تغییرات خواص در این تحلیل در یک جهت صورت گرفته است [۷]. همچنین اورال و انلاس در سال ۲۰۰۵ اثرات توزیع غیر یکنواخت مدول الاستیسیته و مدول برشی در یک استوانه جدار ضخیم در جهت شعاعی را بر توزیع تنش‌های ناشی از فشار داخلی بررسی کرده‌اند. با استفاده از معادلات تعادل، قانون هوک و روابط کرنش جابجایی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید که در آن مدول الاستیسیته و مدول برشی به صورت توانی با شعاع تغییر می‌کند و ضریب پواسون ثابت است. پاسخ این دستگاه برحسب تابع پتانسیل تنش به صورت حل بسته به دست آمده است [۸]. زیفی و همکاران در سال ۲۰۰۶ یک حل دقیق برای استوانه ساخته شده از ماده با خواص گرادیانی با طول نامحدود ارائه داده‌اند که این مسأله با دو روش مختلف تحلیل شده است. در روش اول با استفاده از روش لایه‌ای و بر مبنای حل لامه استوانه تحت فشار داخلی و خارجی ثابت قرار گرفته است. در روش دوم با استفاده از

ماده آلیاژهای فلزی و مواد دیگر سرامیک می‌باشند. درصد حجمی هریک از مواد به صورت مشخص در دو بعد تغییر می‌کند. برای یافتن درصد حجمی هر یک از مواد در نقطه‌ای دلخواه در سطح مقطع استوانه از مجموع درصدهای حجمی استفاده می‌شود. در واقع می‌توان از مدل‌های دیگری مانند مدل نمایی نیز در این تحقیق استفاده کرد، اما مدل توانی مورد نظر در اغلب مقالات مرتبط مورد استفاده قرار گرفته است و به دلیل کاربرد بیشتر در مقالات استفاده از این مدل بر دیگر مدل‌ها ارجحیت دارد. در استوانه‌ی مورد نظر که در شکل (۱) نشان داده شده است، سطح داخلی از دو نوع سرامیک تشکیل شده که از نوع اول در نقطه پایینی استوانه تا نوع دوم در نقطه بالایی سطح داخلی تغییر می‌کند و سطح خارجی استوانه نیز از دو نوع فلز تشکیل شده که از نوع اول در نقطه پایینی استوانه تا نوع دوم در نقطه بالایی سطح خارجی تغییر می‌کند. درصد حجمی سرامیک‌ها و فلزات به ترتیب در جهت طول و شعاع استوانه به صورت توابع زیر مشخص می‌شوند [۱۶].

$$V_c = \left[ 1 - \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{n_r} \right] \quad (الف-۱)$$

$$V_m = \left[ \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{n_r} \right] \quad (ب-۱)$$

$$V_1 = \left[ 1 - \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{n_r} \right] \left[ 1 - \left( \frac{z}{l} \right)^{n_z} \right] \quad (الف-۲)$$

$$V_2 = \left[ 1 - \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{n_r} \right] \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^{n_z} \right] \quad (ب-۲)$$

$$V_3 = \left[ \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{n_r} \right] \left[ 1 - \left( \frac{z}{l} \right)^{n_z} \right] \quad (ج-۲)$$

$$V_4 = \left[ \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{n_r} \right] \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^{n_z} \right] \quad (د-۲)$$

$n_r$  و  $n_z$  اعداد ثابت غیر منفی می‌باشند که نحوه‌ی توزیع هر یک از مواد را کنترل می‌کنند و  $a$ ،  $b$  و  $l$  به ترتیب شعاع داخلی، شعاع خارجی و طول سیلندر می‌باشند. همچنین  $V_c$  و  $V_m$  درصد حجمی فاز سرامیک و فلز به ترتیب هستند (شکل (۱)).

### ۳- توزیع خواص مواد در مواد گرادانی

از آنجا که اطلاعات دقیقی در مورد شکل، اندازه و نحوه توزیع ذرات در مواد گرادانی وجود ندارد، تعیین خواص در مواد گرادانی بر اساس شکل و اندازه‌ی تقریبی و نحوه‌ی توزیع ذرات صورت می‌پذیرد. بدین منظور چندین مدل میکرومکانیکی برای تعیین خواص این مواد

آمده است [۱۴].

حل تحلیلی مسأله الاستیسیته و ترموالاستیسیته نامتقارن محوری استوانه تو خالی با خواص متغیر در جهت شعاع در سال ۲۰۰۷ توسط توحکوی و چینگ ارائه شده است. مسأله به صورت صفحه‌ای مدل شده است و معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم به صورت مستقل از معادلات تنش - کرنش حل شده و پاسخ‌ها به صورت سری‌های فوریه به دست آمده است [۱۵].

عاصمی و همکاران در سال ۲۰۱۰، تحلیل الاستیکی برای یک مخروط ساخته شده از مواد خواص گرادانی دو بعدی تحت فشار به کمک روش المان محدود انجام داده‌اند. اثر تغییرات خواص در دو بعد و همچنین تأثیر زاویه مخروط در تنش‌های الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است [۱۶]. نجیبی و شجاعی فرد در سال ۲۰۱۶ تحلیل الاستیک در سیلندر ساخته شده از مواد خواص گرادانی دو بعدی را انجام داده‌اند. اثر تغییر خواص در دو جهت روی تنش‌های ایجاد شده در دیواره سیلندر به تفکیک بررسی شده است [۱۷].

همان‌طور که در این قسمت بدان اشاره شد، مطالعات انجام شده روی سیلندره‌ای ساخته شده از مواد خواص گرادانی بیشتر مربوط به بررسی تنش‌های گرمایی می‌باشد و همچنین توزیع خواص مواد در آنها به صورت توابعی توانی یا نمایی در راستای خاصی می‌باشد. تحقیقاتی هم که درباره‌ی سیلندر جداره ضخیم با خواص مواد گرادانی دو بعدی انجام شده‌اند، از قانون ساده مخلوط‌ها برای تخمین توزیع خواص مواد در آنها استفاده شده است.

در این مقاله تنش‌های الاستیک در یک استوانه جداره ضخیم با طول کوتاه که خواص مواد در آن در دو بعد تغییر می‌کند و تحت فشار داخلی یا خارجی قرار دارد مورد بررسی قرار خواهند گرفت. توزیع خواص مواد در سیلندر بر اساس مدل میکرومکانیکی موری - تاناکا طراحی شده است و همچنین در پایان مقادیر بیشینه تنش نرمال مؤثر بر اساس توزیع مواد در دو بعد ترسیم شده است و کمترین مقدار آن برای هر دو نوع بارگذاری ارائه شده است.

### ۲- توزیع درصد حجمی در مواد خواص گرادانی دوبعدی

مواد گرادانی دو بعدی با استفاده از تغییرات تدریجی سه یا چهار نوع ماده مختلف ساخته می‌شوند که معمولاً دو

است که سرامیک و فلز به طور نامشخص در یکدیگر ترکیب شده‌اند و سومی ناحیه‌ای است که فلز نقش ماتریس و سرامیک نقش ذرات درون آن را دارد. ناحیه‌ی گذار که بین ناحیه‌ی اول و سوم قرار می‌گیرد به کمک یک تابع مناسب تعریف می‌شود.

### ۳-۱- تابع گذار

برای اینکه ناپیوستگی بین ناحیه‌ی اول و سوم در مدل موری - تاناکا رفع شود از تابع گذار معادله (۵) استفاده خواهد شد. در نظر بگیرید که  $P_c \neq P_m$  مربوط به خواص مواد سرامیک و فلز در ناحیه‌ی اول و سوم در درصد حجمی  $V_i = V_{ib}$  باشند، بنابراین [۱۹]:

$$P = \gamma(V_i)P_\gamma + (1 - \gamma(V_i))P_\beta \quad (۴)$$

$$\gamma(V_i) = 1 \quad \text{for} \quad V_i < V_{ib} - \delta/2 \quad (\text{الف-۵})$$

$$\gamma(V_i) = F_{\text{trans.}}(V_i) \quad \text{for} \quad V_{ib} - \delta/2 < V_i < V_{ib} + \delta/2 \quad (\text{ب-۵})$$

$$\gamma(V_i) = 0 \quad \text{for} \quad V_i > V_{ib} + \delta/2 \quad (\text{ج-۵})$$

$$F_{\text{trans.}}(V_i) = 2 \left[ \frac{V_i - V_{ib}}{\delta} \right]^3 - 3(V_i - V_{ib}) / (2\delta) + 1/2 \quad (\text{د-۵})$$

در معادله (۴)،  $P$  و  $P_\gamma$  و  $P_\beta$  به ترتیب خواص مؤثر و خاصیت فاز  $\gamma$  و خاصیت مؤثر فاز  $\beta$  می‌باشند.  $\delta$  در معادله (۵) ناحیه گذار و  $F_{\text{trans}}$  تابع گذار در این ناحیه می‌باشد.

### ۳-۲- روش تعیین خواص در مواد گرادیانی دو بعدی

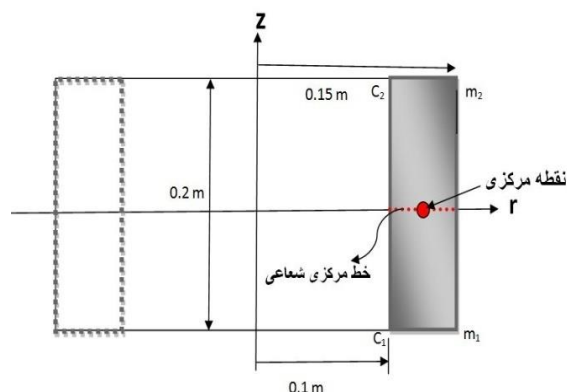
روش تعیین خواص در مواد گرادیانی دو بعدی را می‌توان به کمک مدل موری - تاناکا و تابع گذاری که برای مواد خواص گرادیانی یک بعدی ارائه شده است با عملیات ریاضی مناسب به دست آورد.

برای هر نقطه در دیواره سیلندر خواص گرادیانی دو بعدی این مقاله و درصدهای حجمی  $V_1, V_2, V_3$  و  $V_4$  نشان داده شده در شکل (۱)، خواص مکانیکی به کمک روابط زیر به دست می‌آید:

$$K_f = F_{\text{trans.}}(V_f) \times K_{fc} + (1 - F_{\text{trans.}}(V_f)) \times K_{fm} \quad (\text{الف-۶})$$

$$\frac{K_{fc} - K_c}{K_m - K_c} = \frac{V_m}{1 + (1 - V_m)(3(K_m - K_c)/3K_c - 4G_c)} \quad (\text{ب-۶})$$

ارائه شده است که معروفترین آن مدل موری - تاناکا می‌باشد [۱۷].



شکل ۱: چیدمان مواد تشکیل دهنده دیواره سیلندر ساخته شده از مواد خواص گرادیانی دو بعدی ( $m_2 = \text{SUS304}$ ،  $C_2 = \text{Si}_3\text{N}_4$ ،  $C_1 = \text{ZrO}_2$ ،  $m_1 = \text{Ti-6Al-4V}$ )

از روش موری - تاناکا در مواردی استفاده می‌شود که ماتریس و ذرات از یکدیگر قابل تشخیص باشند. در این مدل فرض بر آن است که ماتریس با اندیس ۱ با استفاده از ذرات کروی شکل با اندیس ۲ تقویت شده است. در معادلات (۳) خواص مکانیک مؤثر مواد را برای مدل موری - تاناکا مشاهده می‌شود [۱۸]:

$$\frac{K_f - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(3(K_2 - K_1)/3K_1 - 4G_1)} \quad (\text{الف-۳})$$

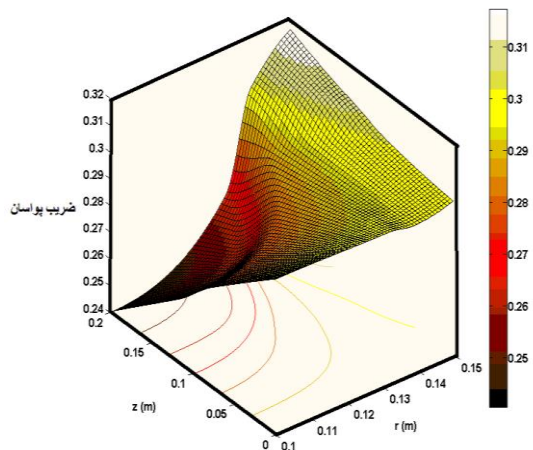
$$\frac{G_f - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(\frac{G_2 - G_1}{G_1 + f_1})} \quad (\text{ب-۳})$$

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} \quad (\text{ج-۳})$$

$$\rho_f = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \quad (\text{د-۳})$$

در معادله (۳)،  $K$  و  $G$  به ترتیب مدول بالک و مدول برشی می‌باشند. همان‌طور که در مطالعات رویترو و همکاران ارائه شده است، مدل موری - تاناکا هنگامی به پاسخ صحیح نزدیک می‌شود که ماتریس ذرات درون آن از یکدیگر قابل تمایز باشند، بنابراین جای ماتریس و ذرات درون آن با حرکت در راستایی خاص از سمت سرامیکی به سمت فلزی با یکدیگر عوض می‌شود. بنابراین دیواره سیلندر متقارنی که در این مقاله مورد بررسی قرار خواهد گرفت به سه منطقه تقسیم خواهد شد. اولی ناحیه‌ای است که سرامیک نقش ماتریس را دارد و فلز نقش ذرات، دومی ناحیه‌ی گذار

که خواص مواد را به هر المان در نقاط گوس آن اعمال می‌کنند و دیگری تقسیم‌بندی هندسه به لایه‌های زیاد و در نظر گرفتن خواص مواد برای هر لایه می‌باشد که روش دوم دقت کافی برای تحلیل مسایل مخصوصاً مسایل غیرخطی و مواد خواص گرادیانی دو بعدی را ندارد. روش المان محدود گرادیانی که در آن خواص متوسط مواد توسط انتگرال گیری در حجم هر المان و اعمال آن در ماتریس سختی المان صورت می‌گیرد توسط کیم و پائینو ارائه شده است [۲۰].



شکل ۲: توزیع ضریب پواسان در دیواره سیلندر با استفاده از مدل جدید ارائه شده برای  $n_r = 2$  و  $n_z = 1$

#### ۴-۱- معادلات الاستیسیته حاکم بر مسأله

معادلات تعادل در حالت استاتیکی و بدون نیروهای حجمی به شکل معادله (۷) می‌باشد:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad i, j = r, z \quad (7)$$

معادلات مربوط به قانون هوک یا روابط تنش - کرنش نیز به صورت اندیسی به ترتیب زیر است:

$$\sigma_{ij} = \lambda(r, z) \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu(r, z) \varepsilon_{ij} \quad i, j = r, z \quad (8)$$

این رابطه بدون در نظر گرفتن کرنش‌های دمایی می‌باشد. در این رابطه  $\varepsilon_{ij}$ ،  $\delta_{ij}$  به ترتیب تانسور کرنش و تابع دلتای کرونکر و  $\lambda$  و  $\mu$  نیز ثوابت لامه<sup>۱</sup> می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu(r, z) = G(r, z) = \frac{E(r, z)}{2(1 + \nu(r, z))} \quad (9\text{-الف})$$

$$\lambda(r, z) = \frac{\nu(r, z)E(r, z)}{(1 + \nu(r, z))(1 - 2\nu(r, z))} \quad (9\text{-ب})$$

$$\frac{K_{fm} - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(3(K_c - K_m)/3K_m - 4G_m)} \quad (6\text{-ج})$$

$$K_c = F_{trans.}(V_c) \times K_{c1} + (1 - F_{trans.}(V_c)) \times K_{c2} \quad (6\text{-د})$$

$$K_{c1} = \frac{V_2(K_2 - K_1)}{1 + (1 - V_2)(3(K_2 - K_1)/3K_1 - 4G_1)} + K_1 \quad (6\text{-ه})$$

$$K_{c2} = \frac{V_1(K_1 - K_2)}{1 + (1 - V_1)\left(\frac{3(K_1 - K_2)}{3K_2} - 4G_2\right)} + K_2 \quad (6\text{-و})$$

$$K_m = F_{trans.}(V_m) \times K_{m1} + (1 - F_{trans.}(V_m)) \times K_{m2} \quad (6\text{-ز})$$

$$K_{m1} = \frac{V_4(K_4 - K_3)}{1 + (1 - V_4)\left(\frac{3(K_4 - K_3)}{3K_3} - 4G_3\right)} + K_3 \quad (6\text{-د})$$

$$K_{m2} = \frac{V_3(K_3 - K_4)}{1 + (1 - V_3)\left(\frac{3(K_3 - K_4)}{3K_4} - 4G_4\right)} + K_4 \quad (6\text{-ر})$$

این روابط تعمیم یافته‌ی روابط (۳) هستند که برای مواد خواص گرادیانی با تغییرات خواص در دو بعد می‌باشند. فرایندی که برای تعیین مدول بالک (Bulk Modulus) مؤثر در دیواره سیلندر ارائه شده است را همچنین می‌توان برای تعیین مدول برشی (Shear Modulus) مؤثر در دیواره‌ی سیلندر اعمال کرد.

برخلاف قانون ساده‌ی مخلوط‌ها، خواص مواد برای مدل ارائه شده در بالا به صورت شدید به مکان و همچنین به یکدیگر وابسته هستند. اندیس "f" نشان‌دهنده‌ی خاصیت مؤثر در تمامی دیواره‌ی سیلندر می‌باشد.

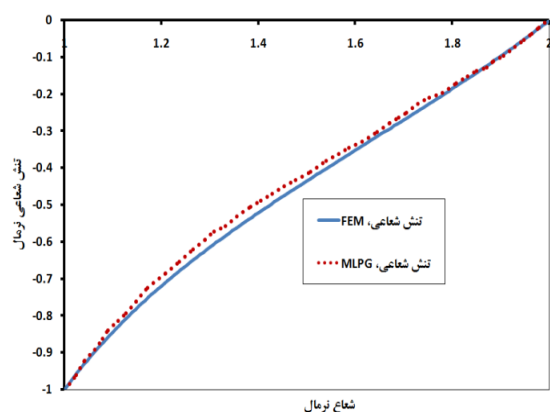
در شکل (۲)، توزیع ضریب پواسان بر اساس مدل ماده‌ی جدید ارائه شده در این مقاله برای  $n_r$  برابر ۲ و  $n_z$  برابر ۱ نشان داده شده است.

#### ۴-۲ مدل‌سازی المان محدود

برای مدل‌سازی المان محدود مواد خواص گرادیانی، حتی برای هندسه‌های کوچک مخصوصاً در مسایل غیرخطی باید از مش ریز استفاده شود. عموماً برای اعمال خواص مواد در مواد گرادیانی از دو روش استفاده می‌شود. اولی این است

<sup>1</sup> Lamé Constants

دیواره خارجی  $m_1 = Ti - 6Al - 4V$  و  $m_2 = SUS304$  می‌باشند.



شکل ۳: مقایسه تنش شعاعی نرمال بین روش المان محدود و روش بدون مش پتروف - گلرکین برای  $n=2$

## ۵- صحنه‌گذاری

به دلیل اینکه تحقیق مشابه تقریباً در هیچ یک از متون علمی انجام نشده است، کد المان محدود برای این مسأله ساده شد تا با مسأله‌ای که در آن یک سیلندر جداره ضخیم تحت فشار داخلی که در آن از مواد خواص گرادیانی یک بعدی ساخته شده است و به روش بدون مش پتروف-گلرکین (MLPG) آنالیز تنش شده است، مقایسه گردد [۲۱]. در این مقایسه سیلندر جداره ضخیم دارای طول بینهایت و شعاع داخلی  $r_a = 5$  میلی‌متر و شعاع خارجی  $r_b = 10$  میلی‌متر می‌باشد. به دلیل تقارن نسبت به محورهای افقی و عمودی، فقط یک چهارم سیلندر با  $65^\circ$  المان ۱۶ نودی که دارای تابع شکل لاگرانژ می‌باشند، مش-بندی شده است. مؤلفه‌های تنش نسبت به فشار داخلی یکه‌سازی شده‌اند و مسأله به صورت کرنش صفحه‌ای تحلیل شده است. مواد تشکیل دهنده‌ی سیلندر آلومینیوم (Al) و کربید سیلیسیوم (SiC) می‌باشند که خواص مکانیکی آنها در مرجع [۲۱] ذکر شده‌اند و توزیع حجمی سرامیک در راستای شعاعی به صورت تابع زیر نشان داده شده است:

$$V_c = V_c^i + (V_c^o - V_c^i) \left( \frac{r - r_a}{r_b - r_a} \right)^n \quad (12)$$

در این رابطه  $V_c^o$  و  $V_c^i$  به ترتیب مربوط به توزیع حجمی فاز سرامیک در خارج و داخل سیلندر و  $n$  توان تابع توزیع حجمی توانی می‌باشد و برای تعیین خواص مکانیکی مؤثر در این سیلندر از مدل موری - تاناکا استفاده شده است. در شکل (۳) مقایسه‌ای بین تنش‌های یکه شده‌ی شعاعی بین

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (9-ج)$$

که  $E$  و  $\nu$  به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون می‌باشند و  $G$  نیز مدول برشی می‌باشد. روابط کرنش - جابجایی خطی نیز عبارتند از:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

که در آن جابجایی در راستای  $u$  و  $\nu$  است. برای مدل‌سازی المان محدود گرادیانی در این مقاله، فرم ضعیف معادلات تعادل متقارن محوری در حالت الاستیک به روش گلرکین به دست آمده است. روابط کرنش - جابجایی خطی در معادلات تنش - کرنش اعمال شده و خواص مواد به روش جدید ارائه شده در این مقاله، در ماتریس سختی هر المان اعمال شده است. با در نظر گرفتن جابجایی فرضی گره‌های هر المان به عنوان درجات آزادی و مونتاز کردن ماتریس سختی و بردار بارگذاری المان‌ها می‌توان ماتریس کل سازه را به دست آورد و به روش عددی تحلیل نمود.

سیلندر مورد مطالعه در این مقاله دارای شعاع داخلی  $a = 0.1$  و شعاع خارجی  $b = 0.15$  و طول  $l = 0.2$  می‌باشد. برای مش‌بندی این سیلندر از ۴۰۰ المان متقارن محوری مستطیلی که در اثر تقسیم‌بندی دیواره‌ی سیلندر در جهت محوری به ۱۰۰ المان و در جهت شعاعی به ۴۰ المان به وجود آمده‌اند.

شرایط مرزی به این صورت می‌باشد که از جابجایی تمامی گره‌های سطح بالایی در جهت محوری و از جابجایی نودهای پایینی در جهت شعاعی دیواره‌ی سیلندر جلوگیری عمل آمده است. همچنین سطح خارجی سیلندر به صورت آزاد می‌باشد و دیواره‌ی داخلی سیلندر تحت فشار بر اساس معادلات (۱۱) قرار می‌گیرد. وقتی که سطح خارجی سیلندر تحت فشار قرار می‌گیرد دیواره‌ی داخلی سیلندر به صورت آزاد خواهد بود:

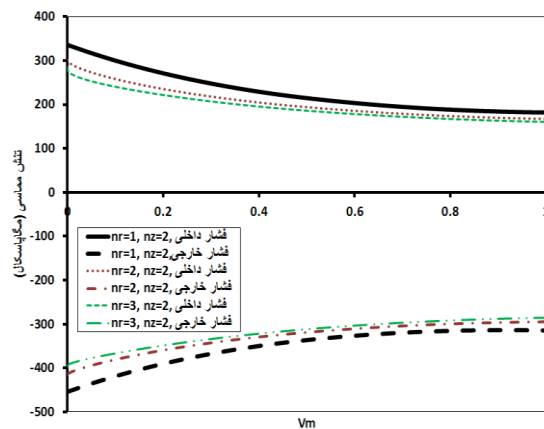
$$\begin{aligned} P_o(b, z) &= 0, \\ P_i(a, z) &= 150 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \text{ MPa} \quad (11-الف) \\ P_o(b, z) &= 150 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \text{ MPa}, \\ P_i(a, z) &= 0 \quad (11-ب) \end{aligned}$$

سرامیک‌های تشکیل دهنده‌ی دیواره داخلی سیلندر  $C_1 = ZrO_2$  و  $C_2 = Si_3N_4$  و فلزات تشکیل دهنده‌ی

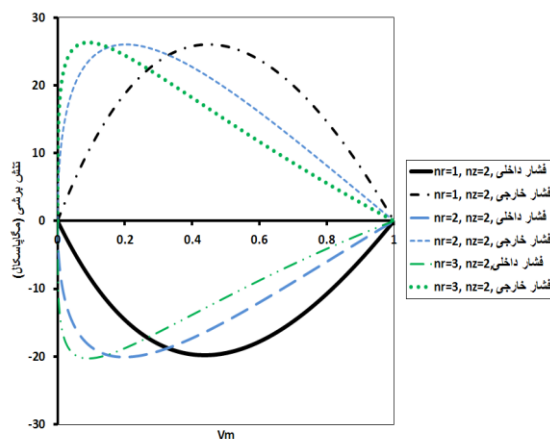
بارگذاری افزایش می‌یابد.

منحنی تنش شعاعی در اثر فشار داخلی با منحنی تنش شعاعی در اثر فشار خارجی برای  $n_r = 1$  و  $n_z = 2$  وقتی که توزیع حجمی فاز فلز مقدار  $0.36$  را به خود اختصاص دهد برخورد می‌کند. این موضوع برای تمامی منحنی‌ها صادق بوده و مقدار تنش شعاعی در نقطه‌ی برخورد برای تمامی منحنی‌ها مقدار  $73/3$  مگا پاسکال می‌باشد.

همان‌طور که در شکل (۵) نشان داده شده است، تنش محوری نسبت به توزیع حجمی فاز فلزی در راستای خط افقی شعاعی مقدار صفر را در  $V_m = 0.11, 0.23, 0.49$  برای  $n_r = 1, 2, 3$  به ترتیب ساخناده کرده است.



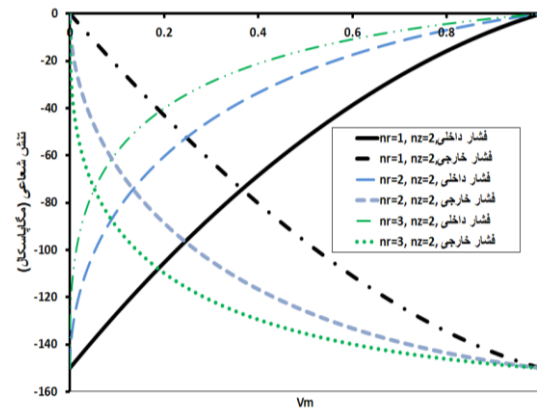
شکل ۵: تنش‌های مماسی بر اساس توزیع درصد حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = n_z = 2$  در اثر بارهای فشاری داخلی و خارجی



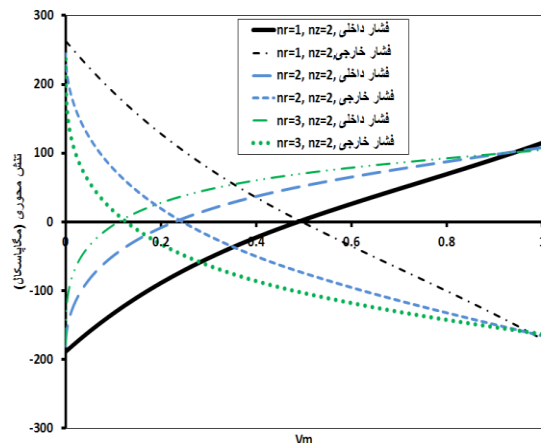
شکل ۶: تنش‌های برشی بر اساس توزیع درصد حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = n_z = 2$  در اثر بارهای فشاری داخلی و خارجی

با توجه به شکل (۶) با افزایش مقدار  $n_r$  و  $V_m$  تنش مماسی برای هر دو حالت بار گذاری به مقدار کم کاهش

روش‌های المان محدود و بدون مش پتروف - گلرکین در راستای شعاعی برای  $n$  برابر ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل می‌بینید تنش شعاعی به دست آمده از روش المان محدود بسیار نزدیک به تنش شعاعی به دست آمده از روش بدون مش پتروف - گلرکین می‌باشد.



شکل ۷: تنش‌های شعاعی بر اساس توزیع درصد حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = n_z = 2$  در اثر بارهای فشاری داخلی و خارجی



شکل ۸: تنش‌های محوری بر اساس توزیع درصد حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = n_z = 2$  در اثر بارهای فشاری داخلی و خارجی

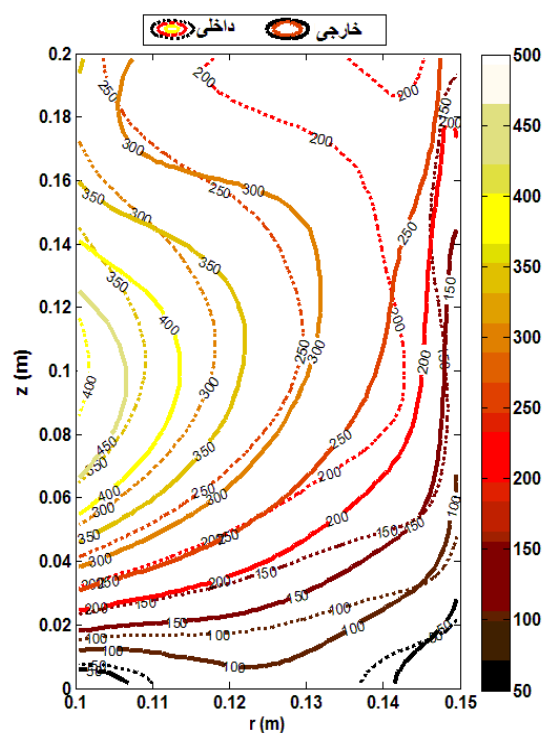
## ۶- نتایج

شکل‌های (۴) تا (۷) به ترتیب تنش‌های شعاعی، محوری، مماسی و برشی را نسبت به توزیع حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = 2$  و  $n_z = 2$  در راستای خط مرکزی شعاعی (HCL) نشان می‌دهند (شکل (۱)).

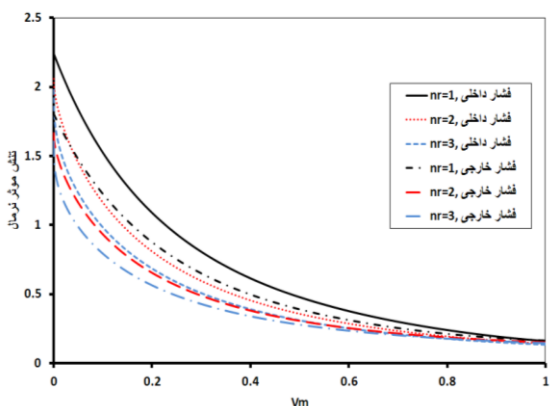
همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده شده است تنش شعاعی با افزایش مقادیر  $n_r$  و  $V_m$  کاهش می‌یابد، اما تنش شعاعی مربوط به فشار خارجی به دلیل تعویض جهت

یافته است.

شکل (۸) مقایسه‌ای از توزیع تنش‌های مؤثر در دیواره سیلندر برای  $n_r = n_z = 2$  در حالت‌های فشار داخلی یا خارجی را نشان می‌دهد. مشخص است که تنش مؤثر مربوط به فشار خارجی بیشتر از تنش مؤثر در حالت فشار داخلی می‌باشد.



شکل ۸: توزیع تنش‌های مؤثر در دیواره سیلندر برای  $n_r = n_z = 2$  در حالت فشارهای داخلی و خارجی



شکل ۹: تنش مؤثر نرمال روی خط مرکزی شعاعی نسبت به توزیع درصد حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = n_z = 2$  در حالت فشار داخلی و خارجی

برای اینکه رفتار سیلندر در برابر بارهای اعمالی بهتر بررسی شود و دیگر اینکه توانایی این سازه برای تحمل فشارهای داخلی و خارجی اعمالی آزموده شود، تنش مؤثر نرمال که همان نسبت تنش مؤثر به تنش تسلیم متناظر می‌باشد، برای مقادیر مختلف توزیع حجمی مواد در دیواره سیلندر مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مشخص است که مقدار تنش مؤثر نرمال کمتر از ۱ محدوده‌ی ایمن را برای طراحی نشان می‌دهند.

شکل (۹) تنش مؤثر نرمال را نسبت به توزیع حجمی فاز فلزی روی خط شعاعی مرکزی دیواره سیلندر با توجه به بارگذاری‌های مختلف نشان می‌دهد. در این شکل مقدار  $n_r$  تغییر می‌کند و  $n_z = 2$  در نظر گرفته شده است. افزایش توزیع حجمی فاز فلزی موجب کاهش تنش مؤثر نرمال می‌شود، اما افزایش مقدار  $n_r$  موجب افزایش تنش مؤثر نرمال در هر دو حالت بارگذاری می‌شود. بیشترین مقدار تنش نرمال برای هر دو حالت بارگذاری در سطح داخلی دیواره‌ی سیلندر اتفاق می‌افتد که در حالت فشار خارجی بیشتر از حالت فشار داخلی می‌باشد.

اکنون اثر تغییر مقدار  $n_z$  روی تنش مؤثر نرمال در دیواره-ی سیلندر بررسی می‌شود. شکل (۱۰) تنش مؤثر نرمال را نسبت به  $V_m$  در راستای خط افقی شعاع برای

برای منحنی‌های تنش برشی همان طور که در شکل (۷) نشان داده شده است، با افزایش مقدار  $n_r$ ، ماکزیمم تنش برشی زودتر اتفاق می‌افتد. همچنین مقادیر ماکزیمم برای هر یک از منحنی‌های مربوط به  $n_r$ ‌های متناظر در  $V_m$  های برابر با یکدیگر اتفاق می‌افتد.

تنش مؤثر  $(\sigma_{eff})$  را می‌توان با کمک تنش‌های اصلی و تئوری انرژی واپیچشی یا همان تئوری ون مایرز (Von - Mises) به دست آورد. این تنش را می‌توان با تنش تسلیم در یک سازه مقایسه کرد که معیاری برای تسلیم مواد در این سازه می‌باشد. تنش مؤثر یا همان تنش مایرز به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آید که در این رابطه  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  تنش‌های اصلی می‌باشند.

$$\sigma_{eff} = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{1/2} \quad (۱۳)$$

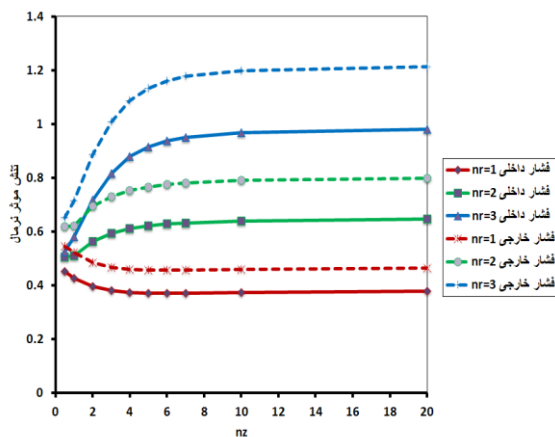
تنش تسلیم برای دیواره استوانه از رابطه زیر پیروی می‌کند که تنش تسلیم برای هر ماده  $(\sigma_{yi})$  ها از مرجع [۲۲] استخراج شده‌اند.

$$\sigma_{yf} = \sigma_{y1}V_1 + \sigma_{y2}V_2 + \sigma_{y3}V_3 + \sigma_{y4}V_4 \quad (۱۴)$$

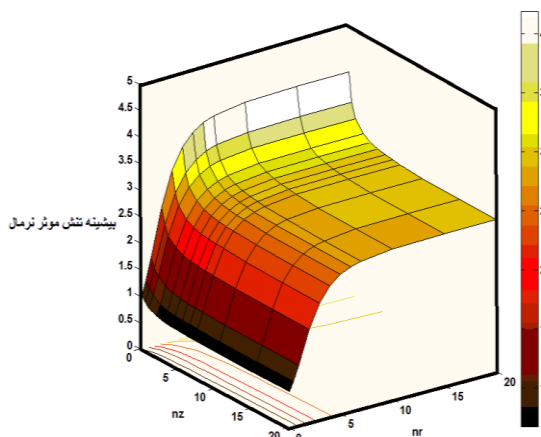


دیواره استوانه نسبت به  $n_z = 1, 2, 3$  و تحت فشار داخلی و خارجی با یکدیگر مقایسه شده است. تنش‌های مؤثر نرمال در اثر فشار داخلی کمتر از تنش‌های مؤثر نرمال در اثر فشار خارجی می‌باشند که این اختلاف در حالت بیشینه‌ی خود برای هر کدام از منحنی‌ها حدود ۲۴٪ می‌باشد.

برای بهینه‌سازی توزیع مواد در مواد خواص گرادیانی دو بعدی در دیواره‌ی سیلندر باید بیشینه‌ی تنش مؤثر نرمال که همان نسبت توزیع تنش مایز به توزیع تنش تسلیم در دیواره‌ی سیلندر است باید به کمترین مقدار خود برسد.



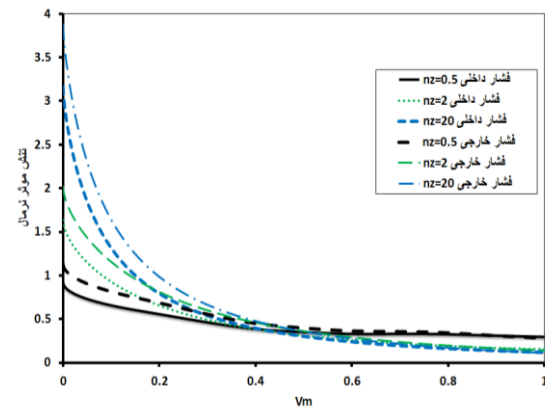
شکل ۱۲: تنش مؤثر نرمال روی نقطه مرکزی دیواره سیلندر نسبت به  $n_z$  برای مقادیر مختلف  $n_r$  در حالت فشار داخلی و خارجی



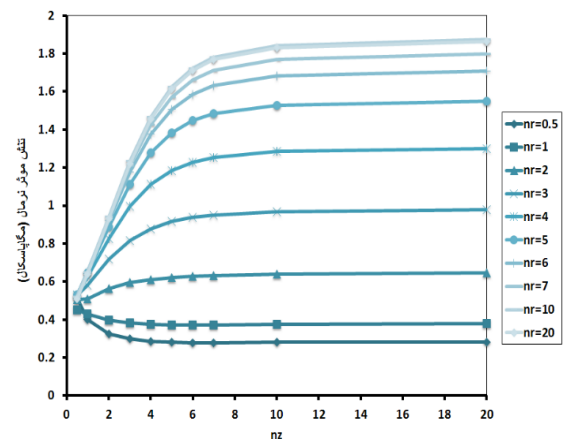
شکل ۱۳: مقادیر بیشینه تنش مؤثر نرمال در دیواره سیلندر برای اساس توزیع خواص مواد در حالت فشار داخلی

متغیرهای طراحی همان ضرایب توانی توزیع درصد حجمی در راستاهای شعاعی و محوری ( $n_r$  و  $n_z$ ) می‌باشند و هدف مینیمم‌سازی مقادیر بیشینه‌ی تنش‌های مؤثر نرمال متناظر با مقادیر مختلف  $n_r$  و  $n_z$  می‌باشد. بدین منظور

$n_r = 0.5, 2, 20$  و  $n_z = 2$  را در حالت‌های فشار داخلی و خارجی وارده بر استوانه را با یکدیگر مقایسه می‌کند. این شکل نشان می‌دهد که برای  $V_m$  های کمتر از ۰/۴۲ تنش مؤثر نرمال حاصل از فشار خارجی ۲۳٪ بیشتر از تنش مؤثر نرمال متناظر با فشار داخلی می‌باشد. اما برای  $V_m$  های بیشتر از ۰/۴۲ تنش مؤثر نرمال در راستای شعاعی برای هر دو حالت بارگذاری اختلاف چندانی با یکدیگر نخواهند داشت.



شکل ۱۰: تنش مؤثر نرمال روی خط مرکزی شعاعی نسبت به توزیع درصد حجمی فاز فلزی برای مقادیر مختلف  $n_r = n_z = 2$  در حالت فشار داخلی و خارجی



شکل ۱۱: تنش مؤثر نرمال روی نقطه مرکزی دیواره سیلندر نسبت به  $n_z$  برای مقادیر مختلف  $n_r$  در حالت فشار داخلی

در شکل (۱۱) تنش مؤثر نرمال در نقطه‌ی مرکزی دیواره استوانه (CP) را نسبت به مقادیر مختلف  $n_z$  نشان داده شده است. برای یک مقدار خاص  $n_r$ ، افزایش  $n_r$  موجب افزایش تنش مؤثر نرمال می‌شود. برای مقادیر  $n_z$  کوچک‌تر از ۲ و  $n_r$  کوچک‌تر از ۳ تنش مؤثر نرمال از یک کوچک‌تر خواهد بود.

در شکل (۱۲) مقادیر تنش مؤثر نرمال را در نقطه مرکزی

سیلندری که دارای بیشترین مقدار درصد حجمی سرامیک دوم باشد، در برابر فشار خارجی مقاومت بیشتری خواهد داشت اما با این تفاوت که مقدار تنش مؤثر نرمال متناظر با  $n_r = 20$  و  $n_z = 0.1$ ، می‌باشد در صورتی که برای فشار داخلی کمترین مقدار تنش مؤثر نرمال  $0.67$  می‌باشد.

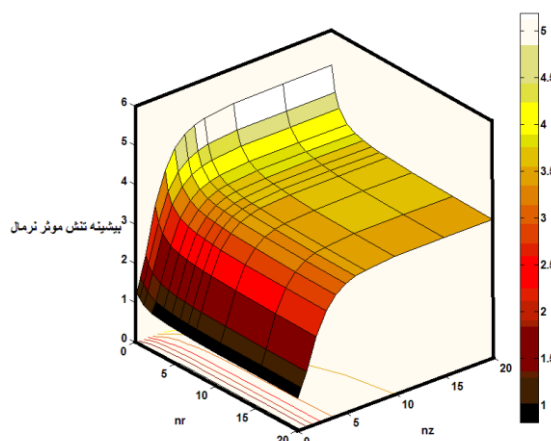
#### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله تنش‌های الاستیک ناشی از فشار داخلی یا خارجی در یک سیلندر جداره ضخیم کوتاه ساخته شده از مواد خواص گرادیانی دو بعدی بررسی شده است و خواص مواد بر اساس مدل میکرومکانیکی موری - تاناکا توسعه یافته است. برای تحلیل مسأله از روش المان محدود و المان‌های لاگرانژی درجه سوم، استفاده شده است. برای اعتبارسنجی نتایج، روش به کار رفته در این تحقیق با نتایج روش بدون مش پتروف - گلرکین، در یک مسأله‌ی نمونه مقایسه شده است. با توجه به نتایج، تنش‌های حاصل از بارگذاری فشار خارجی از تنش‌های مربوطه در اثر بارگذاری فشار داخلی بیشتر هستند.

با تغییر  $n_z$ ، تنش مؤثر نرمال در راستای خط مرکزی شعاعی بر اساس توزیع درصد حجمی فاز فلزی، تغییرات چشم‌گیری دارد. همچنین این مقدار در نقطه‌ی مرکزی دیواره استوانه با افزایش مقادیر  $n_r$  افزایش پیدا می‌کند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که کمترین مقدار برای بیشینه‌ی تنش مؤثر نرمال در هر دو حالت فشار داخلی و خارجی مربوط به  $n_r = 20$  و  $n_z = 0.1$  می‌باشد که نشان دهنده‌ی این است که دیواره‌ی سیلندر ساخته شده از سرامیک دوم (سیلیکون نیتراید) دارای کمترین مقدار تنش مؤثر نرمال می‌باشد.

مقادیر پارامترهای  $n_r$  و  $n_z$  از صفر تا بینهایت متغیر در نظر گرفته شده‌اند. در اینجا برای اینکه ماهیت مواد خواص گرادیانی دو بعدی حفظ شود  $n_r = n_z = 0$  با همچنین  $n_r = n_z = 0.1$  تخمین زده شده است. همچنین  $n_r = n_z = \infty$  با  $n_r = n_z = 20$  تخمین زده شده است زیرا اعداد بزرگ برای ضرایب توانی تأثیر زیادی در تغییر خواص مواد در دیواره سیلندر نخواهند داشت [۲۳].

در این قسمت سطح مقادیر بیشینه تنش مؤثر نرمال در دیواره سیلندر برای هر کدام از بارگذاری‌ها نسبت به مقادیر مختلف  $n_r$  و  $n_z$  ترسیم شده است. ابتدا این سطح برای فشار داخلی و شکل (۱۳) نشان داده شده است. وقتی که  $n_z$  ثابت باشد با افزایش  $n_r$  تنش مؤثر نرمال کاهش می‌یابد و  $n_r = 20$  کمترین مقدار تنش مؤثر نرمال را برای هر کدام از مقادیر  $n_z$  دارد. این بدین معنی است که اگر دیواره سیلندر بیشتر شامل مواد فاز سرامیکی باشد، تنش مؤثر نرمال کمتری خواهد داشت. کمترین مقدار تنش مؤثر نرمال برای شکل (۱۳) هنگامی حاصل می‌شود که  $n_r = 20$  و  $n_z = 0.1$  باشد. به عبارت دیگر وقتی که دیواره سیلندر بیشتر از سرامیک دوم ( $Si_3N_4$ ) ساخته شود، قابلیت تحمل فشار داخلی بیشتری دارد. به این نکته باید توجه شود که برای مقادیر  $n_z$  کمتر از  $0.5$  در تمامی  $n_r$  ها، تنش مؤثر نرمال از یک کمتر خواهد بود.



شکل ۱۴: مقادیر بیشینه تنش مؤثر نرمال در دیواره سیلندر برای اساس توزیع خواص مواد در حالت فشار خارجی

کانتور مقادیر بیشینه تنش مؤثر نرمال بر اساس مقادیر مختلف  $n_r$  و  $n_z$  برای فشار خارجی در شکل (۱۴) ترسیم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود کمترین مقدار بیشینه تنش مؤثر نرمال مربوط به  $n_r = 20$  و  $n_z = 0.1$  می‌باشد. یعنی مانند حالت بارگذاری فشار داخلی دیواره‌ی

## ۸- مراجع

- [1] J.N. Reddy, C.D. Chin, "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", *J. Therm. Stresses*, Vol. 21, Issue 6, 1998, pp. 593–626.
- [2] N. Tutuncu, M. Ozturk, "Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 32, Issue 8, 2001, pp. 683–686.
- [3] M. Jabbari, S. Sohrabpour, M.R. Eslami, "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, Issue 7, 2002, pp. 493–497.
- [4] M. Jabbari, S. Sohrabpour, M.R. Eslami, "General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Nonaxisymmetric Steady-State Loads", *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, Vol. 70, No. 1, 2003, pp. 111–118.
- [5] B. Chen, L. Tong, "Thermomechanically Coupled Sensitivity Analysis and Design Optimization of Functionally Graded Materials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, Issues 18–20, 2005, pp. 1891–1911.
- [6] Z.S. Shao, "Mechanical and Thermal Stresses of a Functionally Graded Circular Hollow Cylinder with Finite Length", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, Issue 3, 2005, pp. 155–163.
- [7] H.K. Ching, S.C. Yen, "Meshless Local Petrov- Galerkin Analysis for 2D Functionally Graded Elastic Solids under Mechanical and Thermal loads", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 36, Issue 3, 2005, pp. 223–240.
- [8] A. Oral, G. Anlas, "Effects of Radially Varying Moduli on Stress Distribution of Nonhomogeneous Anisotropic Cylindrical Bodies", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, Issue 20, 2005, pp. 5568–5588.
- [9] Zh. Shi, T. Zhang, H. Xiang, "Exact Solutions of Heterogeneous Elastic Hollow Cylinders", *Composite Structures*, Vol. 79, Issue 1, 2007, pp.140–147.
- [10] Z.S. Shao, T.J. Wang, "Three-Dimensional Solutions for the Stress Fields in Functionally Graded Cylindrical Panel with Finite Length and Subjected to Thermal/Mechanical Loads", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, Issue 13, 2006, pp. 3856–3874.
- [11] H. Xiang, Zh. Shi, T. Zhang, "Elastic Analyses of Heterogeneous Hollow Cylinders", *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, Issue 5, 2006, pp. 681–691.
- [12] N. Tutuncu, "Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties", *Engineering Structures*, Vol. 29, Issue 9, September 2007, pp. 2032–2035.
- [13] T. Akis, A.N. Eraslan, "The Stress Response and Onset of Yield of Rotating FGM Hollow Shafts", *Acta Mechanica*, Vol. 187, Issues 1–4, pp. 169–187, (2006).
- [14] A.N. Eraslan, T. Akis, "On the Plane Strain and Plane Stress Solutions of Functionally Graded Rotating Solid Shaft and Solid Disk Problems", *Acta Mechanica*, Vol. 181, Issues 1–2, 2006, pp. 43–63.
- [15] Tokovyy, Yu. V., Ma, Ch., Ch., "Analysis of 2D Non-Axisymmetric Elasticity and Thermoelasticity Problems for Radially Inhomogeneous Hollow Cylinders", *Journal of Engineering Mathematics, Thermo-mechanics of Non-Homogeneous Structures*, Vol. 61, Issues 2–4, 2008, pp. 171–184.
- [16] Asemi, K., Salehi, M., Akhlaghi, M., "Elastic Solution of a Two-Dimensional Functionally Graded Thick Truncated Cone with Finite Length under Hydrostatic Combined Loads", *Acta Mechanica*, Vol 217, Issues 1–2, 2010, pp. 119–134.
- [17] A. Najibi, M.H. Shojaeefard, "Elastic Mechanical Stress Analysis in a 2D-FGM Thick Finite Length Hollow Cylinder with Newly Developed Material Model", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol 29, Issue 2, 2016, pp.178–191.
- [18] T. Mori, T. Tanaka, "Average Stresses in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *Acta Metallurgica*, Vol. 21, Issue 5, 1973, pp. 571–574.
- [19] T. Reiter, G.J. Dvorak, V. Tvergaard, "Micromechanical Models for Graded Composite Materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, Issue 8, 1997, pp. 1281–1302.
- [20] J.H. Kim, G.H. Paulino, "Iso-parametric Graded Finite Elements for Non-Homogeneous Isotropic and Orthotropic Materials", *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 4, 2002, pp. 502–514.
- [21] H.K. Ching, S.C. Yen, "Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2D functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 36, Issue 3, 2005, pp. 223–240.
- HMSO, London, pp. 1-8, (1996).
- [22] M. Nemat-Alla, Kh.I.E. Ahmed, I. Hassab-Allah, "Elastic-Plastic Analysis of Two-Dimensional Functionally Graded Materials under Thermal Loading", *International Journal of Solids & Structures*,

Vol. 46, Issues 14–15, 2009, pp. 2774–2786.

[23] N. Noda, Thermal Stresses in Functionally Graded Materials, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 22, Issues 4–5, 1999, pp. 477–512.