مطالعه اثر ضربه نانوذرات بر نانولوله‌های کربنی دوجداره با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته

فاطمه عباس‌پور[۱]، احسان زمانی[۲*] و سجاد صیفوری[۳]

اطلاعات مقاله
دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۰۱
پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۲۵

واژگان کلیدی:
نانولوله کربنی دو جداره،
نانو ذره،
سیستم جرم و فنر،
ضربه.

چکیده

افزایش مقاومت الکتریکی و کاهش رسانایی نانولوله‌ها در اثر اعمال نیروهای ضربه‌ای به آنها، موجب استفاده وسیع از آنها به عنوان سنسورهای نیرویی شده است. در پژوهش حاضر برای اولین بار، یک روش تحلیلی جدید برای بررسی ضربه نانوذره بر روی نانولوله دو جداره کربنی در دو حالت تکیه گاه ساده و گیردار، با استفاده از تئوری غیرمحلی تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو و با در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین لایه‌ها ارائه شده است. مقدار ثابت فنر برای هر نانوتیر، که از هندسه سازه و تغییر شکل‌های برشی و خمشی آن تأثیر می‌پذیرد، با استفاده از سیستم جرم و فنر بدست آمده است. نتایج حاصل از این روش تحلیلی با نتایج موجود در پیشینه تحقیق مقایسه و صحت سنجی شده است. اثر نیروی واندروالس بین لایه‌ها، جرم و سرعت نانوذره در تغییر شکل دینامیکی نانولوله دو جداره بررسی شده است. بر اساس این نتایج، با افزایش سرعت برخورد نانوذره، میزان تغییر شکل دینامیکی وسط نانوتیر دو جداره افزایش یافته است. با توجه به نتایج بدست آمده، مشاهده شد که مقدار تغییر شکل دینامیکی در نانولوله دوجداره کمتر از نانولوله تک جداره بوده و تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره با افزایش جرم نانوذره و پارامتر غیرمحلی، افزایش یافته است. همچنین با در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین لایه‌ها، تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم وسط نانوتیر کاهش یافته است.

۱- مقدمه

با توجه به سخت و هزینه بر بودن انجام آزمایش‌های تجربی برای بررسی رفتار مکانیکی نانولوله‌ها، غالبا روش‌های تحلیلی و استفاده از مدل‌های تئوری ترجیح داده می‌شوند. البته باید در نظر داشت که تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط پیوسته، در پیش‌بینی این رفتارها ناتوان بوده و در تعیین رفتار ارتعاشی و استاتیکی ذرات در مقیاس نانو، قابل اعتماد نیستند. این نقص، پژوهشگران را بر آن داشته تا با ارائه تئوری‌های اصلاح شده، به رفع این مشکل همت گمارند. تئوری الاستیسیته غیرمحلی، از جمله این تئوری‌ها است که برای اولین بار توسط ارینگن [۱-۳] ارائه شد و بعدها در بررسی انتشار امواج تنش در کامپوزیت‌ها، خمش، کمانش، شکست و ارتعاشات آزاد و واداشته نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافن مورد استفاده قرار گرفت [۴، ۵]. تفاوت اصلی بین تئوری‌های کلاسیک و غیرموضعی الاستیسیته، در تعریف تنش است. در تئوری‌های کلاسیک، تنش هر نقطه تنها تابعی از میدان کرنش همان نقطه است؛ در حالی که در تئوری‌های غیرمحلی، حالت تنش در هر

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: zamani.ehsan @ sku.ac.ir
۱. کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد
۲. استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد
۳. استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

نقطه نه تنها تابع میدان کرنش آن نقطه، که تابع کرنش همه نقاط محیط پیوسته در نظر گرفته می‌شود. بر مبنای این تئوری، پژوهش‌های فراوانی برای بررسی رفتار مکانیکی نانولوله‌های کربنی انجام شده است. فرض اساسی در این روش آن است که نانولوله همانند سازه قاب رفتار می‌کند. نیروی پیوندهای کووالانت نیز در نظر گرفته می‌شود؛ اما با وجود صرف‌نظر کردن از نیروهای الکتروستاتیک، همچنان دقت محاسبات مناسب است. این قبیل تئوری‌ها دربرگیرنده اطلاعاتی از نیروهای مابین اتم‌ها و اندازه طول-های داخلی (اثر مقیاس کوچک) که در روابط ساختاری به صورت پارامترهای مادی تعریف می‌شوند، هستند. تئوری غیرمحلی الاستیسته در پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه نانو سازه‌ها مورد استفاده و تحلیل قرار گرفته است [۶-۹]. بررسی اثر ضربه بر روی سازه‌ها مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و در سالیان اخیر، پژوهش‌های فراوانی در زمینه بررسی اثر ضربه بر ساختارهای متفاوت، انجام شده است [۱۰-۱۲]. نانولوله‌های کربنی بواسطه برخورداری از خواص مکانیکی خوب و نیز ساختار و ویژگی‌های حرارتی، الکتریکی و لیزری منحصر به فرد، بسیار مورد توجه قرار گرفته و کاربردهای فراوانی برای آن‌ها پیشنهاد شده است. از جمله این ویژگی‌ها و کاربردها، افزایش مقاومت الکتریکی و کاهش میزان رسانایی نانولوله‌ها در اثر اعمال نیروهای ضربه‌ای به آنها است که این امر، سبب استفاده از آن‌ها به عنوان سنسورهای نیرویی شده است. این بار ضربه‌ای که ابزار اعمال آن می‌تواند یک نانو ذره باشد، سبب تغییر شکل نانولوله شده و همین امر، تغییر خواص الکتریکی آن را در پی خواهد داشت. از این رو، مطالعه رفتار نانولوله‌های کربنی در مقابل بارهای ضربه‌ای ضروری به نظر می‌رسد. پژوهش-های فراوانی در این زمینه با استفاده از تئوری تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو و روش اجزا محدود صورت گرفته است [۱۳]. صیفوری و لیاقت ضربه کم سرعت یک نانوذره روی نانوتیرهای تک لایه را با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته و روش المان محدود مدل‌سازی و بررسی کردند [۱۴]. صیفوری و لیاقت به تحلیل و بررسی ضربه کم سرعت نانوتیر اویلر- برنولی با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته پراختند [۱۵]. صیفوری و همکاران ضربه کم سرعت نانوتیر تیموشنکو را با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته بررسی کردند [۱۶]. صیفوری به تحلیل دینامیک مولکولی رفتار ضربه‌ای نانولوله‌های کربنی پرداخت [۱۷]. از وجوه نوآورانه مقاله حاضر، می‌توان به بررسی و تحلیل تغییر شکل نانولوله‌های کربنی دوجداره تحت بار ضربه‌ای اشاره کرد. همچنین برای نخستین بار، از سیستم جرم و فنر برای مدل‌سازی پدیده برخورد و محاسبه مقدار ثابت فنر هر نانولوله در نانولوله کربنی دوجداره استفاده شده است.

۲- مدل تیر اویلر- برنولی بر اساس تئوری غیرمحلی

برای یک تیر اویلر- برنولی، می‌توان از رفتار غیرمحلی در راستای ضخامت چشم پوشید. بنابراین رابطه ساختاری غیرمحلی برای نانوتیر همگن همسانگرد بصورت زیر ارائه می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= E\varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن E مدول الاستیسیته، σ_{xx} تنش عمودی، ε_{xx} کرنش عمودی و w خیز تیر هستند. با برابر صفر قرار دادن پارامتر غیرمحلی $\mu(= {e_0}^2 a^2)$، رابطه ساختاری در حالت کلاسیک حاصل خواهد شد. همچنین با صرف‌نظر از اثر اینرسی دورانی، معادله ارتعاشات عرضی تیر اویلر- برنولی بصورت زیر بدست خواهد آمد [۱۹، ۲۰]:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -q + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۲)$$

که در آن، V منتجه نیروی برشی بر روی سطح مقطع تیر و q نیروی عرضی در طول محور x، A سطح مقطع تیر و ρ چگالی تیر می‌باشند. رابطه میان منتجه نیروی برشی و لنگر خمشی تیر بصورت زیر است:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad (۳)$$

که M لنگر خمشی تیر است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \int_A z\sigma_{xx} dA \qquad (۴)$$

با توجه به رابطه لنگر خمشی، رابطه (۱) را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ I &= \int_A z^2 dA \end{aligned} \qquad (۵)$$

در رابطه فوق، I ممان اینرسی تیر است. با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۵) لنگر خمشی غیرمحلی بر حسب جابجایی عرضی تیر به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹-۲۱]:

$$M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q) \quad (۶)$$

همچنین بطور مشابه نیروی برشی از رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$V = -EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu(\rho A\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial q}{\partial x}) \quad (۷)$$

لذا معادله حاکم بر حرکت تیر اویلر- برنولی برای تیر تک جداره در اثر ضربه به صورت زیر بدست می‌آید [۱۵]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho A\mu\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = q - \mu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (۸)$$

که در آن، q بار نقطه‌ای است. همچنین با در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین لایه‌ها، معادله حرکت غیرمحلی تیر اویلر- برنولی برای نانولوله کربنی دو جداره بر اساس جابجایی عرضی از روابط (۹) و (۱۰) بدست خواهد آمد [۱۹-۲۱]:

$$EI\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + k(w_1 - w_2) - k\mu\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right) + \rho A\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \rho A\mu\left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = q - \mu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (۹)$$

$$EI\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + k(w_2 - w_1) - k\mu\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) + \rho A\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \rho A\mu\left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = 0 \quad (۱۰)$$

که w_1 و w_2 به ترتیب جابجایی نانولوله داخلی و خارجی و k ضریب نیروی واندروالس است.

۲-۱- تیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه ساده

برای تیر با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی عبارت است از صفر بودن مقدار جابجایی و لنگر در دو طرف تیر [۱۸، ۲۲ و ۲۳]؛ یعنی:

$$W(0) = 0\,, W(L) = 0\,, M(0) = 0, M(L) = 0 \quad (۱۱)$$

جابجایی نانوتیر به صورت زیر بیان می‌شود تا شرایط مرزی رابطه (۱۱) نیز ارضا شود [۱۸]:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W \sin\frac{n\pi x}{L} e^{i\omega_n t} \quad (۱۲)$$

L طول تیر است. نیروی عرضی که به صورت بار نقطه‌ای وارد می‌شود، به صورت دو رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۸]:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad Q_n = \frac{2}{L}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (۱۳)$$

$$q(x) = Q_0\delta(x - x_0) \qquad Q_n = \frac{2Q_0}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1,2,3 \ldots \quad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) در معادله حرکت تیر اویلر- برنولی یا همان معادله (۸) و با فاکتورگیری از جمله $sin\frac{n\pi x}{L}$ رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$EI\,(\frac{n\pi}{L})^4\, W_n - \rho A{\omega_n}^2\lambda_n W_n = Q_n\lambda_n \quad (۱۵)$$

که ω_n فرکانس طبیعی است و برای هر مقدار n:

$$\lambda_n = 1 + \mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (۱۶)$$

برای جابجایی استاتیکی، فرکانس ω_n برابر صفر در نظر گرفته شده و رابطه زیر برای جابجایی نانوتیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه ساده حاصل خواهد آمد:

$$W_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n\lambda_n\,\mathrm{L}^4}{EI\,n^4\pi^4}\,\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (۱۷)$$

W_E جابجایی استاتیکی است.

۲-۲- تیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه گیردار

برای تیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار، شرایط مرزی عبارت است از صفر بودن مقدار جابجایی و شیب در دو طرف تیر [۱۸و ۲۳]؛ یعنی:

$$W(0) = 0\,, \frac{dW(0)}{dx} = 0 \qquad W(L) = 0, \frac{dW(L)}{dx} = 0 \tag{۱۸}$$

بسط فوریه مناسب برای ارضا شرایط تکیه‌گاه گیردار به صورت عبارت کلی زیر است:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W(1-\cos\frac{2n\pi x}{L})e^{i\omega_n t}}{2} \tag{۱۹}$$

نیروی عرضی مانند حالت قبل با روابط (۱۳) و (۱۴) بیان می‌شود. با جایگذاری رابطه (۱۹) در معادله حرکت تیر اویلر- برنولی، جابجایی نانوتیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه گیردار از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$W_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, Q_n \lambda_n\, \mathrm{L}^4 \sin\frac{n\pi x}{L}}{4EIn^4\pi^4 \times \cos\frac{2n\pi x}{L}} (1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}) \tag{۲۰}$$

۳- مدل تیر تیموشنکو بر اساس تئوری غیرمحلی

برای تیر تیموشنکو همگن همسانگرد، رابطه کرنش- جابجایی بصورت زیر است [۱۹]:

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{d\phi}{dx}\,, \gamma_{xz} = \phi + \frac{dw}{dx} \tag{۲۱}$$

که در آن، x مختصه طولی از سمت چپ تیر و z مختصه عرضی از وسط تیر و به سمت پایین در نظر گرفته می‌شود. w بیانگر خیز تیر، ϕ زاویه چرخش تیر در اثر خمش، ε_{xx} کرنش عمودی و γ_{xz} کرنش برشی عرضی است. با درنظر گرفتن حرکت هارمونیک و با لحاظ کردن اثر اینرسی دورانی، دو معادله حاکم مطابق روابط زیر بدست خواهند آمد [۲۴- ۲۶]:

$$\frac{dM}{dx} = Q - \rho I\omega^2\phi \tag{۲۲}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -\rho A\omega^2 w - q \tag{۲۳}$$

که در روابط فوق ω فرکانس، ρ چگالی، I ممان اینرسی سطح مقطع، A سطح مقطع، Q توزیع نیروی برشی، M لنگر خمشی در امتداد محور x و q بار است.

$$Q = \int_A \sigma_{xz} dA \tag{۲۴}$$

که در آن، σ_{xz} تنش برشی عرضی است. برای تیر همگن همسانگرد تیموشنکو معادلات ساختاری با روابط (۲۵) و (۲۶) بیان می‌شوند [۲۵-۲۸]:

$$\sigma_{xx} - \mu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} = E\varepsilon_{xx} \tag{۲۵}$$

$$\sigma_{xz} - \mu\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial x^2} = G\gamma_{xz} \tag{۲۶}$$

که در آن‌ها E مدول الاستیسیته و G مدول برشی می‌باشد. با ضرب طرفین رابطه (۲۵) در zdA و با انتگرال‌گیری روی کل سطح مقطع، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$M - \mu\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d\phi}{dx} \tag{۲۷}$$

و به طور مشابه برای رابطه (۲۶)

$$Q - \mu\frac{d^2Q}{dx^2} = K_s GA(\phi + \frac{dw}{dx}) \tag{۲۸}$$

که در آن، K_s ضریب تصحیح برش برای تیر تیموشنکو است و برای اصلاح فرض ثابت بودن برش در ضخامت تیر استفاده می‌شود. با جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۳) در روابط (۲۷) و (۲۸)، لنگر خمشی غیرمحلی و نیروی برشی بر حسب جابجایی عرضی تیر بیان می‌شوند [۲۵]:

$$M = EI\frac{d\phi}{dx} - \mu(\rho A\omega^2 w + \rho I\omega^2\frac{dQ}{dx} + q) \tag{۲۹}$$

$$Q = K_s GA\left(\phi + \frac{dw}{dx}\right) - \mu\rho A\omega^2\frac{dw}{dx} - \mu\frac{dq}{dx} \tag{۳۰}$$

با توجه به روابط (۲۹) و (۳۰)، معادله حاکم بر حرکت تیر تیموشنکو برای تیر تک جداره در اثر ضربه به صورت زیر بدست خواهد آمد [۱۶]:

$$EI\frac{d^2\phi}{dx^2}-k_sGA\left(\frac{dw}{dx}+\phi\right)+\rho I\frac{d^2}{dt^2}\left[\phi-\mu\frac{d^2\phi}{dx^2}\right]=0 \quad (۳۱)$$

$$k_sGA\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d\phi}{dx}\right)+\rho A\frac{d^2}{dt^2}\left[w-\mu\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right]=0 \quad (۳۲)$$

و در نهایت معادله حرکت غیرمحلی نانوتیر تیموشنکو برای نانولوله کربنی دوجداره با در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین لایه‌ها، بر اساس جابجایی عرضی نانولوله داخلی و خارجی، به صورت زیر بدست خواهد آمد [۲۵]:

$$k_sGA_1\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\left[P_{12}-\mu\frac{\partial^2p_{12}}{\partial x^2}\right]=\rho A_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[w_1-\mu\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\right] \quad (۳۳)$$

$$EI_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+k_sGA_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}-\varphi_1\right)=\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varphi_1-\mu\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right] \quad (۳۴)$$

$$k_sGA_2\left(\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)-\left[P_{12}-\mu\frac{\partial^2p_{12}}{\partial x^2}\right]=\rho A_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[w_2-\mu\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}\right] \quad (۳۵)$$

$$EI_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+k_sGA_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}-\varphi_2\right)=\rho I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varphi_2-\mu\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\right] \quad (۳۶)$$

روابط ۳۳ و ۳۴ مربوط به نانولوله داخلی و روابط (۳۵) و (۳۶) متعلق به نانولوله خارجی هستند. در روابط بالا، P_{12} نیروی واندروالس بین دو نانولوله در واحد طول است. برای ارتعاشات خطی کم‌دامنه، نیروی واندروالس در هر موقعیت بین دو نانولوله، به صورت خطی به اختلاف جابجایی دو نانولوله وابسته بوده و به صورت زیر بیان می‌شود [۲۵]:

$$P_{12}=k(w_2-w_1) \quad (۳۷)$$

که w_1 و w_2 به ترتیب جابجایی نانولوله داخلی و خارجی و k ضریب نیروی واندروالس است که به صورت زیر بیان می‌شود [۲۹]:

$$k=\frac{320\ (2R_1)\ \frac{erg}{cm^2}}{0.16d^2},\qquad d=1.42\times10^{-8}\ cm \quad (۳۸)$$

و R_1 شعاع داخلی نانولوله دو جداره است.

۳-۱- تیر تیموشنکو با تکیه‌گاه ساده

برای تیر با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی متشکل از صفر بودن مقدار جابجایی و لنگر در دو طرف تیر، همانند رابطه (۱۱) است. برای چرخش سطح مقطع رابطه (۴۰) و برای جابجایی رابطه (۳۹) در نظر گرفته شده است [۱۸].

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W\sin\frac{n\pi x}{L}e^{i\omega_nt} \quad (۳۹)$$

$$\varphi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi\cos\frac{n\pi x}{L}e^{i\omega_nt} \quad (۴۰)$$

روابط بالا شرایط مرزی برای تکیه‌گاه ساده را ارضا می‌کنند. با جایگذاری دو رابطه اخیر در معادلات حرکت تیر تیموشنکو و همچنین در نظر گرفتن نیروی عرضی، روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\phi_n+k_sGA\left(\phi_n+\frac{n\pi}{L}W_n\right)-\rho I\lambda_n{\omega_n}^2\phi_n=0 \quad (۴۱)$$

$$-k_sGA\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left(\phi_n+\frac{n\pi}{L}W_n\right)+\lambda_n\phi_n+\rho A\lambda_n{\omega_n}^2W_n=0 \quad (۴۲)$$

با صفر قرار دادن مقدار فرکانس ω_n، خیز نانوتیر بر اساس تئوری تیر تیموشنکو برای تکیه‌گاه ساده به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$W_T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n\ \lambda_n\Lambda_n\ L^4}{EIn^4\pi^4}\ \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (۴۳)$$

با فرض این که برای هر مقدار n رابطه زیر برقرار است:

$$\Lambda_n=(1+n^2\pi^2\Gamma),\qquad \Gamma=\frac{EI}{k_sGAL^2} \quad (۴۴)$$

۳-۲- تیر تیموشنکو با تکیه‌گاه گیردار

برای تیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار، شرایط مرزی متشکل از صفر بودن مقدار جابجایی و شیب، در دو طرف تیر همانند رابطه (۱۸) است. برای چرخش سطح مقطع رابطه (۴۶) در نظر گرفته شده است. عبارت‌های زیر شرایط مرزی را ارضا می‌کنند.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)e^{i\omega_n t}}{2} \tag{۴۵}$$

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi \cos\frac{n\pi x}{L} e^{i\omega_n t} \tag{۴۶}$$

با جایگذاری دو رابطه اخیر در معادلات حرکت تیر تیموشنکو، معادله جابجایی بدست خواهد آمد:

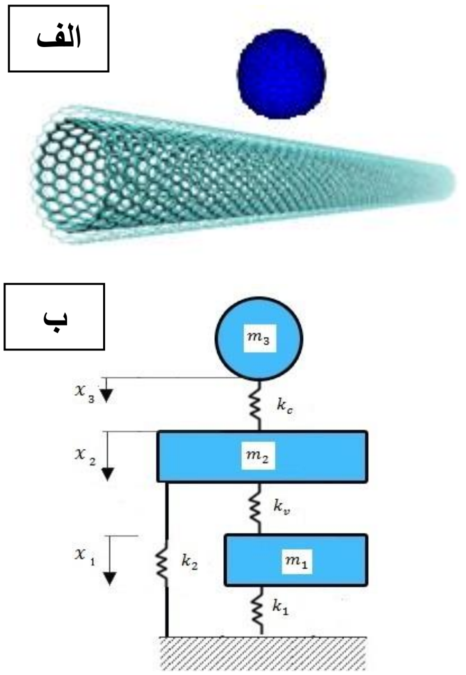
$$B = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)\cos\frac{2n\pi}{L} \times \frac{\cos\frac{2n\pi}{L}\left[-EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_s GA\right]}{k_s GA \sin\frac{2n\pi x}{L}} \tag{۴۷}$$

$$W_T(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n \lambda_n}{2k_s GA \times B} \times \frac{\cos\frac{n\pi x}{L}\left[-EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_s GA\right]}{k_s GA \times \sin\frac{2n\pi x}{L} \times \frac{2n\pi}{L}} \times \left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right) \tag{۴۸}$$

مقدار λ_n از رابطه ۱۶ بدست می‌آید.

۴- سیستم جرم و فنر

مدل جرم و فنر در سال ۱۹۸۵ توسط شیواکومار و همکارانش[۳۰] ارائه شده است. این روش در تمامی مسائل ضربه، که بتوان آنها را با مدل جرم و فنر دو درجه یا سه درجه آزادی مدل کرد کاربرد دارد. در این روش با استفاده از قانون تماس خطی شده، معادله حرکت حاکم بر سیستم جرم و فنر نوشته شده است و نیروی برخورد حاصل از ضربه بر حسب پارامترهای مسئله از جمله سختی موثر تماسی که مجهول است نوشته خواهد شد. نیروی تماسی از رابطه هرتز بدست می‌آید. از ویژگی‌ها و مزایای برجسته این روش عدم وجود هرگونه قید فیزیکی از جمله محدودیت نسبت جرم ضربه‌زننده به هدف، سادگی حل و عدم استفاده از حلقه‌های تکرار عددی است. سیستم جرم و فنر برای بررسی ضربه توسط سایر محققین بکار گرفته شده است [۱۷]. این پژوهش از ایده سیستم جرم و فنر برای مدل-سازی مسأله استفاده شده است. شکل (۱) شماتیک برخورد نانوذره به نانولوله کربنی دو جداره (الف) و مدل جرم و فنر برای مساله حاضر (ب) را نشان می‌دهد.



شکل ۱- (الف) شکل شماتیک برخورد نانوذره به نانولوله و (ب) سیستم جرم و فنر برای ضربه روی نانولوله دو جداره

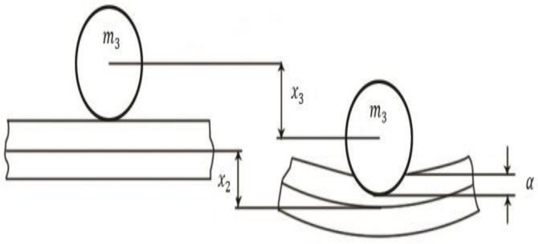
همانگونه که در شکل (۱) نشان داده شده، این سیستم از فنر خطی k_1، فنر غیرخطی k_c که بیانگر سفتی تماسی و همچنین فنر k_v که بیانگر ثابت نیروی واندروالس بین دو لایه نانولوله می‌باشد، تشکیل شده است.

k_1 و k_2 دربرگیرنده هندسه سازه، شرایط مرزی و تغییر شکل‌های برشی و خمشی نانوتیرها هستند و در تغییر شکل‌های کوچک به صورت خطی باقی خواهند ماند. برای مدل‌سازی پدیده فرورفتگی، اغلب قانون هرتز مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین نیروی تماسی حاصل از فنر k_1 به صورت خواهد بود [۳۱]:

$$F = k_c(x_3 - x_2)^{\frac{3}{2}} \tag{۴۹}$$

لازم به ذکر است که x_3 بیانگر جابجایی مرکز پرتابه و x_1 معرف جابجایی سطح خنثی تیر می‌باشد. در نهایت مقدار

فرورفتگی α، برابر $\alpha = x_3 - x_2$ خواهد شد [۳۱].



شکل ۲- اندازه گیری مقدار فرورفتگی

معادلات حرکت سیستم به قرار زیر است:

$$m_3\ddot{x}_3 + k_c(x_3 - x_2)^{3/2} = 0 \qquad (۵۰)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_c(x_3 - x_2)^{3/2} + k_v(x_2 - x_1) = 0 \qquad (۵۱)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_v(x_2 - x_1) = 0 \qquad (۵۲)$$

به علت غیرخطی بودن تماس، معادلات حرکت از نوع غیرخطی هستند. برای شرایط اولیه این مسئله، جابجایی و سرعت هدف (تیر)، در لحظه ابتدایی و جابجایی پرتابه در لحظه برخورد برابر صفر و سرعت آن برابر V_0 (سرعت اولیه) است. بنابراین شرایط اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = 0$$
$$\mathrm{x}_3(0) = 0,\ \dot{\mathrm{x}}_3(0) = V_0 \qquad (۵۳)$$

برای حل مسئله، متغیرها و معادلات زیر در نظر گرفته شده است:

$$x_1 = y_1, \frac{dy_1}{dt} = y_2, x_2 = y_3, \frac{dy_3}{dt} = y_4$$
$$x_3 = y_5, \frac{dy_5}{dt} = y_6 \qquad (۵۴)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{-k_1}{m_1}\ y_1 + \frac{k_v}{m_1}(y_3 - y_1) \qquad (۵۵)$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \frac{-k_2}{m_2}y_3 + \frac{k_c}{m_2}(y_5 - y_3)^{3/2} - \frac{k_v}{m_2}(y_3 - y_1) \qquad (۵۶)$$

$$\frac{dy_6}{dt} = -\frac{k_c}{m_3}\ (y_5 - y_3)^{3/2} \qquad (۵۷)$$

بنابراین شرایط اولیه رابطه (۵۳) به صورت رابطه (۵۸) بیان خواهد شد:

$$\mathrm{y}_1(0) = 0, \mathrm{y}_2(0) = 0, y_3(0) = 0, y_4(0) = 0$$
$$\mathrm{y}_5(0) = 0, y_6(0) = V_0 \qquad (۵۸)$$

لازم به ذکر است که تماس تا زمانی ادامه دارد که $x_3 < x_2$ باشد؛ در غیر این‌صورت طبق رابطه (۴۹) نیروی تماسی صفر شده و تماس به پایان خواهد رسید.

$$m_3\ddot{x}_3 = 0 \qquad (۵۹)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_v(x_2 - x_1) = 0 \qquad (۶۰)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_v(x_2 - x_1) = 0 \qquad (۶۱)$$

۵- محاسبه ثابت فنرها در سیستم جرم و فنر

برای محاسبه مقدار k_1 و k_2 طبق رابطه نیرو- تغییر مکان، وقتی که نیرو در وسط تیر وارد شود، از رابطه زیر استفاده خواهد شد [۱۷]:

$$F = k\ w_E\left(\frac{L}{2}\right) \qquad (۶۲)$$

بنابراین برای نانوتیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه ساده، k_1 و k_2 که به ترتیب ثابت فنر نانولوله‌های داخلی و خارجی هستند بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$k_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{EI_1n^4\pi^4}{2L^3\ \lambda_n\sin^2\ \frac{n\pi}{2}} \qquad (۶۳)$$

$$k_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{EI_2n^4\pi^4}{2L^3\ \lambda_n\sin^2\ \frac{n\pi}{2}} \qquad (۶۴)$$

برای تیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه گیردار:

$$k_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\ EI_1n^4\pi^4\ \cos(n\pi)}{L^3\ \lambda_n\sin^2(\frac{n\pi}{2})(1 - \cos(n\pi))} \qquad (۶۵)$$

$$k_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\ EI_2n^4\pi^4}{L^3\ \lambda_n\sin^2(\frac{n\pi}{2})(1 - \cos(n\pi))}\ ، \qquad (۶۶)$$

برای تیر تیموشنکو با تکیه‌گاه ساده:

$$k_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{EI_1n^4\pi^4}{2L^3\ \lambda_n\Lambda_n\ \sin^2\ \frac{n\pi}{2}} \qquad (۶۷)$$

$$k_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{EI_2 n^4 \pi^4}{2L^3\ \lambda_n \Lambda_n \sin^2 \frac{n\pi}{2}} \qquad (۶۸)$$

برای تیر تیموشنکو با تکیه‌گاه گیردار:

$$k_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{-EI_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_s\, GA} \qquad (۶۹)$$

$$k_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{-EI_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_s GA} \qquad (۷۰)$$

که

$$\beta = \frac{4n\pi (k_s GA)^2 B \sin(n\pi)}{\lambda_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}\ (1-\cos(n\pi))} \qquad (۷۱)$$

برای در نظر گرفتن تغییر شکل محلی در حین ضربه، از قانون هرتز مطابق رابطه (۴۹) استفاده شده است. سفتی تماسی k_c از رابطه زیر بدست می‌آید [۳۲]:

$$k_c = {}^4\!/_3\, E\sqrt{R} \quad , \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{E} = \frac{1+v_1^2}{E_1} + \frac{1+v_2^2}{E_2} \qquad (۷۲)$$

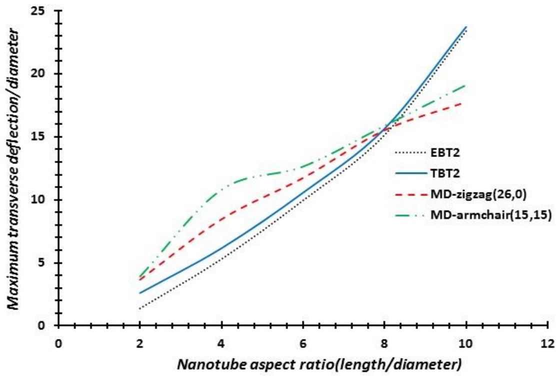
که R_1 و R_2 شعاع انحنا، E_1 و E_2 دو مدول یانگ و v_1 و v_2 دو ضریب پواسون برای هدف و پرتابه می‌باشند. در هنگام استفاده از این رابطه فرض بر این است که فاز بارگذاری و باربرداری یکسان باشند.

۶- نتایج و بحث

به منظور بررسی همخوانی نتایج دینامیک مولکولی و نتایج سیستم جرم و فنر، نمودارهای خیز نانولوله دو جداره در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند.

در این قسمت به‌منظور اعتبار سنجی نتایج و روابط استخراج شده در پژوهش با مرجع مورد نظر، خواص نانولوله مطابق با مرجع [۱۷]، به اینصورت که مدول یانگ E=1.6 GPa، ضریب پواسونν =0.3، قطر اولیه نانولوله d=2.03nm، طول اولیه نانولوله L=20.7nm و ضخامت t=0.34 nm در نظر گرفته شده است. همچنین نانوذره از جنس طلا با چگالی $\rho = 19300\ kg/m^3$ با سرعت اولیه V_0 =500 m/s در نظر گرفته شده است. در پژوهش حاضر، ساختار زیگزاک بصورت (26,0) در نظر گرفته شده است.

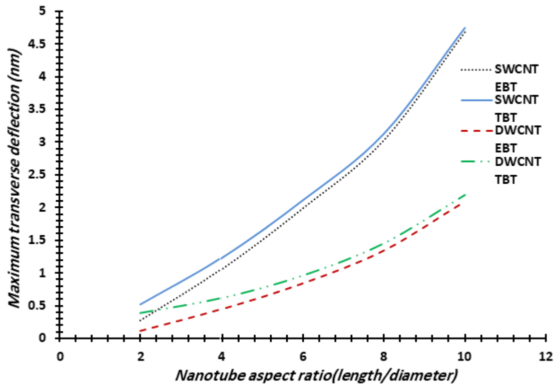
برای مطالعه رفتار نانولوله کربنی در اثر ضربه، نسبت‌های منظری (طول به قطر) متفاوت در نظر گرفته شده و در ادامه با کد نویسی روابط محاسبه شده در نرم افزار متلب، نتایج مربوط به تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نانولوله کربنی تک جداره و دو جداره در اثر ضربه بر حسب نسبت‌های منظری متفاوت در نمودارها نشان داده شده است. شکل (۳) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم تیر اویلر-برنولی و تیر تیموشنکو را برای حالت نانولوله تک جداره با تکیه‌گاه ساده و بر حسب نسبت طول به قطر نانولوله، نشان می‌دهد. در شکل (۳)، می‌توان خیز دینامیکی نانولوله تک جداره با سیستم جرم و فنر را با نتایج دینامیک مولکولی (MD) در مرجع [۱۷] مقایسه کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج استخراج شده از مدل‌سازی با سیستم جرم و فنر با نتایج دینامیک مولکولی از تطابق بسیار خوبی برخوردار می‌باشند.



شکل ۳ - نمودار خیز نانوتیر تک جداره اویلر– برنولی و تیموشنکو با تکیه‌گاه ساده، بر حسب نسبت طول به قطر نانولوله

شکل (۴) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم برای نانولوله اویلر- برنولی دو جداره (EBT-DWCNT) و نانولوله تیموشنکو (EBT-DWCNT) دو جداره را با تکیه‌گاه ساده بر اساس سیستم جرم و فنر، بر حسب نسبت طول به قطر نانولوله، بر اساس روابط (۵۵) تا (۵۸) نشان می‌دهد. همان‌گونه که از مقایسه نمودارهای تغییر شکل دینامیکی نانولوله تک جداره (SWCNT) و دو جداره (DWCNT) در شکل (۴) مشاهده می‌شود، خیز نانولوله‌های دو جداره در حالت تکیه‌گاه ساده کمتر از حالت تک جداره است. این کاهش خیز به علت تاثیر ضخامت در حالت دو جداره است؛ بدین معنی که لنگر اینرسی افزایش و به تبع آن خیز کاهش یافته است. همچنین در حالت تکیه‌گاه ساده، خیز نانوتیر اویلر- برنولی کمتر از نانوتیر تیموشنکو است. دلیل آن را

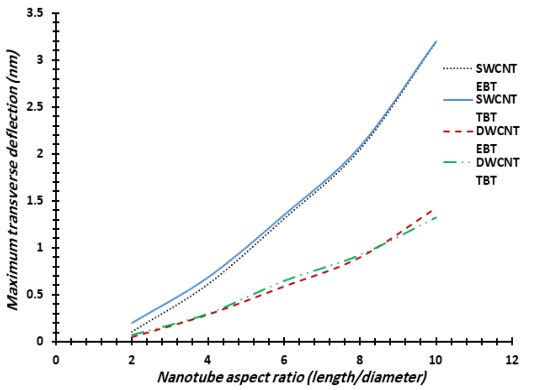
می‌توان دقت بیش‌تر تئوری تیر تیموشنکو و در نظر گرفتن کرنش برشی عرضی در این تئوری دانست. با توجه به شکل دیده می‌شود که در نسبت طول به قطر کمتر، اختلاف بین نتایج تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو بیشتر است و با افزایش نسبت طول به قطر، این اختلاف کاهش می‌یابد که بدلیل کاهش اثرات تغییر شکل برشی در نسبت طول به قطر بالا است.



شکل ۴- نمودار خیز نانوتیر تک جداره و دو جداره با تکیه‌گاه ساده، بر حسب نسبت طول به قطر نانولوله

شکل (۵) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم تیر اویلر- برنولی و تیر تیموشنکو را برای حالت نانولوله تک جداره و دو جداره با تکیه‌گاه گیردار، بر حسب نسبت طول به قطر نانولوله نشان می‌دهد.

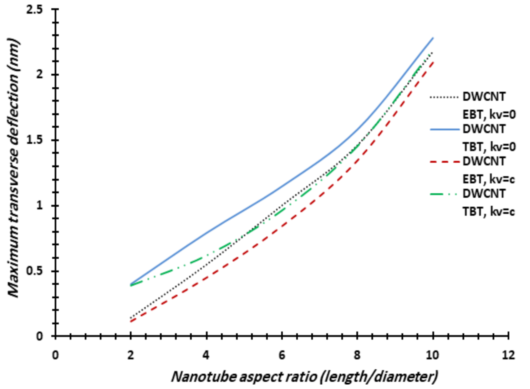
از نمودارهای شکل (۵) دیده می‌شود که در حالت تکیه‌گاه گیردار، خیز نانولوله‌های دو جداره کمتر از نانولوله تک جداره است. بنابراین برای هر نوع تکیه‌گاه، خیز نانولوله دو جداره کمتر از نانولوله تک جداره است. همچنین در حالت تکیه‌گاه گیردار نیز خیز نانوتیر اویلر- برنولی کمتر از نانوتیر تیموشنکو است.



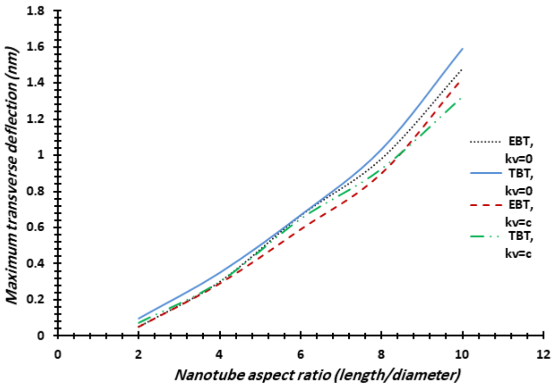
شکل ۵- نمودار خیز نانوتیر تک جداره و دو جداره با تکیه‌گاه گیردار، بر حسب نسبت طول به قطر نانولوله

شکل (۶) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم تیر اویلر- برنولی و تیر تیموشنکو را برای نانولوله دو جداره با تکیه‌گاه ساده نشان می‌دهد. شکل (۷) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم تیر اویلر- برنولی و تیر تیموشنکو را برای نانولوله دو جداره با تکیه‌گاه گیردار، در حالت وجود نیروی واندروالس و صرف‌نظر از نیروی واندروالس نشان می‌دهد.

با توجه به نمودارهای شکل (۶) و شکل (۷)، مشاهده می‌شود در هر دو نوع تکیه‌گاه، نیروی واندروالس سبب کاهش تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نسبت به حالتی که نیروی واندروالس نادیده گرفته شده است، می‌شود. علت این کاهش تغییر شکل، افزایش سفتی حاصل از در نظر گرفتن ثابت فنر نیروی واندروالس بین لایه‌ها است.



شکل ۶- نمودار خیز نانولوله دو جداره با تکیه‌گاه ساده

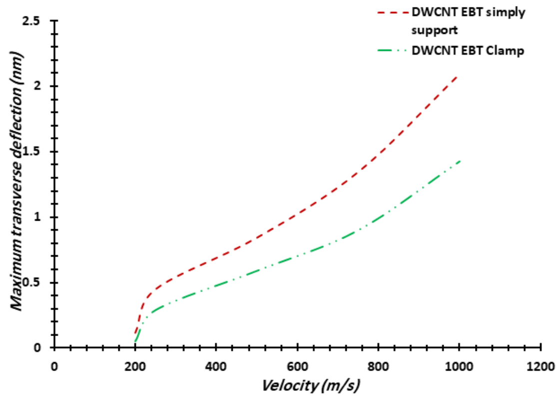


شکل ۷- نمودار خیز نانولوله دو جداره با تکیه‌گاه گیردار

شکل (۸) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم تیر اویلر- برنولی را برای نانولوله دو جداره با تکیه‌گاه ساده و گیردار، بر حسب تغییرات سرعت برخورد نانوذره نشان می‌دهد.

با توجه به شکل (۸)، مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت برخورد نانوذره، تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره افزایش می‌یابد. پیداست که شیب ابتدای نمودار بیش‌تر است؛ اما به این دلیل که در سرعت‌های بالا زمان

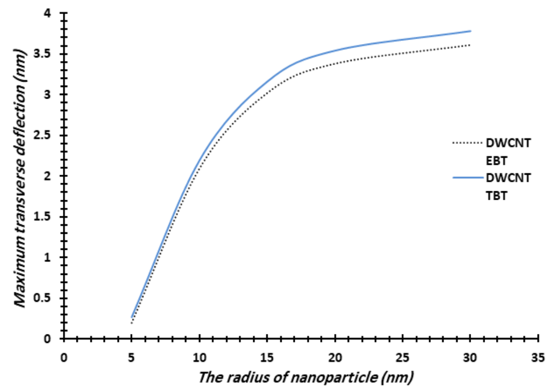
کافی برای رسیدن به پاسخ وجود دارد، با افزایش سرعت، شیب نمودار کاهش می‌یابد.



شکل ۸- نمودار خیز نانوتیر اویلر- برنولی دو جداره با تکیه‌گاه ساده و گیردار بر حسب سرعت نانوذره

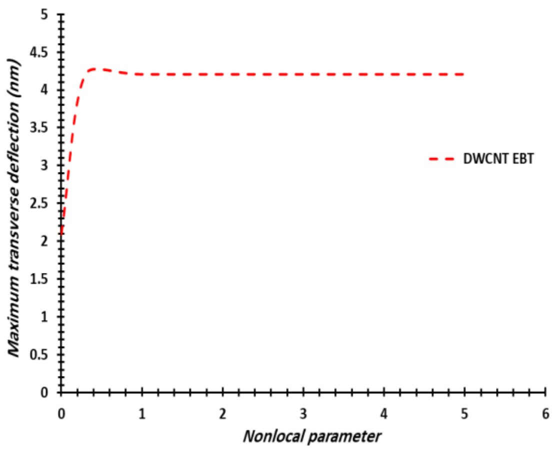
شکل (۹) تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره را بر اساس تئوری تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو، بر حسب تغییر شعاع نانوذره (تغییر جرم نانوذره) نشان می‌دهد.

با توجه به شکل (۹)، مشاهده می‌شود با افزایش جرم نانوذره، تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره افزایش می‌یابد.



شکل ۹- نمودار خیز دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره بر حسب شعاع (جرم) نانوذره

تغییرات خیز دینامیکی ماکزیمم تیر اویلر- برنولی برای نانولوله دوجداره با تکیه‌گاه ساده بر حسب پارامتر غیرمحلی در شکل (۱۰)۱۰ نشان داده شده است. با توجه به شکل (۱۰)، مشاهده می‌شود که افزایش پارامتر غیرمحلی سبب افزایش خیز دینامیکی ماکزیمم نانولوله دوجداره خواهد شد. اما در مقادیر بالاتر، اثرات پارامتر غیرمحلی کم و نتایج ثابت خواهند شد.



شکل ۱۰- نمودار خیز دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره بر حسب پارامتر غیرمحلی

۷- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی جدید، برای بررسی ضربه یک نانوذره بر یک نانوتیر نانوتیر دو جداره، بر اساس تئوری غیرمحلی تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو، با در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین لایه‌ها، ارائه شده است. از سیستم جرم و فنر برای مدل‌سازی ضربه یک نانوذره بر نانولوله دو جداره استفاده شده است. نتایج حاصل از این تحقیق با در نظر گرفتن مقادیر عددی مناسب، مورد بررسی قرار گرفت. تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر، برای تکیه‌گاه ساده بیش‌تر از تکیه‌گاه گیردار است. این نتیجه به علت صلبیت بیش‌تر نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار است. همچنین مشاهده شد که تغییر شکل ماکزیمم وسط نانوتیر، برای نانوتیر دو جداره کمتر از نانوتیر تک جداره است. این کاهش تغییر شکل به دلیل اثر ضخامت (تغییر لنگر اینرسی) و نیروی واندروالس بین لایه‌ها است. با توجه به این که نیروی واندروالس بین لایه‌ها لحاظ شده است، وجود نیروی واندروالس به دلیل افزایش سفتی، سبب کاهش تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم وسط نانوتیر نسبت به حالت بدون نیروی واندروالس خواهد شد. با توجه به نتایج، با افزایش سرعت برخورد نانوذره، میزان تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نیز افزایش می‌یابد. افزایش جرم نانوذره باعث افزایش میزان تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم نانولوله دو جداره شده است. همچنین افزایش پارامتر غیرمحلی موجب افزایش خیز دینامیکی ماکزیمم نانولوله دوجداره شده است.

مراجع

[1] M. Li, H. X. Tang, M. L. Roukes, "Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications", Nature nanotechnology, Vol. 2, No. 2, pp. 114-120, 2007.

[2] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", Journal of applied physics, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 2013.

[۳] محمد اسماعیل گلمکانی و جواد رضا طلب، "تحلیل خمش غیر خطی نانوصفحات اورتوتروپیک، بر اساس مدل غیر موضعی ارینگن توسط روش دیفرانسیل مربعات"، نشریه مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۳، شماره ۱۴، اسفند ۱۳۹۲، صفحه ۱۲۲- ۱۳۶.

[۴] مهرداد جبارزاده، حبیب طلعتی و احمدرضا نوری، "تحلیل صفحه گرافن دایروی با استفاده از تئوری مکانیک محیط پیوسته غیرموضعی"، نشریه مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۳، شماره ۱۳، اسفند ۱۳۹۲، صفحه ۵۷- ۶۶.

[5] W. T. Chien, C. S. Chen, H. H. Chen, "Resonant frequency analysis of fixed-free single-walled carbon nanotube-based mass sensor", Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 126, No. 1, pp. 117-121, 2006.

[6] G. Romano, R. Luciano, R. Barretta, & M. Diaco, "Nonlocal integral elasticity in nanostructures, mixtures, boundary effects and limit behaviours", Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 30, No. 3, pp. 641-655, 2018.

[7] F. Ebrahimi, M. R. Barati, & A. M. Zenkour, "A new nonlocal elasticity theory with graded nonlocality for thermo-mechanical vibration of FG nanobeams via a nonlocal third-order shear deformation theory", Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 25, No. 6, pp. 512-522, 2018.

[8] K. M. Liew, Y. Zhang, & L. W. Zhang, "Nonlocal elasticity theory for graphene modeling and simulation: prospects and challenges", Journal of modeling in Mechanics and Materials, Vol. 1, No. 1, 2017.

[9] H. Bellifa, K. H. Benrahou, A. A. Bousahla, A. Tounsi, & S. R. Mahmoud, "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 62, No. 6, pp. 695-702, 2017.

[۱۰] علی علوی نیا و صابر چهاردولی، "بررسی تجربی و عددی تأثیر سوراخ و انحنای لبه بر ویژگی‌های فروپاشی جاذب‌های استوانه ای تحت بار محوری ضربه ای"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۶، شماره ۵۳، تابستان ۱۳۹۷، صفحه ۵- ۵.

[۱۱] علی نظری، "مدل سازی انرژی ضربه ی فولادهای مرتبه ای با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۴، شماره ۴۵، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۴۵- ۱۶۲.

[۱۲] محمد دامغانی نوری و حسین رحمانی، "بررسی تاثیرات زمان فراز بار ضربه‌ای بر ضریب شدت تنش دینامیکی در ترک دو بعدی نیمه بینهایت بر روی جسم نامحدود"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۳، شماره ۴۰، بهار ۱۳۹۴، صفحه ۷۹- ۸۷.

[۱۳] سجاد صیفوری، اکبر علی بیگلو، غلامحسین لیاقت، محمد حسین پل، "بررسی عددی بار ضربه‌ای به نانوتیر به روش اجزای محدود صریح مقایسه با نانوتیر اویلر- برنولی و تیموشنکو"، نشریه مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۴، شماره ۱۳، اسفند ۱۳۹۳، صفحه ۲۵۹- ۲۶۴.

[14] S. Seifoori, G. H. Liaghat, "Low velocity impact of a nanoparticle on nanobeams by using a nonlocal elasticity model and explicit finite element modeling", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 8, No. 69, pp. 85-93, 2013.

[۱۵] سجاد صیفوری و غلامحسین لیاقت، "تحلیل و بررسی ضربه کم سرعت بر روی نانوتیر اویلر- برنولی با استفاده از تئوری غیر محلی الاستیسیته"، نشریه مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۳، شماره ۳، خرداد ۱۳۹۲، صفحه ۳۷- ۴۴.

[۱۶] سجاد صیفوری، غلامحسین لیاقت و مجید فولادی، "بررسی اثر ضربه کم سرعت بر نانوتیر تیموشنکو با استفاده از تئوری غیر محلی الاستیسیته"، نشریه مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۳، شماره ۸، آبان ۱۳۹۲، صفحه ۱۵۱- ۱۶۰.

[17] S. Seifoori, "Molecular dynamics analysis on impact behavior of carbon nanotubes", Applied Surface Science, Vol. 8, No. 326, pp. 12-18, 2015.

[18] J. N. Reddy, "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams", International Journal of Engineering Science, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.

[19] M. Simsek, "Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle", Computational Materials Science, Vol. 50, No. 7, pp. 2112-2123, 2011.

[20] P. Lu, H. P. Lee, C. Lu, P. Q. Zhang, "Dynamic Properties of Flexural Beams using a Nonlocal Elasticity Model", Journal of Applied Physics, Vol. 99, No. 7, pp. 73510-73519, 2006.

[21] P. Lu, H. P. Lee, C. Lu, P. Q. Zhang, "Application of Nonlocal Beam Models for Carbon Nanotubes", International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, No. 16, pp. 5289-5300, 2007.

[22] J. Yang, L. L. Ke, S. Kitipornchai, "Nonlinear Free Vibration of Single-Walled Carbon Nanotubes Using Nonlocal Timoshenko Beam Theory", Physica E, Vol. 42, No. 5, pp. 1727–1735, 2010.

[23] C. M. Wang, Y. Y. Zhang, X. Q. He, "Vibration of nonlocal Timoshenko beams", Nanotechnology, Vol. 18, No. 10, pp. 105401-105410, 2007.

[24] P. Lu, H. P. Lee, C. Lu, P. Q. Zhang, "Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model", Journal of Applied Physics, Vol 99, No. 7, pp. 73510-73519, 2006.

[25] P. Lu, H. P. Lee, C. Lu, P. Q. Zhang, "Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes", International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, No. 16, pp. 5289-5300, 2007.

[26] H. Ehteshami, M. A. Hajabasi, "Analytical approaches for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes modeled as multiple nonlocal Euler beams", Physica E, Vol. 44, No. 3, pp. 270-285, 2011.

[27] J. N. Reddy, "Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates", International Journal of Engineering Science, Vol. 48, No. 11, pp. 1507-1518, 2010.

[28] W. P. Schonberg, "Predicting the low velocity impact response of finite beams in cases of large area contact", International Journal of Impact Engineering, Vol. 8, No. 2, pp. 87-97, 1989.

[29] L. J. Sudak, "Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics", Journal of Applied Physics, Vol. 94, No. 11, pp. 7281-7288, 2003.

[30] K. N. Shivakumar, W. Elber, W. Illg, Prediction of Impact Force and Duration due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.421, pp. 675-680, 1984.

[31] S. Abrate, "Impact Engineering of composite structures", Springer Wien, New York, 2011.

[32] S. Seifoori, H. Hajabdollahi, "Impact behavior of single-layered graphene sheets based on analytical model and molecular dynamics simulation", Applied Surface Science, Vol. 8, No. 351, pp. 565-572, 2015.