

مدل‌سازی مسئله انتقال حرارت یک‌بعدی معکوس با استفاده از روش نقطه‌گذاری به همراه موجک‌های هار

علی جهانگیری^{۱*}، سمیرا محمدی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۱۰ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۲۲	در این مقاله، یک روش عددی که ترکیبی از روش نقطه‌گذاری به همراه موجک هار و روش پایدارسازی تیخونوف است، برای حل مسئله انتقال حرارت معکوس یک‌بعدی استفاده شده است. به منظور تطبیق مسئله انتقال حرارت با واقعیت، داده‌های ورودی به صورت داده‌های نویزدار با خطای بین ۱ الی ۵ درصد مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین در این پژوهش از توابع هار علاوه بر تخمین توابع مجهول، به منظور نویزگیری خروجی نیز استفاده شده است. از نتایج به دست آمده، دو مزیت اصلی روش مکرر اثبات شده است؛ اول دقت این روش در تخمین شروط مرزی مجهول و دوم سرعت پردازش به علت عدم نیاز توابع موجکی به نقطه‌گذاری با فواصل کم. این مطلب نشان می‌دهد که این روش سرعت بالایی نیز دارد. با توجه به نتایج کسب شده می‌توان اذعان کرد روش حاضر با اعمال خطای کوچک در داده‌های ورودی، پایداری خود را حفظ کرده است.
واژگان کلیدی: مسئله معکوس بدخیم، روش هار، روش پایدارسازی تیخونوف، داده‌های ورودی دارای نویز.	

۱- مقدمه

مسئله معکوس در بسیاری از علوم و فناوری‌های علمی دیده می‌شود؛ از این رو، تجزیه و تحلیل، پیاده‌سازی و سنجش الگوریتم‌های حل مسائل معکوس نیز از اهمیت زیادی برخوردار است. از لحاظ ریاضی، مسائل معکوس به مسائل بدخیم (Ill-Posed) معروف‌اند؛ زیرا خطاهای کوچک در داده‌های اندازه‌گیری شده می‌تواند منجر به انحرافات بزرگ در مقادیر تخمینی شود. در واقع این روش‌ها نیازمندی کلی به وجود، یکتایی و ثبات را در تغییرات کوچک داده‌های ورودی برآورده نمی‌کنند. برای غلبه بر این مشکلات، روش‌های مختلفی برای حل مسائل معکوس ارائه شده است [۱-۱۰] که از این میان می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: روش پایدارسازی تیخونوف^۳، روش پایدارسازی تکراری^۴، روش بهبودسازی^۵، روش تابع پایه^۶، روش دیفرانسیل

نیمه‌محدود^۷ و روش تعیین مشخصات تابع^۸. ژو و همکاران [۱۰] مسئله هدایت حرارتی معکوس در یک قطعه کامپوزیتی یک‌بعدی با واکنش شیمیایی پیرولیز وابسته به سرعت و آثار جریانی خروجی گاز را با استفاده از رویکرد تصحیح تکراری بررسی کردند. آن‌ها ویژگی‌های حرارتی کامپوزیت‌های وابسته به دما را نیز در نظر گرفتند. هونگا و همکاران [۵] روش پایدارسازی تکراری بر اساس الگوریتم تکراری را در این مطالعه برای تعیین هم‌زمان دما و درجه حرارت نامعلوم غلظت و نرخ تولید حرارت و تولید جرم برای یک سیال در واکنش شیمیایی با استفاده از اندازه‌گیری داخلی دما و غلظت مورد استفاده قرار دادند. توابع هار^۹ [۱۱]، یکی از اولین‌هایی است که در حال حاضر به‌عنوان تبدیل فشرده، دوتایی و موجک شناخته شده است. تابع هار که یک جفت پالس مستطیلی منفرد است، ساده‌ترین و

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: a_jahangiri@sbu.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی

۲. دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی

³ Tikhonov regularization

⁴ Iterative regularization

⁵ Mollification

⁶ Base function Method

⁷ Semi Finite Difference Method

⁸ Function Specification Method

⁹ Haar

در انتهای صفحه $x=L$ ، تحت شار حرارتی $q(L,t)$ قرار گرفته است. این مسئله توسط مجموعه معادلات زیر شرح داده می شود [۱۵]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{in } 0 < x < L, \text{ for } t > 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0, \text{ for } t > 0 \quad (۲)$$

$$-k \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = q(t) \quad \text{at } x = L, \text{ for } t > 0 \quad (۳)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{for } t = 0, 0 < x < L \quad (۴)$$

α : نفوذپذیری حرارتی

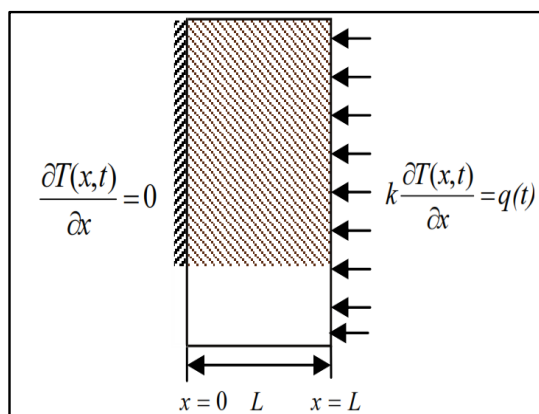
u : دما

x : مختصات فضایی

K : رسانایی گرمایی

L : ضخامت صفحه

q : شار حرارتی



شکل ۱: شماتیک صفحه یک بعدی با شرایط مرزی [۱۶]

برای موردی که شرط مرزی در $x=L$ ، یعنی شرط اولیه $u_0(x)$ ، خواص حرارتی فیزیکی α و k همه مشخص شده است، مشکل ارائه شده توسط معادله (۱) مربوط به تعیین توزیع دما $u(x,y)$ در منطقه ای انتخابی از جسم جامد به عنوان تابع زمان و مکان است.

۲-۲- مسئله معکوس

مسئله معکوس مربوط به تعیین تابع نامعلوم $q(t)$ در سطح $x=L$ است. برای تعیین شار حرارتی $q(t)$ دمای اندازه گیری شده $T(x_{\text{meas}}, t_i) = T_i^*$ در نقطه دلخواه x_{meas} در زمان های مختلف $t_i (i=1, 2, \dots, I)$ در فاصله زمانی مشخص $0 < t \leq t_f$ داده شده است. فرمول ریاضی مسئله معکوس در زیر بیان شده است:

قدیمی ترین موجک رسم شده با پشتیبانی فشرده است. استفاده توابع هار در بسیاری از کاربردها از جمله کدگذاری تصویر، استخراج مرز و طراحی منطقی دو تایی (باینری) مورد توجه است. به تازگی، موجک هار به عنوان یک ابزار ریاضی فوق العاده [۱۱]، به طور گسترده برای پردازش سیگنال در ارتباطات و تحقیقات فیزیکی مورد استفاده قرار گرفته است. پس از گسسته سازی معادلات دیفرانسیل به یک روش معمول مانند تقریب دیفرانسیل محدود، موجک ها می توانند برای دست کاری جبری در سیستم معادلات به دست آمده استفاده شوند که منجر به بهبود وضعیت سیستم نتیجه می شود. کار قبلی انجام شده [۱۱]، در تجزیه و تحلیل سیستم از طریق موجک هار توسط هسیانو و همکارانش [۱۲] ارائه شد؛ بدین صورت که آن ها ابتدا ماتریس مؤثر هار را برای انتگرال بردار توابع و سپس برای تجزیه و تحلیل هار به سیستم های دینامیکی اعمال کردند. سپس، کار پیشرو در تجزیه و تحلیل حالت سیستم های تأخیری خطی از طریق موجک هار توسط هسیانو و همکارانش [۱۲] که اولین بار ماتریس حاصل هار و ماتریس ضرایب را ارائه کرد، انجام شد. آن ها یک ایده کلیدی برای تبدیل تابع متغیر زمان و حاصل آن با ضرب به ماتریس حاصل هار پیشنهاد دادند. کالپانا و بالاچاندار [۱۳] روش تجزیه و تحلیل هار را برای طراحی ناظر در فضای حالت جامع یا سیستم منحصربه فرد مدارهای ترانزیستور ارائه کردند. حل مسئله انتقال حرارت معکوس با استفاده از توابع هار توسط پورقلی و همکارانش [۱۴] انجام شده است؛ اما در این پژوهش از توابع هار علاوه بر تقریب توابع متغیر، به عنوان ابزاری برای فیلتر نویز ورودی نیز استفاده شده است. در این مطالعه، مسئله انتقال حرارت یک بعدی در یک دیواره با شروط مرزی آدیباتیک و دما معلوم روی یک سمت، مورد ارزیابی قرار گرفته است. دمای سمت معلوم از روی معادله انتقال حرارت به صورت حل دقیق با سری فوریه به دست خواهد آمد و با اعمال خطا در داده های ورودی حل معادلات معکوس صورت می پذیرد.

۲- مدل سازی ریاضی

۲-۱- مسئله مستقیم

همان طور که در شکل (۱) نشان داده شده، مسئله هدایت گرمایی یک بعدی از طریق یک صفحه یکنواخت، در نظر گرفته شده است. در ابتدای صفحه $x=0$ ، سطح عایق و

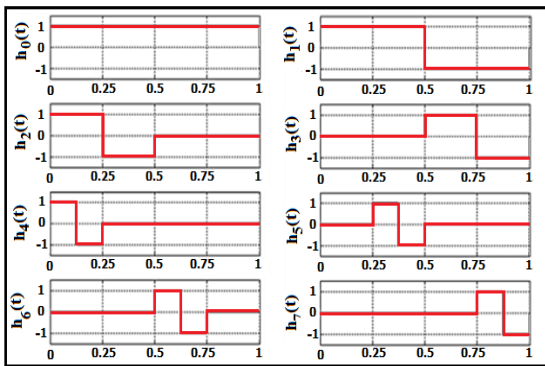
و کاربرد آن‌ها در علوم را می‌توان در [۲۴-۱۸] مشاهده کرد.

۴-۲- موجک‌های هار

موجک هار برای $x \in [0,1]$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+0.5}{m}\right) \\ -1, & x \in \left[\frac{k+0.5}{m}, \frac{k+1}{m}\right) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (10)$$

عدد صحیح $m = 2^j$, ($j = 0, \dots, J$) تراز موجک را نشان می‌دهد که $k = 0, 1, \dots, m-1$ پارامتر انتقال و حداکثر سطح دقت J است. زیرنویس i با $i = m + k + 1$ محاسبه می‌شود، در شکل (۲) فرم این تابع در بازه‌های مختلف نمایش داده شده است.



شکل ۲: نمودار موجک‌های هار برای $J=2$ [۲۷]

در مورد مقادیر حداقل $k=0$, $m=1$ مقدار $i=2$ و مقادیر حداکثر برای $M = 2^{j+1} = i$ است. فرض بر این است که مقدار $i=1$ تابع مقیاس‌بندی برای $h_1=1$ در $[0,1]$ باشد. با تعریف نقطه تقاطع

$$h_i(x) \text{ تابع هار } x_i = \frac{1-0.5}{M}, (i=1, 2, \dots, M)$$

محاسبه می‌شود. به این ترتیب، ماتریس ضرایب H و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال P و Q که ماتریس‌های مربعی M هستند، توسط معادلات زیر تعریف می‌شوند:

$$(H)_{ii} = (h_i(x_i)) \quad (11)$$

$$(PH)_{ii} = \int_0^{x_i} h_i(x) dx \quad (12)$$

$$(QH)_{ii} = \int_0^{x_i} \int_0^x h_i(x) ds dx \quad (13)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

in $0 < x < L$, for $0 < t \leq t_f$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=0, \text{ for } 0 < t \leq t_f \quad (6)$$

$$k \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = q(t) = (\text{unknown}) \quad (7)$$

at $x=L$, for $0 < t \leq t_f$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (8)$$

for $t=0, 0 < x < L$

$$u(x_{\text{meas}}, t_i) = u_i^* \quad (9)$$

at $x = x_{\text{meas}}$, for $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, I$)

اندازه‌گیری دما در یک نقطه داخلی x_{meas} در زمان‌های مختلف t_i به صورت معادله (۹) بیان می‌شود. در مسئله ما، سطح مرزی شار حرارتی $q(t)$ نامعلوم است. بنابراین، این نوع مسئله به‌عنوان یک مسئله هدایت حرارتی معکوس مرزی است. زمانی که همه پارامترها (α, k, q, u_0) معلوم باشند، هدف اصلی از مسئله مستقیم، ایجاد میدان دما $u(x,t)$ در صفحه است. به عبارت دیگر، هدف از مسئله معکوس، تخمین شار حرارتی (علت) از اطلاعات دمای اندازه‌گیری شده (اثر) است، $x_{\text{meas}} = 0$.

۳-۲- موجک‌ها

در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر استفاده از موجک‌ها (Wavelets) در زمینه حل‌های تقریبی، محبوبیت خاصی یافته و دسته‌های مختلفی از موجک‌ها برای تحلیل معادلات مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۷]. اصلی‌ترین خاصیتی که باعث مناسب بودن تقریب معادلات با استفاده از موجک‌ها شده، داشتن خاصیت محلی (Local) و طیفی (Spectral) به صورت هم‌زمان است؛ یعنی هر جمله از عبارت موجکی به طور هم‌زمان هم از نقاط اطراف خود تأثیر مستقیم دریافت می‌کند (مشابه روش‌هایی مانند دیفرانسیل محدود) و هم از نقاط دوردست (مشابه تمام روش‌های طیفی). همچنین هر جمله به طور هم‌زمان از چند درجه از اندازه شبکه تأثیر می‌پذیرد. در بین توابع موجکی مختلف، موجک‌های هار به علت خواص مفیدی مانند کاربری آسان، تعامد و سازش با بیشتر معادلات، در بین محققان بسیار محبوب شده است. همچنین به علت طبیعت تکه‌ای ثابت بودن توابع هار، کار با آن‌ها دارای هزینه محاسبات پایینی نسبت به سایر موجک‌ها است. مقدمه‌ای بر موجک‌های هار

که از بعضی از اندازه‌گیری‌های داخلی تعیین می‌شود. حال

فاصله $[0, t_f]$ به N قسمت مساوی با مقدار $\Delta t = \frac{t_f}{N}$

تقسیم می‌شود. در نظر داشته باشید که $t_s = (s-1)\Delta t, s=1, 2, \dots, N$ است [۷].

$$u''(x, t) = \sum_{n=1}^M c_n h_n(x) = C_M^T H_M(x) \quad (20)$$

که در آن $u''(x, t)$ مشتق متوسط بر مبنای t و x بردار C_M^T در هر بازه $[t_s, t_{s+1}]$ که $s=1, 2, \dots, N$ است. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۸) بر مبنای t از t_s تا t و سپس دو بار انتگرال‌گیری بر مبنای x از a تا x داریم:

$$u''(x, t) = (t - t_s) C_M^T H_M(x) + u''(x, t_s) \quad (21)$$

$$u(x, t) = (t - t_s) C_M^T [Q_M H_M(x) - Q_M H_M(a) - (x - a) P_M H_M(a)] + u(a, t) - u(a, t_s) + (x - a) [u'(a, t) - u'(a, t_s)] + u(x, t_s) \quad (22)$$

$$u(x, t) = C_M^T [Q_M H_M(x) - Q_M H_M(a) - (x - a) P_M H_M(a)] + u(a, t) (x - a) u'(a, t) \quad (23)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned} u(a, t_s) &= g(t_s), \\ u(1, t_s) &= g(t_s), \\ \dot{u}(a, t) &= g'(t), \\ \dot{u}(1, t) &= g'(t), \end{aligned} \quad (24)$$

با قرار دادن $x=1$ در معادله (۲۲) و (۲۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u'(a, t) = u'(a, t_s) &= \frac{t - t_s}{a - 1} C_M^T [Q_M H_M(x) - Q_M H_M(a) - (1 - a) P_M H_M(a)] \\ &+ \frac{1}{1 - a} (u(1, t) - u(1, t_s)) \\ &+ \frac{1}{1 - a} (u(a, t_s) - u(a, t)) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \frac{1}{1 - a} (u(1, t) - u(a, t_s)) \\ &- C_M^T \left[\frac{1}{1 - a} Q_M H_M(1) - \frac{1}{1 - a} Q_M H_M(a) - P_M H_M(a) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

هر تابع $f \in L^2([0, 1])$ می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود [۷]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n(x) \quad (14)$$

که ضریب c_n به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$c_n = 2^j \int_0^1 f(x) h_n(x) dx \quad (15)$$

که در آن $n = 2^j + k, j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$ می‌باشد.

$$f(x) = \sum_{n=1}^M c_n h_n(x) = C_M^T H_M(x) \quad (16)$$

که ضریب C_M^T و بردار تابع H_M به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned} H_M(x) &= (h_1(x) h_2(x) \dots h_M(x))^T \\ C_M^T &= (c_1 c_2 \dots c_M) \end{aligned} \quad (17)$$

که T به معنای ترانهاده و $M = 2^{J+1}$ است.

۲-۴-۱- مسئله معکوس برای انتقال حرارت

یک مثال از مسئله انتقال حرارت هدایت معکوس، برآورد روند انتقال حرارت بوده که توسط یک شاتل یا موشک بازگشتی به جو زمین از فضا تجربه شده است. شار گرما در سطح حرارت گرم مورد نیاز است [۸]. برای برآورد چگونگی شار حرارتی سطح، لازم است یک مدل ریاضی از فرایند انتقال حرارت وجود داشته باشد. به عنوان مثال، فرض بر این است که یک قطعه پوسته تک‌جنس، همگن و ایزوتروپیک و به طور تقریبی نزدیک به یک صفحه صاف وجود داشته باشد. از این رو، مدل ریاضی احتمالی برای درجه حرارت در صفحه یک مسئله هدایت حرارت معکوس یک‌بعدی به شرح زیر است [۸]:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_f \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= p(t), \quad 0 \leq t \leq t_f \\ u(1, t) &= u(t), \quad 0 \leq t \leq t_f \end{aligned} \quad (18)$$

شرط تعیین‌شده به صورت زیر است:

$$u(a, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (19)$$

که $0 < a < 1$ نقطه ثابت، $\varphi(x)$ تابع معلوم پیوسته، $g(t)$ و $q(t)$ توابع معلوم بی‌نهایت قابل تشخیص هستند و t_f زمان نهایی را نشان می‌دهد. تابع $p(t)$ نامعلوم است

در مورد مرتبه صفر، اول و دوم روش تیخونوف، ماتریس $R^{(s)}$ برای $s=0, 1, 2$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R^{(0)} = I_{M_1 \times M_1} \in R^{M_1 \times M_1}$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{(M_1-1) \times M_1} \quad (35)$$

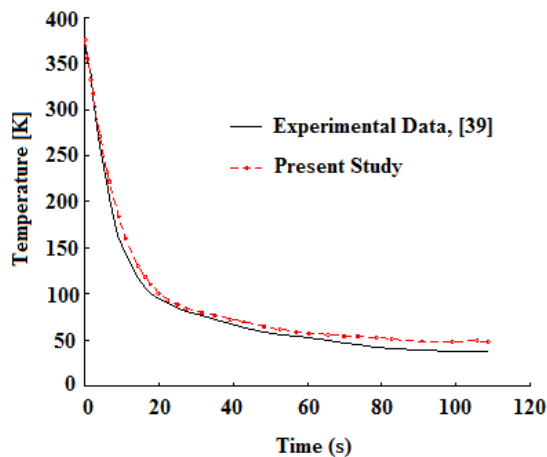
$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -2 & 1 \end{pmatrix} \in R^{(M_1-2) \times M_1}$$

که $M_1 = (\gamma + 1) \times (1 + 1)$ است.

بنابراین حل پایدارسازی تیخونوف معادلات پایدارسازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Theta_\alpha = [\Lambda^T \Lambda + \alpha (R^{(s)})^T R^{(s)}]^{-1} \Lambda^T B \quad (36)$$

در محاسبات، از یک طرح GCV برای تعیین مقدار مناسب α استفاده شده است [۲۶].



شکل ۳: مقایسه نتایج آزمایشگاهی [۲۷] و داده‌های حاصل از حل به روش معکوس برای فرایند سرمایش

۳- نتایج

۳-۱- مقایسه کار انجام شده با داده‌های آزمایشگاهی
برای تأیید صحت الگوریتم مورد استفاده برای حل مسائل معکوس انتقال حرارت، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل معادلات مربوط به روش معکوس و داده‌های ارائه شده در مرجع [۲۷] در خصوص فرایند سرمایش انجام شده است. در مطالعه آزمایشگاهی مرجع [۲۷]، یک صفحه مستطیل شکل توسط شار حرارتی ثابت، سرد و توسط دماسنج دمای مرکز این صفحه در زمان‌های مختلف ثبت

با قرار دادن معادلات (۲۵) و (۲۶) در معادله (۲۳) و (۲۴) و گسسته‌سازی آن با فرض اینکه $x \rightarrow x_1$ و $t \rightarrow t_{s+1}$ خواهیم داشت:

$$u''(x_1, t_{s+1}) = (t_{s+1} - t_s) C_M^T H_M(x_1) + u''(x_1, t_s) \quad (27)$$

$$u(x_1, t_{s+1}) = (t_{s+1} - t_s) C_M^T \left[Q_M H_M(x_1) - \frac{x_1 - a}{1 - a} P_M F + \frac{x_1 - 1}{1 - a} [q(t_{s+1}) - q(t_s)] \right] \quad (28)$$

$$\dot{u}(x_1, t_{s+1}) = C_M^T \left[Q_M H_M(x_1) - \frac{x_1 - a}{1 - a} P_M F + \frac{x_1 - 1}{1 - a} Q_M H_M(a) \right] + \frac{1 - x_1}{1 - a} [q'(t_{s+1}) - \frac{x_1 - a}{1 - a} q'(t_{s+1})] \quad (29)$$

که بردار F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \underbrace{[1, 0, \dots, 0]^T}_{(M-1)} \quad (30)$$

و H ، P و Q از معادلات (۱۱) الی (۱۳) به شرح زیر به دست می‌آیند:

$$\dot{u}(x_1, t_{s+1}) = u''(x_1, t_{s+1}) \quad (31)$$

با جای گذاری (۲۷) و (۳۰) در (۳۱) خواهیم داشت:

$$C_M^T \left[Q_M H_M(x_1) - \frac{x_1 - a}{1 - a} P_M F + \frac{x_1 - 1}{1 - a} Q_M H_M(a) - \Delta t H_M(x_1) \right] = u''(x_1, t_s) - \frac{1 - x_1}{1 - a} q'(t_{s+1}) - \frac{x_1 - a}{1 - a} q'(t_{s+1}) \quad (32)$$

بنابراین سیستم خطی مربوط به ضریب C_M^T می‌تواند به صورت (۳۳) تعیین شود:

$$\Lambda \Theta = B \quad (33)$$

ماتریس Λ شرط بدخیم است. به عبارت دیگر، همان طور که $g(t)$ تحت تأثیر خطای اندازه‌گیری شده است، تخمین Θ با استفاده از معادله (۳۳) ناپایدار می‌شود که روش پایدارسازی تیخونوف برای کنترل خطای اندازه‌گیری شده مورد استفاده قرار می‌گیرد. حل پایدارساز تیخونوف [۹]، برای معادله جبری خطی (۳۳) به روش زیر به دست می‌آید:

$$F_\alpha(\Theta) = \|\Lambda \Theta - B\|_2^2 + \alpha \|\Theta^{(s)}\|_2^2 \quad (34)$$

۳-۲- مثال شماره ۱

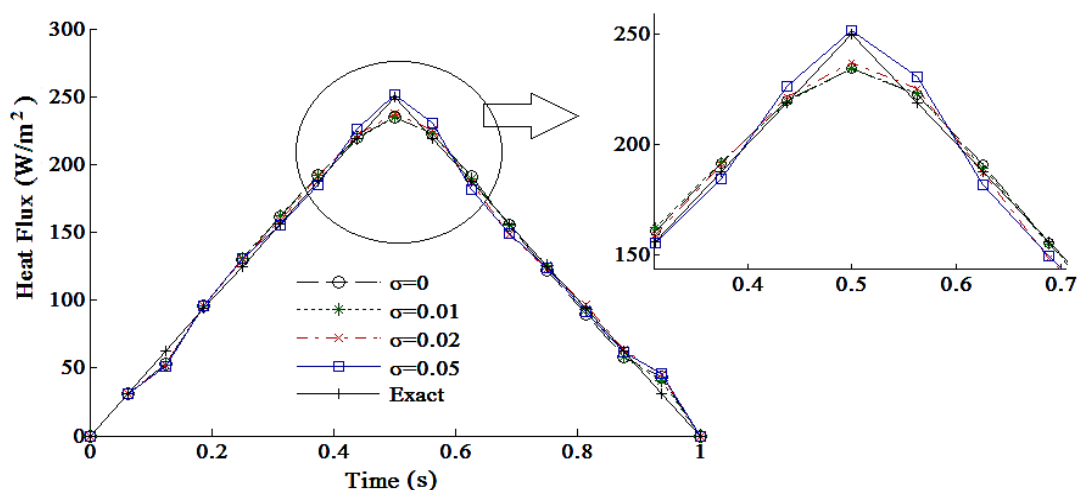
در این مثال شار حرارتی در سطح به صورت رابطه (۳۷) در نظر گرفته شده است و در صورت صحت عملکرد کد معکوس باید مقداری متناظر با این شار حرارتی از نتایج کد معکوس به دست آید.

$$q''(x) = 500(-t \times \text{sign}(t - 0.5) + \text{heaviside}(t - 0.5)) \quad (37)$$

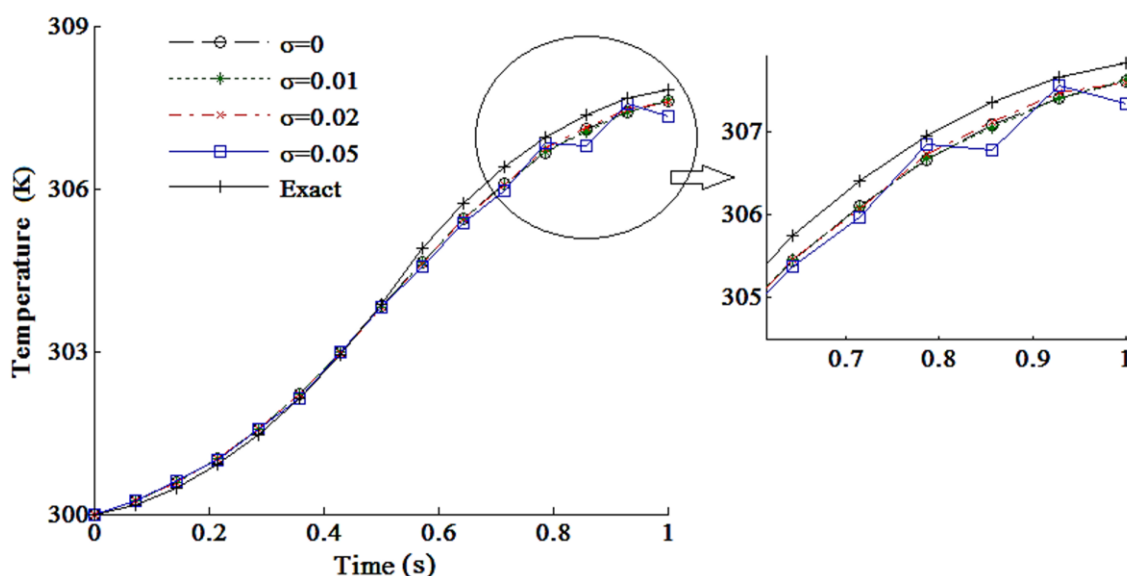
تابع فوق، تابعی به شکل کلاه است. برای افزودن اثر خطای اندازه‌گیری، مقادیر مختلف خطا از ۱ الی ۵ درصد به داده‌های ورودی داده شده است. نتایج حل مثال مربوط، در اشکال (۴) الی (۶) آورده شده است.

شده است. نتایج این آزمایش در شکل (۳) با نتایج روش معکوس مقایسه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اختلاف بین نتایج به‌دست‌آمده توسط روش ارائه‌شده در این پژوهش و داده‌های آزمایشگاهی، بسیار ناچیز است.

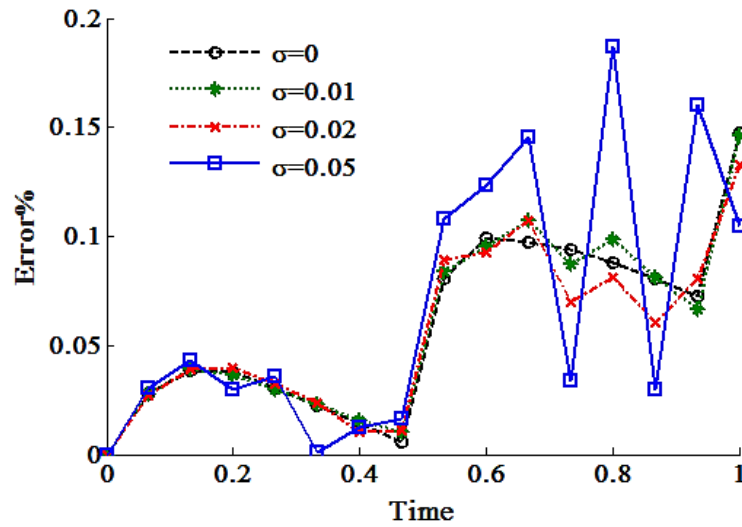
در ادامه، برای آزمودن روش حل معرفی‌شده در حل مسائل انتقال حرارت یک‌بعدی، دو مسئله با فرمت روابط (۵) الی (۹) با $u_0(x) = 300$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به منظور آزمون جواب‌های به‌دست‌آمده، ابتدا حل مستقیم برای یک شار حرارتی مشخص به دست آمده و پس از قرار دادن شرط مرزی دما و آدیاباتیک در $x = 0$ مسئله معکوس حل شده است.



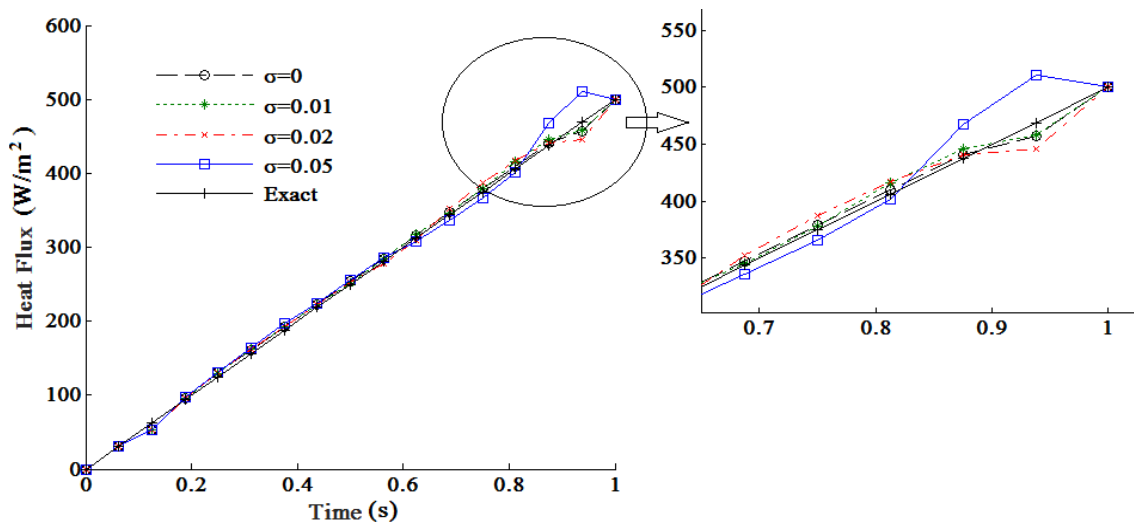
شکل ۴: نمودار مربوط به شار حرارت تخمین زده شده توسط روش معکوس برای داده‌ها با نویز ورودی مختلف برای مثال شماره ۱



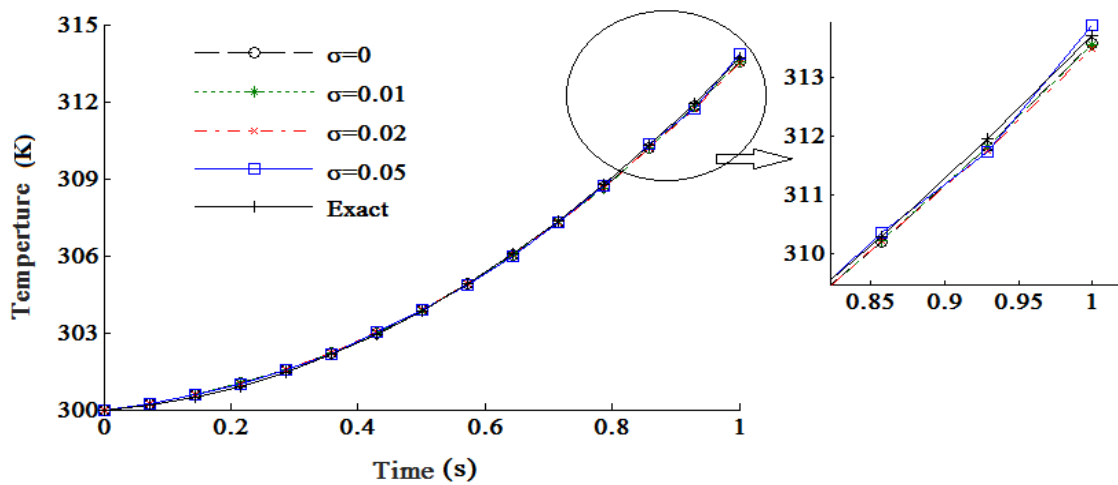
شکل ۵: نمودار مربوط به دمای تخمین زده شده در دیواره مجهول توسط روش معکوس برای داده‌ها با نویز ورودی مختلف برای مثال شماره ۱



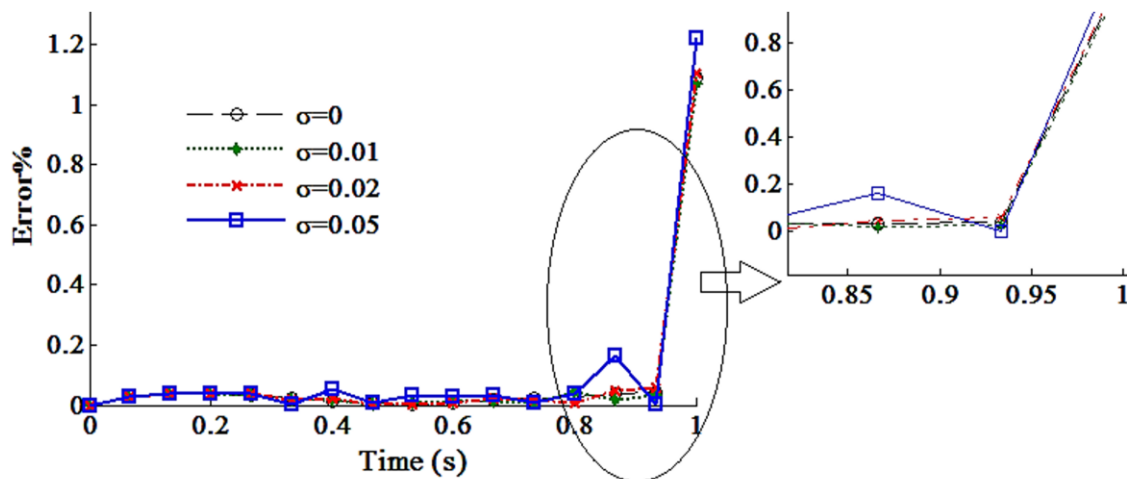
شکل ۶: نمودار مربوط به خطای دمای تخمین زده شده در دیواره مجهول توسط روش معکوس برای داده‌ها با نویز ورودی مختلف (در مقایسه با جواب دقیق) برای مثال شماره ۱



شکل ۷: نمودار مربوط به شار حرارت تخمین زده شده توسط روش معکوس برای داده‌ها با نویز ورودی مختلف برای مثال شماره ۲



شکل ۸: نمودار مربوط به دمای تخمین زده شده در دیواره مجهول توسط روش معکوس برای داده‌های با نویز ورودی مختلف برای مثال شماره ۲



شکل ۹: نمودار مربوط به خطای دمای تخمین زده شده در دیواره مجهول توسط روش معکوس برای داده‌ها با نویز ورودی مختلف (در مقایسه با جواب دقیق) برای مثال شماره ۲

تابع فوق، تابعی به شکل یک خط شیب‌دار است. به منظور اضافه کردن اثر خطای اندازه‌گیری، مقادیر مختلف خطا از ۱ الی ۵ درصد به داده‌های ورودی داده شده است. نتایج حل مثال مربوط، در اشکال (۷) الی (۹) آورده شده است. همان‌طور که در شکل (۷) نشان داده شده است، برای شار حرارتی مذکور با استفاده از روش معکوس با داده‌های نویزدار متفاوت، نتایجی مشابه کسب شد. در نویز ورودی ۰/۰۵ بعد از ثانیه ۰/۸ خطای قابل ملاحظه‌ای ایجاد شده است.

در شکل (۸) با استفاده از روش معکوس برای داده‌های با نویز ورودی مختلف در دیواره مجهول دما تخمین زده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، داده‌های با نویز متفاوت، تقریب بسیار خوبی با مقدار داده دقیق دارند که این گویای دقت و سرعت حل روش مورد استفاده برای تخمین موارد مجهول در مسائل معکوس است.

شکل (۹) با توجه به روش معکوس برای داده‌های با نویزهای متفاوت خطای دمای تخمین زده شده را نشان می‌دهد. این خطا برای داده با نویز بالا، یعنی ۰/۰۵ از سایر داده‌ها بیشتر مشاهده می‌شود و ناپایداری آن در مقادیر بعد از ثانیه ۰/۸ بیشتر مشهود است. در مقدار عددی نویز کمتر، خطای کمتری در دمای تخمین زده شده مشاهده می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، حل مسئله انتقال حرارت معکوس یک‌بعدی با استفاده از موجک‌های هار بررسی شده است. برای این منظور، مسئله انتقال حرارت یک‌بعدی در یک دیواره با

همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، شار حرارتی تخمینی با خطاهای ورودی مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در نمودارهای کلاهی‌شکل، بیشترین خطای محاسباتی در قله نمودار مشاهده می‌شود. هرچه نویز ورودی کمتر باشد، شار حرارتی تخمینی به مقدار دقیق خود نزدیک‌تر می‌شود. در مقدار نویز ورودی صفر، تطابق خوبی با مقدار دقیق شار حرارتی وجود دارد.

در شکل (۵) با استفاده از روش معکوس برای داده‌های با نویز ورودی مختلف در دیواره مجهول دما تخمین زده شده است. ناپایداری بیشتری بعد از ثانیه ۰/۸ برای داده ورودی با نویز ۰/۰۵ نسبت به سایر داده‌ها مشاهده شد. سایر نویزها از الگویی مشابه در مقایسه با مقدار دقیق مسئله تبعیت می‌کنند. شکل (۶) با توجه به روش معکوس برای داده‌های با نویزهای متفاوت، خطای دمای تخمین زده شده را نشان می‌دهد.

این خطا برای داده با نویز بالا، یعنی ۰/۰۵ از سایر داده‌ها بیشتر مشاهده می‌شود و ناپایداری آن در مقادیر بعد از ثانیه ۰/۷ بیشتر مشهود است. هرچه نویز ورودی کمتر باشد، خطای کمتری ظاهر می‌شود.

۳-۳- مثال شماره ۲

در این مثال، شار حرارتی در سطح به صورت رابطه (۳۸) در نظر گرفته شده است و در صورت صحت عملکرد کد معکوس باید مقداری متناظر با این شار حرارتی از نتایج کد معکوس به دست آید.

$$q''(x) = 500t \quad (38)$$

نشان می‌دهد که این روش سرعت بالایی نیز دارد. با توجه به نتایج کسب‌شده می‌توان گفت روش حاضر با اعمال خطای کوچک در داده‌های ورودی، پایداری خود را حفظ کرده است.

در واقع می‌توان گفت یکی از ویژگی‌های مورد توجه روش هار این است که میزان خطای به‌دست‌آمده، به نوع تابع تخمین زده شده وابسته است. از این رو در دو مثال مورد بررسی، میزان خطای اندازه‌گیری شده متفاوت بود که این در اصل، از خصوصیات روش‌های تقریبی است.

شروط مرزی آدیباتیک و دما معلوم روی یک سمت مورد ارزیابی قرار گرفته است. دمای سمت معلوم از روی معادله انتقال حرارت به صورت حل دقیق با سری فوریه به دست آمده و با اعمال خطا که باعث نویزدار شدن داده‌های ورودی می‌شد، حل انجام شده است.

از نتایج به‌دست‌آمده از حل دو مثال مشخص شد که روش موجک هار دارای دقت بالایی در حل مسائل معکوس است. از همه مهم‌تر، در هر دو مثال به منظور حل تنها از ۱۰ نقطه مکانی و ۱۶ نقطه زمانی استفاده شده است. این مطلب

۵- مراجع

- [1] M. Abtahi, R. Pourgholi and A. Shidfar, "Existence and uniqueness of solution for a two dimensional nonlinear inverse diffusion problem", *Nonlinear Analysis | Theory, Methods and Applications*, Vol. 74, 2011, pp. 2462–2467.
- [2] O.M. Alifanov, *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer, New York, 2012.
- [3] J.M.G. Cabeza, J.A.M. Garcia and A.C. Rodriguez, "A sequential algorithm of inverse heat conduction problems using singular value decomposition", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, 2005, pp. 235–244.
- [4] C.H. Huang and Y.L. Tsai, "A transient 3-D inverse problem in imaging the time- dependent local heat transfer coefficients for plate fin", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, 2005, pp. 2478–2495.
- [5] C.H. Huang, C.Y. Yeha and H.R B. Orlande, "A nonlinear inverse problem in simultaneously estimating the heat and mass production rates for a chemically reacting fluid", *Chemical Engineering Science*, Vol. 58, No.16, 2003, pp. 3741–3752.
- [6] R. Pourgholi, N. Azizi, Y.S. Gasimov, F. Aliev and H.K. Khalafi, "Removal of numerical instability in the solution of an inverse heat conduction problem", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 6, 2009, pp. 2664–2669.
- [7] R. Pourgholi and M. Rostamian, "A numerical technique for solving IHCPs using Tikhonov regularization method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 8, 2010, pp. 2102–2110.
- [8] R. Pourgholi, M. Rostamian and M. Emanjome, "A numerical method for solving a nonlinear inverse parabolic problem", *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 18, No. 8, 2010, pp. 1151–1164.
- [9] K.K. Sun, B.S. Jung and W.L. Lee, "An inverse estimation of surface temperature using the maximum entropy method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, 2007, pp. 37–44.
- [10] J. Zhou, Y. Zhang, J.K. Chen and Z.C. Feng, "Inverse heat conduction in a composite slab With pyrolysis effect and temperature-dependent thermophysical properties", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 132 No. 3, 2010, pp. 034502.
- [11] G. Hariharan, K. Kannan and K.R. Sharma, "Haar wavelet method for solving Fisher's equation", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 211, 2009, pp. 284–292.
- [12] C.H. Hsiao and W.J. Wang, "Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 57, 2001, pp. 347–353.
- [13] R. Kalpana and B.S. Raja, "Haar wavelet method for the analysis of transistor circuits", *International Journal of Electronics and Communications*, (AEU) Vol. 61, 2001, pp. 589–594.
- [14] R. Pourgholi, N. Tavallaie and S. Foadian, "Applications of Haar basis method for solving some ill-posed inverse problems", *Springer Science+Business Media, LLC*. 2012.

[۱۵] محمد اکبری، فرشاد کوثری، سیف‌الله سعدالدین و داود طغریایی سمیرمی، «حل تحلیلی میدان دما برای یک صفحه تخت تحت شرط مرزی جابه‌جایی با استفاده از معادله انتقال حرارت غیر فوریه‌ای-مدل کاتانو»، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۱، شماره ۳۲، بهار ۱۳۹۲، صفحه ۸۱–۶۹.

- [16] H. Molhem and R. Pourgholi, "A numerical algorithm for solving a one-dimensional inverse heat conduction problem", *Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 4, No. 1, 2008, pp. 60–63.
- [۱۷] روح‌الله فیروزنیا و نیما امجدی، «پیش‌بینی بار کوتاه‌مدت با استفاده از تجزیه سری زمانی و شبکه عصبی»، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۲، شماره ۱۶، بهار ۱۳۸۷، صفحه ۳۲–۲۳.
- [18] U.I. Siraj, B. Šarler, I. Aziz and F.I. Haq, "Haar wavelet collocation method for the numerical solution of boundary layer fluid flow problems". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, No. 5, 2011, pp. 686–697.
- [19] C.H. Hsiao and W.J. Wang, "Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems". *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 57, 2001, pp. 347–353.
- [20] C.H. Hsiao, "Haar wavelet approach to linear stiff systems", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 64, 2004, pp. 561–567.
- [21] U. Lepik, "Numerical solution of differential equations using Haar wavelets", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 68, 2005, pp. 127–143.
- [22] I. Singh and S.H. Kumar, "Simple iterative technique for solving some models of nonlinear partial differential equations using HAAR WAVELET", *Italian journal of pure and applied mathematics*, 2016, pp. 335-34.
- [23] A. Shah, R. Abass and L. Debnath, "Numerical Solution of Fractional Differential Equations Using Haar Wavelet Operational Matrix Method", *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2016.
- [24] I. Singh, S. Arora and S. Kumar, "Numerical solution of wave equation using HAAR WAVELET", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 98, No. 4, 2015, pp.457-469.
- [25] U. Lepik, "Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 185, 2007, pp. 695-704.
- [۲۶] امیر عزالدین، حسین نادریپور، علی خیرالدین و غلام‌رضا قدرتی امیری، «تشخیص محل و میزان ترک در تیرها با استفاده از تبدیل موجک»، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۲، شماره ۳۹، زمستان ۱۳۹۳، صفحه ۱۱–۱.
- [27] A.S.A. Alghamdi, "Inverse Estimation of Boundary Heat Flux for Heat Conduction Model", *Journal of King Abdulaziz University-Science*, Vol. 21, No.1, 2010, pp. 73-95.