

## شناسایی همزمان مکان و توابع شدت چندین منبع آلاینده فعال در رودخانه با استفاده از مدل سازی ریاضی

اکرم ده مردان<sup>۱</sup>، مهدی مظاهری<sup>۲\*</sup>، جمال محمدولی سامانی<sup>۳</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۲۶ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۲۴	
<b>واژگان کلیدی:</b> بازسازی توابع شدت منابع آلاینده، شناسایی مکان های منابع آلاینده، مدل معکوس، معادله جابه جایی-پراکندگی.	در پژوهش حاضر از مدل معکوس به منظور شناسایی مکان و توابع شدت منابع آلاینده نقطه ای مجهول در رودخانه استفاده شده است. در این تحقیق، حل معکوس معادله جابه جایی-پراکندگی با استفاده از رویکرد ریاضی انجام شده است. از اهداف اصلی این مدل، شناسایی مکان منبع آلاینده در حالت وجود چندین منبع در رودخانه بدون داشتن هیچ گونه اطلاعات پیشین از منابع در چارچوب کاملاً ریاضی است، به نحوی که مکان و تابع شدت هریک منابع آلاینده فعال در رودخانه به صورت همزمان شناسایی خواهد شد. نقطه قوت مدل معکوس ارائه شده آن است که تنها با اندازه گیری منحنی غلظت-زمان از چند نقطه معکوس، می توان مکان منبع را با بیشترین دقت به دست آورد. همچنین پس از یافتن مکان منبع در رودخانه، توابع شدت منابع آلاینده بازسازی می شود. صحت سنجی مدل معکوس ارائه شده توسط مثال های فرضی متعدد انجام شد. در مثال های فرضی، مکان و توابع شدت منابع آلاینده به صورت متفاوت در نظر گرفته شدند تا کارایی روش در شکل های مختلف توابع شدت مشاهده گردد. از آنجا که در حالت واقعی، اندازه گیری ها دارای خطا هستند، درصدی خطا به داده ها اضافه شد. در پایان، صحت سنجی بین حالت دقیق و نتایج حاصل از مدل معکوس انجام شد. در تمام موارد، نتایج مدل معکوس با دقت مناسبی قابل قبول بود.

### ۱- مقدمه

سموم کشاورزی است. منابع آب به دو دسته آب های سطحی و آب های زیرزمینی تقسیم می شوند. افزایش جمعیت، توسعه کشاورزی و رشد سریع صنایع، هر روز تقاضای آب را افزایش می دهد. بخشی از تأمین نیازها از طریق مهار آب های سطحی است که توسط ساخت سد صورت می گیرد. مدیریت منابع آب نیازمند تصمیم گیری آینده نگر با رویکردی جامع است. علم پویایی سیستم یک ابزار مدیریتی بر اساس این نگرش است. این علم قادر است شبیه سازی سیستم های پیچیده منابع آب را برای پشتیبانی

آب سالم و پاک یکی از مهم ترین نیازهای بشر است. آب سالم، بدون بو، طعم و رنگ است. تغییر در هریک از این پارامترها آلودگی آب را به همراه خواهد داشت. اغلب آلودگی آب ها در محیط زیست و جوامع، از قرن بیستم شروع به افزایش کرده است و دلیل آن هم تولید فاضلاب خانگی و صنعتی و گسترش روزافزون استفاده از کودها و

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m.mazaheri@modares.ac.ir

۱. کارشناسی ارشد سازه های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

۲. استادیار گروه سازه های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

۳. استاد گروه سازه های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

ارتباط با محیط زیست است که می‌تواند چنین توصیف شود: آلودگی آب‌های زیرزمینی و آب‌های سطحی را می‌توان با قرار دادن ایستگاه‌های شاهد، بررسی کرد. زمانی که سیگنال‌های دریافتی از ایستگاه‌های شاهد، غلظت آلاینده را به صورت افزایشی و غیرمعمول نشان دهند، در سریع‌ترین زمان ممکن، باید منبع آلاینده ناشناخته که مسبب این آلودگی است، شناسایی و کنترل شود [۴].

یافتن محل رهاسازی آلاینده نزدیک به سه دهه است که به‌عنوان یک مسئله چالش‌برانگیز در سطح جهان مطرح می‌شود.

در صورت ادامه این وضعیت، بشر با بحران کمبود آب مواجه خواهد شد. مهم‌ترین راه حفظ کیفیت منابع آب، تدوین قوانین و استانداردهای مناسب و سخت‌گیرانه و برنامه‌ریزی برای اجرای صحیح آن است. استانداردهای زیست‌محیطی، برای محافظت از سلامت انسان و حفاظت از محیط زیست وضع می‌شوند. در این استانداردها، حد مجاز یک ماده در محیط زیست، بدون اینکه اثر منفی بر انسان یا محیط زیست داشته باشد، تعیین می‌شود. کیفیت آب رودخانه‌ها باید به صورت مستمر پایش شود؛ زیرا برخی صنایع به دلیل وجود محدودیت‌ها اغلب به صورت نامحسوس و ناگهانی آلاینده‌ای با غلظت بالا وارد رودخانه می‌کنند.

مسئله یافتن اتفاقات گذشته، با تکیه بر شمار اندکی از مشاهدات با عدم قطعیت همراه است. در مسائلی که به صورت پیش رو مطرح می‌شود، مکان و زمان آلودگی مشخص است و هدف تعیین مقدار غلظت در یک مکان است. چنانچه مکان ورود آلاینده ناشناخته باشد، به‌منظور تعیین مکان باید از مدل‌های معکوس در زمان و مکان استفاده شود.

با توجه به مشخص بودن یا نبودن مکان و تابع شدت منبع، دو نوع آلودگی برای آب‌ها تعریف شده است؛ اول، آلودگی آب با منبع مشخص که در این نوع آلودگی، منشأ و مکان منبع مشخص و مقادیر غلظت در نقاط مشاهداتی مجهول است. به این مدل، مدل مستقیم<sup>۲</sup> می‌گویند. دوم، آلودگی آب با منبع نامشخص که مکان و تابع شدت این گونه آلودگی مجهول و مقادیر غلظت در نقاط مشاهداتی معلوم است. این نوع آلودگی برای محیط زیست بسیار مضر بوده، جلوگیری و کنترل آن بسیار دشوارتر از حالت قبل است. به

تصمیم‌گیری انجام دهد. با اجرای سیاست‌های مناسب نه‌تنها می‌توان نیازهای مورد نظر را در حالت موجود در حد قابل قبولی تأمین کرد، بلکه می‌توان توسعه نیازها را نیز در نظر گرفت [۱].

استفاده فزاینده از منابع آب‌های زیرزمینی در مناطق خشک در نتیجه رشد روزافزون اقتصاد به‌ویژه در بخش کشاورزی، منجر به تشدید روند نزولی سطح ایستابی در آبخوان‌ها شده است. بنابراین به یک چارچوب منطقی و نظام‌مند برای تصمیم‌گیری اصولی برای تخصیص منابع آب محدود، به نحوی که به‌طور مؤثر و مطلوب نیازهای جامعه را تأمین کند و نیز رشد اقتصادی را موجب شود، احتیاج است [۲].

همچنین انتقال آلاینده‌های موجود در خاک و آب زیرزمینی به آب‌های سطحی، باعث تخریب برخی از زیست‌بوم‌های آبی می‌شود. می‌توان با استفاده از روش شبکه عصبی، روند تغییرات شوری زه‌آب را مورد بررسی قرار داد [۳].

رودخانه‌ها، یکی از اصلی‌ترین منابع تأمین آب، به‌سرعت در حال آلوده شدن هستند. عمده‌ترین آلودگی‌های آب که بیشترین خسارت را به محیط زیست وارد می‌کند، عبارت‌اند از: آلودگی نفتی، آلودگی به وسیله مواد رادیواکتیو و آلودگی حرارتی. آلودگی‌های شیمیایی و فیزیکی نیز می‌تواند خطری برای محیط زیست باشد. بنابراین باید عوامل آلودگی آب، مانند کودهای شیمیایی، سموم و آفت‌کش‌ها، وپروس‌ها و باکتری‌ها، آلاینده‌ها (ذرات و مواد شیمیایی)، فاضلاب کارخانجات و خانه‌ها، زباله‌ها و... شناسایی شده، برای مقابله با آن‌ها قوانین و مقرراتی وجود داشته باشد [۴]. وجود آیین‌نامه‌هایی مبنی بر جلوگیری از آلودگی آب، کافی نیست و نیاز است کیفیت آب رودخانه‌ها به صورت مستمر پایش شود؛ زیرا برخی صنایع، قوانین را نادیده گرفته، میزان زیادی آلاینده را به صورت نامحسوس وارد رودخانه می‌کنند.

در طول چند دهه گذشته، لازم شده است که مسائل معکوس<sup>۱</sup> در زمینه‌های متعددی از علوم و مهندسی به کار گرفته شوند. به‌عنوان مثال، در علم زلزله‌شناسی، مسائل منبع معکوس برای تعیین کانون و شدت یک زلزله مورد استفاده قرار می‌گیرد. کاربرد دیگری از مسئله معکوس در

<sup>2</sup>. Forward model

<sup>1</sup>. Inverse problems

اگر تأثیر معادلات جریان و انتقال به‌عنوان عملگر  $L$  در نظر گرفته شود، تأثیر این عملگر بر منابع آلاینده و نتیجه آن را که توزیع مکانی و زمانی غلظت در دامنه حل است، می‌توان به صورت زیر نشان داد (مدل مستقیم):

$$c(x, t) = L(F(x, t)) \quad (۴)$$

در معادله فوق،  $c(x, t)$  برابر با توزیع مکانی و زمانی غلظت در دامنه مورد مطالعه و  $F(x, t)$  برابر با عبارت منبع است. اگر بتوان عملگر  $L^{-1}$  را به دست آورد، می‌توان مدل معکوس متناظر را به صورت زیر نشان داد (مدل معکوس):

$$F(x, t) = L^{-1}(c(x, t)) \quad (۵)$$

در این تحقیق سعی می‌شود عملگر  $L^{-1}$  در مسئله فوق در محیط رودخانه، با استفاده از روش ریاضی محاسبه گردد. در این تحقیق فرض می‌شود داده‌های مربوط به غلظت در دو نقطه  $a$  و  $b$  در رودخانه معلوم باشد، به طوری که  $a$  در بالادست رودخانه و  $b$  در پایین‌دست رودخانه نسبت به منبع آلاینده قرار داشته باشند ( $0 < a < S < b < l$ ).

رویکردهای محققان مختلف در زمینه برخورد با حل معکوس معادله انتقال از حیث روش حل، به سه حالت کلی است [۷]:

۱. حل مسئله معکوس به صورت یک مسئله شبیه سازی-بهینه‌سازی<sup>۱</sup>؛
۲. استفاده از روش‌های احتمالاتی و زمین‌آمار<sup>۲</sup>؛
۳. استفاده از روش‌های ریاضی<sup>۳</sup>.

در رویکردهای مبتنی بر فرموله کردن مسئله معکوس به صورت یک مسئله شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، با تغییر پارامترهای تصمیم مسئله (مکان‌ها و شدت‌های منابع آلاینده)، در یک فرایند تکراری در روش بهینه‌سازی، برای حداقل کردن اختلاف مقادیر محاسبه‌ای و مشاهده‌ای غلظت تلاش می‌شود. این روش علی‌رغم فرمولاسیون ساده، به قدرت محاسباتی بالا نیاز دارد. علاوه بر این، در حالت وجود خطا در داده‌ها و بدخیم بودن مسئله، این روش‌ها در حالت عادی، عملکردی مناسب ندارند.

در رویکردهای مبتنی بر روش‌های احتمالاتی و زمین‌آمار، با استفاده از روش‌های آماری، توزیع‌های احتمالاتی و اصول علم ژئواستاتیک، سعی می‌شود بدون استفاده از روش‌های

این مدل، مدل معکوس می‌گویند. مدل‌سازی معکوس یک پدیده معمولاً دشوارتر از مدل‌سازی مستقیم آن است [۵]. اگر  $l$  طول رودخانه و دو نقطه  $a$  و  $b$  در بازه‌ای از رودخانه به ترتیب در بالادست و پایین‌دست منبع آلاینده انتخاب شوند ( $0 < a < b < l$ ) و همچنین مکان و تابع شدت منبع آلاینده به ترتیب  $S$  و  $w$  باشد، می‌توان مسئله مستقیم و مسئله معکوس را به صورت زیر نوشت:

#### مسئله مستقیم:

اگر  $S$  و  $w$  منبع آلاینده معلوم باشد می‌توان غلظت را نسبت به زمان در نقاط  $a$  و  $b$  به دست آورد:

$$(S, w) \rightarrow \{c(a, t), c(b, t) \quad 0 < t < T\} \quad (۱)$$

در رابطه فوق،  $S$  مکان منبع آلاینده،  $w$  تابع شدت منبع،  $a$  مکان برداشت داده در بالادست منبع،  $b$  مکان برداشت داده در پایین‌دست منبع،  $c(a, t)$  توزیع زمانی غلظت و  $T$  کل زمان شبیه‌سازی است.

#### مسئله معکوس:

در طول زمان اگر در دو نقطه  $a$  و  $b$  داده‌های مربوط به غلظت برداشت شود، می‌توان با حل مسئله معکوس  $S$  و  $w$  منبع آلاینده نقطه‌ای را در رودخانه به دست آورد:

$$\{d_a(t), d_b(t) \quad 0 < t < T\} \rightarrow (S, w) \quad (۲)$$

در معادله فوق،  $d_a(t)$  و  $d_b(t)$  به ترتیب داده‌های سری زمانی غلظت در ایستگاه‌های مشاهداتی در بالادست و پایین دست منبع است.

منبع آلاینده مورد استفاده در این تحقیق، از نوع منبع آلاینده نقطه‌ای در نظر گرفته شده است. منبع آلاینده نقطه‌ای، منبعی است که مساحت آن (مساحتی که از آن تخلیه صورت می‌گیرد)، در مقایسه با مساحت محیطی که منبع در آن تخلیه می‌شود، بسیار ناچیز باشد، به طوری که بتوان آن را به صورت یک نقطه در نظر گرفت [۶]. مدل ریاضی معمول برای منبع آلاینده نقطه‌ای که توزیع زمانی و مکانی آن را نشان می‌دهد، به شکل زیر است:

$$F(x, t) = w(t)\delta(x - S) \quad (۳)$$

در رابطه فوق،  $S$  مکان منبع،  $w$  تابع شدت منبع و  $\delta()$  نیز برابر با تابع دلتای دیراک است.

<sup>۱</sup>. Simulation-optimization

<sup>۲</sup>. Geostatistic

<sup>۳</sup>. Direct method

(آنالیز الحاقی) استخراج شد. سپس مدل را با استفاده از راه حل‌های تحلیلی و برخی داده‌های واقعی توسعه دادند [۱۱]. قانع و همکاران (۱۳۹۵) از روش احتمال برگشتی برای تشخیص منابع آلاینده در رودخانه با شرایط غیریکنواخت و ماندگار استفاده کردند. مدل آن‌ها بر اساس آنالیز الحاقی برای کاربرد در رودخانه‌ای با شرایط عمومی توسعه داده شده است [۱۲]. قانع و همکاران (۱۳۹۶) توسط روش احتمال برگشتی، به شناسایی منبع آلاینده در آب‌های سطحی پرداخته‌اند. بر همین اساس، یک مدل عددی بر پایه آنالیز الحاقی توسعه دادند. در بخش اول، ابتدا کاربرد این مدل در رودخانه سورن انگلستان مورد بررسی قرار گرفته، سپس سعی شده است کاربرد این روش در شبکه‌ای از رودخانه‌ها نیز بررسی شود [۱۳].

#### ب. پیشینه تحقیقات انجام‌شده برای یافتن تابع شدت منبع آلاینده (رویکرد ریاضی)

اسکگز و کابالا (۱۹۹۵) زمان رهاسازی آلاینده در آب‌های زیرزمینی را با روش  $QR^1$  به دست آوردند. آن‌ها در این تحقیق، معادله پخشیدگی را به معادله جابه‌جایی-پراکندگی با حل اپراتور پخشیدگی  $QR$  در یک سیستم مختصات متحرک توسعه دادند [۱۴]. نیوپار و همکاران (۲۰۰۰) مقایسه‌ای بین روش‌های تیخونوف و  $MRE$  (Minimum Relative Entropy) انجام دادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که هر دو دارای عملکرد مناسبی هستند؛ اما در شرایط نبود خطای اندازه‌گیری، روش  $MRE$  بهتر عمل می‌کند. در صورتی که در شرایط وجود خطا، روش تیخونوف دارای عملکرد بهتری است [۱۵]. اتمادجا و بگترآغلو (۲۰۰۱) با استفاده از روش  $BBE^2$  که در حقیقت برای حل مسائل سهموی در بازه‌های زمانی طولانی ارائه شده بود، توانستند معادله انتقال را به صورت معکوس حل کنند. روش  $BBE$  ارائه‌شده در این تحقیق می‌تواند با استفاده از اندازه‌گیری‌های فعلی آلاینده در سفره‌های غیرهمگن، منبع را در زمان‌های قبل محاسبه کند [۱۶]. بگترآغلو و اتمادجا (۲۰۰۳) مقایسه‌ای بین روش‌های  $MJBBE^3$  و  $QR$  برای وارونگی هیدرولوژیک و به‌طور خاص برای بازسازی توزیع مکانی توده آلاینده ارائه کردند. روش  $QR$  در مواردی که محیط متخلخل ناهمگن باشد،

تکراری یا حداقل با تعداد تکرار بسیار کمتر نسبت به روش‌های شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، مجهولات مسئله کشف شود. در رویکردهای مبتنی بر روش‌های ریاضی، با استفاده از تکنیک‌های موجود در علم مسئله معکوس، سعی بر این است که مجهولات مسئله به صورت معین، در چارچوب ریاضی و بدون استفاده از روش‌های تکراری یا حداقل با تعداد تکرار بسیار کمتر نسبت به روش‌های شبیه‌سازی-بهینه‌سازی حل شوند. این روش‌ها معمولاً به محاسبات سنگین در قالب حلقه‌های تکرار نیاز ندارند. شایان ذکر است معمولاً ریاضیات و روابط مورد استفاده در رویکرد ریاضی، نسبت به بقیه روش‌ها پیچیده‌تر است. با توجه به نکاتی که بیان شد، دسته‌بندی تحقیقات پیشین به صورت زیر انجام می‌شود:

۱. پیشینه تحقیقات انجام‌شده (رویکردهای غیر ریاضی)؛
۲. پیشینه تحقیقات انجام‌شده برای یافتن تابع شدت منبع آلاینده (رویکرد ریاضی)؛
۳. پیشینه تحقیقات انجام‌شده برای یافتن مکان و تابع شدت منبع آلاینده (رویکرد ریاضی).

#### الف. پیشینه تحقیقات انجام‌شده (رویکردهای غیر ریاضی)

میلنز و پروچت (۲۰۰۷) روشی برای تشخیص منبع آلاینده در سفره‌های آب زیرزمینی در حالت غیرهمگن و چندبعدی ارائه دادند. آن‌ها با شبیه‌سازی پدیده به صورت معکوس در زمان نشان دادند که با این نوع شبیه‌سازی، کانتورهای غلظت جمع‌تر شده، زمانی که این کانتورها به نقطه واحد تبدیل شوند و غلظت ماکزیمم را نشان دهند، منبع آلاینده تشخیص داده شده است [۸]. چنگ و جیا (۲۰۱۰) مدل احتمالاتی برگشتی جزء کمی ارائه‌شده توسط نیوپار و ویلسون (۲۰۰۵) را با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق، در پهنه‌های آب سطحی با شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت در حالت دوبعدی به کار بردند. سپس، مدل را با استفاده از میانگین خطای نسبی بهینه کردند [۹] و [۱۰]. قانع و همکاران (۲۰۱۶) روش احتمال برگشتی ارائه‌شده برای شناسایی منبع آلودگی در آب‌های زیرزمینی را در شناسایی محل منبع آلاینده و زمان انتشار آلاینده در رودخانه به کار بردند. معادله حاکم بر حرکت احتمال به صورت بازگشتی با استفاده از یک روش آنالیز حساسیت

<sup>3</sup>. Marching-Jury Backward Beam Equation

<sup>1</sup>. Quasi-Reversibility

<sup>2</sup>. Backward Beam Equation

گیری تغییرات غلظت نسبت به مکان، مکان و تابع شدت منبع آلاینده را شناسایی کنند. اندازه‌گیری‌ها مربوط به کوپل  $BOD^2$  و DO است [۲۴]. وانگ و لیو (۲۰۰۸) حل معکوس معادله انتقال در رودخانه را به صورت معادله دیفرانسیل جزئی خطی سهموی با پارامترهای ثابت در نظر گرفتند. با استفاده از اطلاعات از قبل معلوم درباره منبع آلاینده، نشان دادند که حل معکوس معادله انتقال، در این حالت به صورت یکتا قابل محاسبه است [۲۵]. حمدی (۲۰۰۹) مسئله تشخیص منبع آلاینده نقطه‌ای را تحت فرضیات محدودکننده در نظر گرفت و با ثبت غلظت بالادست و پایین‌دست منبع نقطه‌ای، مکان و تابع غلظت وابسته به زمان منبع نقطه‌ای را استخراج کرد. وی با برقرار کردن روشی به صورت شبه‌صریح محل، منبع را تخمین زد و با ارائه فرضیات محدودکننده، تابع شدت منبع را از حل مستقیم یک سیستم خطی به دست آورد [۴]. حمدی (۲۰۱۱) شناسایی یک منبع آلاینده نقطه‌ای را با استفاده از معادله انتقال توسعه‌یافته دوبعدی به صورت خطی انجام داد. وی منبع مورد نظر را با در نظر گرفتن فرضیات محدودکننده و با اندازه‌گیری غلظت در مرز جریان خروجی از دامنه کنترل شناسایی کرده است. سپس با فرض اینکه تابع غلظت منبع، قبل از زمان کنترل نهایی تمام می‌شود، با برقراری یک روش شناسایی شبه‌صریح مبتنی بر برخی نتایج کنترل مرزی موجود توانست پارامترهای منبع مورد نظر را با اندازه‌گیری غلظت در مرز جریان خروجی و از اندازه‌گیری شار در مرز ورودی جریان به دست آورد [۲۶]. حمدی و مهفودهی (۲۰۱۳) با استفاده از معادله کلی انتقال به صورت یک‌بعدی و با در نظر گرفتن ضرایب متغیر مکانی پراکندگی، سرعت و واکنش و در دسترس داشتن اطلاعات پیشین در مورد منبع آلاینده، توانستند مکان و تابع شدت منبع آلاینده نقطه‌ای را به دست آورند [۲۷].

با توجه به تحقیقات انجام‌شده در این زمینه و بررسی ضعف‌های موجود در این تحقیقات، لازم است روشی بیان شود تا علاوه بر اینکه ضعف‌های تحقیقات موجود را برطرف سازد، بتواند با بیشترین سرعت ممکن به یافتن منشأ و منبع آلاینده بپردازد. در این مقاله، سعی شده بدون هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره منبع آلاینده و فقط با اطلاع داشتن محدوده تقریبی منبع و برداشت داده در دو نقطه از

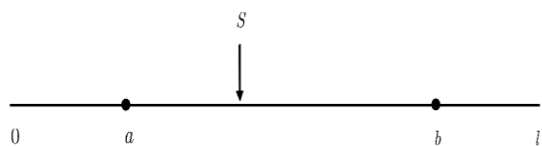
ضعیف عمل می‌کند؛ اما در مواردی که پارامترها همگن و داده‌های اولیه دارای عدم قطعیت هستند، بسیار کارآمد است [۱۷]. ژانگ و چن (۲۰۰۷) منبع آلاینده را در یک کابین محصور هواپیما، فقط با استفاده از یک سنسور در پایین‌دست منبع آلاینده، توسط روش QR، زمانی که غلظت آلاینده نسبت به زمان در اوج است، شناسایی کردند. روش QR به صورت معکوس، تابع چگالی احتمال<sup>۱</sup> را از موقعیت منبع آلاینده حل می‌کند. محلی که بیشترین PDF را داراست، به‌عنوان منبع آلاینده معرفی می‌شود [۱۸]. وانگ و لیو (۲۰۱۲) روش تحلیلی را برای شناسایی منبع آلاینده نقطه‌ای و در یک بعد ارائه کردند. روش تحلیلی مذکور، نیازمند وجود اطلاعات رصدشده از نقاطی متمایز در طول رودخانه است [۱۹]. مظاهری و همکاران (۲۰۱۵) مسئله برگشتی را در چارچوبی ریاضی و با استفاده از کاربرد تابع گرین حل کردند. مدل پیشنهادشده قادر به بازسازی غلظت رهاسده بر اساس روش تنظیم تیخونوف است [۲۰]. حمدی و همکاران (۲۰۱۵) حدود فعالیت زمانی مرتبط با برخی منابع ناشناخته را با کاربرد معادله جابه‌جایی-پراکندگی توسعه‌یافته خطی به صورت دوبعدی مورد شناسایی قرار دادند. آن‌ها با برقراری یک روش شناسایی با استفاده از ثبت غلظت در مرز خروجی جریان و ثبت شار بر مرز ورودی جریان در دامنه مورد بررسی توانستند حدود فعالیت زمانی را به دست آورند [۲۱].

### ج. پیشینه تحقیقات انجام‌شده برای یافتن مکان و تابع شدت منبع آلاینده (رویکرد ریاضی)

البادیا و همکاران (۲۰۰۵) روشی را برای یافتن مکان و تابع شدت یک منبع آلاینده در رودخانه ارائه کردند. آن‌ها برای تعیین منبع آلاینده، باید اطلاعاتی از گذشته منبع آلاینده در اختیار داشته باشند. آن‌ها با استفاده از اندازه‌گیری غلظت در نقاطی از رودخانه و همچنین دانستن زمان غیرفعال شدن منبع آلاینده، توانستند مکان و تابع شدت منبع آلاینده را در رودخانه شناسایی کنند [۲۲]. لینگ و همکاران (۲۰۰۶) مکان منبع ناشناخته را با استفاده از معادلات دوبعدی گرما با اندازه‌گیری‌های پراکنده به صورت یکتا ثابت کردند [۲۳]. البادیا و حمدی (۲۰۰۷) با در دست داشتن زمان رهاسازی آلاینده در گذشته توانستند با اندازه‌گیری غلظت در نقاطی از رودخانه و علاوه بر این، اندازه

<sup>2</sup>. Biochemical Oxygen Demand

<sup>1</sup>. Probability Density Function



شکل ۱: رودخانه فرضی و جانمایی منبع آلاینده و ایستگاه‌های اندازه‌گیری منحنی‌های غلظت-زمان معادله جابه‌جایی-پراکندگی حاکم در رودخانه فوق به صورت زیر نشان داده شده است [۶]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = \phi(x, t) \quad (6)$$

$$\phi(x, t) = w(t)\delta(x - S) \quad (7)$$

$$c(x, 0) = 0 \quad (8)$$

$$c(0, t) = 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (10)$$

در معادلات بالا،  $c$  غلظت آلاینده،  $D$  ضریب پراکندگی<sup>۱</sup>،  $V$  سرعت جریان،  $R$  ضریب واکنش<sup>۲</sup>،  $\phi(x, t)$  ترم منبع،  $w(t)$  برابر با تابع شدت منبع آلاینده،  $\delta(x - S)$  برابر با تابع دلتای دیراک<sup>۳</sup>،  $S$  مکان منبع،  $l$  طول رودخانه و  $x$  و  $t$  نیز به ترتیب بیانگر بعد مکان و زمان در معادلات هستند. معادله (۸) بیانگر شرط اولیه و معادلات (۹) و (۱۰) شرایط مرزی حاکم در این رودخانه هستند.

## ۲-۱-۲- مدل معکوس جابه‌جایی-پراکندگی در رودخانه با وجود یک منبع آلاینده

شناسایی مکان و بازایی تابع شدت منبع آلاینده در رودخانه را می‌توان توسط کاربرد مدل معکوس انتقال آلاینده در رودخانه انجام داد. برای رسیدن به این هدف باید داده‌های مربوط به توزیع زمانی و مکانی غلظت در اختیار باشد. در این بخش، در دو مرحله مکان و تابع شدت منبع آلاینده به دست می‌آید.

### الف. شناسایی مکان منبع آلاینده در رودخانه

با برداشت غلظت در دو نقطه از رودخانه در طول زمان مشخص، می‌توان مکان منبع آلاینده را در رودخانه تشخیص داد.

رودخانه، یکی در بالادست و دیگری در پایین‌دست منبع آلاینده، با بیشترین سرعت ممکن و صرف زمان کمتر نسبت به سایر روش‌ها، به مکان منبع آلاینده دسترسی پیدا کرد. پس از یافتن مکان منبع، می‌توان به راحتی تابع غلظت آلاینده رها شده در رودخانه را بازسازی کرد. از آنجا که فعالیت هم‌زمان چند منبع آلاینده در رودخانه، دور از انتظار نیست، مجهول بودن مکان و تابع شدت هر یک از این منابع، پیچیدگی مسئله را به مراتب چند برابر خواهد کرد. ورود آلاینده‌هایی با مکان و تابع شدت مجهول در رودخانه، برای محیط زیست خطری بزرگ خواهد بود؛ بنابراین در این مقاله به یافتن همه منابع آلاینده مجهول در رودخانه در چارچوب کاملاً ریاضی پرداخته می‌شود. این تحقیق در شرایطی انجام شده است که هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره منابع آلاینده در دسترس نیست و تنها با برداشت داده در نقاط محدودی از رودخانه صورت گرفته است. یافتن مکان‌های منابع آلاینده و شناسایی توابع شدت منابع در این تحقیق در بیشترین سرعت ممکن و بدون استفاده از الگوریتم‌های تکرار شونده صورت گرفته است.

این نتایج باعث می‌شود آگاهی نسبت به محیط بیشتر شده، از آسیب‌های احتمالی به محیط زیست پیشگیری گردد.

## ۲. مبانی تئوری و روش‌ها

در مقاله مورد بررسی، هدف این است که مکان و توابع شدت همه منابع آلاینده موجود در رودخانه شناسایی شوند. برای این منظور، ابتدا رودخانه‌ای مد نظر است که در آن تنها یک منبع فعالیت دارد، مکان و تابع شدت این منبع مجهول است و در ضمن هیچ‌گونه اطلاعاتی از منبع در اختیار نیست. برای شناسایی منبع مجهول در رودخانه، برداشت داده از دو ایستگاه مشاهداتی در طول رودخانه انجام می‌شود. دو ایستگاه مذکور باید به گونه‌ای اختیار شوند که اولی در بالادست منبع و دومی در پایین‌دست منبع قرار گیرد. با توجه به اینکه در حل معکوس معادله جابه‌جایی-پراکندگی، حل مستقیم آن نیز مورد نیاز است، حل مستقیم آن در ادامه انجام می‌شود. در انتها، این مدل به رودخانه‌ای توسعه داده می‌شود که هم‌زمان چند منبع آلاینده در آن فعالیت می‌کنند. رودخانه مورد نظر به طول  $l$  به صورت زیر است (شکل ۱):

<sup>3</sup>. Dirac delta function

<sup>1</sup>. Dispersion coefficient

<sup>2</sup>. Reaction coefficient

و  $\varphi_r(x)$  به صورت زیر است:

$$\varphi_r(x) = -\frac{e^{\frac{bV}{r_1-r_2}} \left[ e^{r_1(x-b)} - e^{r_2(x-b)} \right]}{r_1 - r_2} H(x-b) + \gamma \left[ e^{r_1 x} - e^{r_2 x + a(r_1-r_2)} \right]$$

$$\gamma = \frac{e^{\frac{bV}{r_1-r_2}} \left[ r_1 e^{r_1(l-b)} - r_2 e^{r_2(l-b)} \right]}{(r_1 - r_2) \left[ r_1 e^{r_1 l} - r_2 e^{r_2 l + a(r_1-r_2)} \right]}$$

(۱۷)

در معادلات بالا،  $H()$  تابع هویساید است. در معادلات فوق  $c(a, t)$  و  $c(b, t)$ ، داده‌های اندازه‌گیری شده در طول زمان در دو ایستگاه مشاهداتی و  $c(x, T)$  پروفیل مکانی غلظت در زمان نهایی در همه نقاط رودخانه است. برداشت این پروفیل در رودخانه امری دشوار است؛ زیرا به ایستگاه‌های فراوان در طول رودخانه و برداشت هم‌زمان داده در این ایستگاه‌ها نیاز داریم. در بخش‌های بعد، روش ابتکاری چگونگی برداشت این مجهول در رودخانه مورد بحث قرار می‌گیرد. پس از ارائه الگوریتم شناسایی مکان منبع آلاینده در مطالب مذکور، به چگونگی بازیابی تابع شدت منبع پرداخته می‌شود.

**ب. شناسایی تابع شدت منبع آلاینده در رودخانه**

پس از ارائه الگوریتم شناسایی مکان منبع آلاینده، در ادامه به چگونگی بازیابی تابع شدت منبع پرداخته می‌شود. معادله استفاده شده در این بخش، معادله انتگرالی زیر است:

$$c(x, t) = \int_0^t w(\tau) G(x, x_s, t - \tau) d\tau \quad (18)$$

در معادله فوق،  $w(\tau)$  برابر با تابع شدت منبع آلاینده و  $x_s$  نیز برابر با مکان آن است.  $G(x, x_s, t)$  از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$G(x, x_s, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{\frac{V(x-x_s)}{2D} - \left( \frac{V^2}{4D} \right) t} \times \left[ e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+x_s)^2}{4Dt}} \right] \quad (19)$$

حل معادله انتگرالی (۱۸) در حقیقت، حل یک مسئله معکوس خطی است که با گسسته‌سازی و تبدیل آن به یک دستگاه معادلات خطی شامل مقادیر گسسته تابع  $w(\tau)$  به‌عنوان مجهولات، انجام می‌شود.

**تذکره ۱:** دستگاه تشکیل شده در اینجا، معمولاً دستگاهی بدخیم است و برای حل آن باید از تکنیک‌های خاص استفاده کرد. حل یک دستگاه خطی فرامعین در حالت عادی با تبدیل آن به یک مسئله حداقل مجزورات خطی

$$S = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[ \frac{\gamma \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{aV}{r_1-r_2} e^{-\frac{aV}{r_1-r_2}} - \theta}{\gamma \frac{Q_1}{Q_2} e^{(r_1-r_2)a} + \frac{aV}{r_1-r_2} e^{-\frac{aV}{r_1-r_2}} - \theta} \right] \quad (11)$$

معادله (۱۱)، معادله استخراج شده مکان منبع آلاینده در رودخانه است. با به دست آوردن پارامترهای معادله می‌توان مکان منبع را شناسایی کرد. در ادامه، به روش محاسبه و معرفی ضرایب رابطه مکان منبع آلاینده پرداخته می‌شود. با استفاده از معادلات زیر می‌توان به معادله مکان منبع ارائه شده در فوق رسید:

$$Q_1 = \int_a^b c(x, T) \frac{e^{-\frac{Vx}{D}}}{D} \varphi_1(x) dx + \int_0^T \left[ c(a, t) + e^{-\frac{Vb}{D}} \varphi_1'(b) c(b, t) \right] dt \quad (12)$$

$$Q_2 = \int_a^b c(x, T) \frac{e^{-\frac{Vx}{D}}}{D} \varphi_2(x) dx + \int_0^T \left[ c(b, t) - e^{-\frac{Va}{D}} \varphi_2'(a) c(a, t) \right] dt \quad (13)$$

$$\frac{\varphi_2(S)}{\varphi_1(S)} = \frac{Q_2}{Q_1} \quad (14)$$

با حل معادله (۱۴) مکان منبع طبق معادله شناسایی می‌شود.  $\varphi_1(x)$  و  $\varphi_2(x)$  معادلات مذکور از حل معادلات دیفرانسیل زیر به دست می‌آیند.

$$\varphi_1''(x) - \frac{V}{D} \varphi_1'(x) - \frac{R}{D} \varphi_1(x) = -e^{-\frac{Vx}{D}} \delta(x-a) \quad \varphi_1(\cdot) = \varphi_1(b) = 0 \quad (15)$$

$$\varphi_2''(x) - \frac{V}{D} \varphi_2'(x) - \frac{R}{D} \varphi_2(x) = -e^{-\frac{Vx}{D}} \delta(x-b) \quad \varphi_2(a) = \varphi_2'(l) = 0 \quad (16)$$

معادلات دیفرانسیل همراه شرایط مرزی در بالا ارائه شده است که اگر  $r_1$  و  $r_2$  ریشه‌های معادله مشخصه  $Dr^2 - Vr - R = 0$  باشند، با حل معادلات مذکور می‌توان  $\varphi_1(x)$  و  $\varphi_2(x)$  را به صورت زیر استخراج کرد.

$$\varphi_1(x) = -\frac{e^{\frac{aV}{D}} \left[ e^{r_1(x-a)} - e^{r_2(x-a)} \right]}{r_1 - r_2} H(x-a) + \theta (e^{r_1 x} - e^{r_2 x})$$

$$\theta = \frac{e^{\frac{aV}{D}} \left[ e^{r_1(b-a)} - e^{r_2(b-a)} \right]}{(r_1 - r_2) (e^{r_1 b} - e^{r_2 b})} \quad (17)$$

$$c(x, t) = \int_0^t \int_0^l \phi(\zeta, \tau) G(x, \zeta, t - \tau) d\zeta d\tau \quad (23)$$

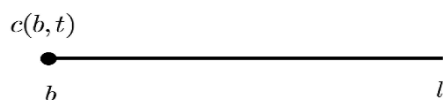
$$G(x, \zeta, t) = A e^{-\frac{V\zeta}{D} - Rt} + \frac{1}{l} e^{-\frac{V(\zeta-x)}{2D} - \left(R + \frac{V^2}{4D}\right)t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\zeta)}{1 + \mu_n^2} e^{-\frac{Dn^2 t}{l^2}} \quad (24)$$

$$A = -\frac{\frac{V}{D}}{e^{-\frac{Vl}{D}} - 1} \quad (25)$$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \mu_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (26)$$

$$\mu_n = \frac{-Vl}{\sqrt{D\pi n}} \quad (27)$$

در این تحقیق،  $c(a, t)$ ،  $c(b, t)$  که همان منحنی‌های غلظت-زمان هستند، از اندازه‌گیری غلظت در دو ایستگاه مشاهداتی به دست آمدند. برای شناسایی مکان منبع آلاینده، نیاز به اندازه‌گیری پروفیل مکانی غلظت یا  $c(x, T)$  در رودخانه است که امری هزینه‌بر و عملاً غیرممکن خواهد بود. بر این اساس، در ادامه راه‌حلی برای یافتن پروفیل مکانی غلظت در زمان  $T$  ارائه می‌شود. با توجه به شکل (۱)، اگر رودخانه به طول  $b$  تا  $l$  در نظر گرفته شود (شکل ۲)، طبق مراحل زیر می‌توان پروفیل مکانی را محاسبه کرد.



شکل ۲: رودخانه‌ای به طول  $b$  تا  $l$

رودخانه فوق، بخشی از رودخانه شکل (۱) بوده که قرار است پروفیل مکانی در زمان  $T$  از این رودخانه استخراج شود، برداشت داده در مکان  $b$  باید به قدری زیاد باشد که کل غلظت آلاینده از این نقطه بگذرد و منحنی غلظت-زمان در این نقطه به صفر برسد. با توضیحات مذکور، معادله جابه‌جایی-پراکندگی همراه شرایط مرزی و اولیه به قرار زیر است:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = 0 \quad (28)$$

$$c(x, 0) = 0 \quad x \in (b, l) \quad (29)$$

$$c(b, t) = d_b(t) \quad t \in (0, T) \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (31)$$

در معادله (۳۰)،  $d_b(t)$  منحنی غلظت-زمان در نقطه  $b$  است. حل معادله (۲۸) با شرایط اولیه و مرزی ارائه‌شده در

قابل انجام است. بر این اساس، برای دستگاه جوابی به دست می‌آید که این جواب، نرم درجه دوم اقلیدسی آن را حداقل می‌کند.

حل دستگاه‌های خطی فرامعین در حالت عادی (خوش‌خیم) می‌تواند توسط روش حداقل مجذورات خطی انجام شود. در صورت بدخیم بودن دستگاه، باید دستگاه را با روشی به یک دستگاه خوش‌خیم تبدیل کرد. این کار توسط روش‌های تنظیم انجام می‌شود. یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین روش‌های تنظیم، روش تیخونوف است [۲۹]. در روش تیخونوف، مسئله حداقل مجذورات خطی معمولی، با معادله زیر جایگزین می‌شود:

$$\min_x \|Ax - b\|_p + \lambda^r \|Kx\|_p \quad (20)$$

در رابطه فوق،  $\lambda$  برابر با پارامتر تنظیم و ماتریس  $K$  نیز برابر با ماتریس عملگر مشتقی است که درجه آن درجه تنظیم را نشان می‌دهد. برای تنظیم درجه صفر، ماتریس  $K$  برابر با ماتریس همانی از درجه  $m$  است. جواب مسئله به صورت زیر است [۲۸]:

$$x = (A^T A + \lambda^r K^T K)^{-1} A^T b \quad (21)$$

اضافه کردن قید  $\lambda^r \|Kx\|_p$  به مسئله حداقل مجذورات خطی معمولی، مشکل بدخیم بودن مسئله را حل می‌کند. برای تعیین پارامتر تنظیم،  $\lambda$ ، از روش L-curve استفاده شده است. به کمک این روش، به‌زای مقادیر مختلف پارامتر تنظیم،  $\lambda$ ، مسئله (۲۲) حل می‌شود و به‌زای هر حل، مقدار عبارت  $\|Kx\|_p$  در برابر  $\|Ax - b\|_p$  در مقیاس لگاریتمی-لگاریتمی رسم می‌گردد. بهترین پاسخ برای پارامتر تنظیم ( $\lambda_{opt}$ )، در گوشه این منحنی خواهد بود. این امر بدین علت است که در این نقطه، تعادل بین اثر عبارات  $\|Kx\|_p$  و  $\|Ax - b\|_p$  در مسئله برقرار می‌شود.

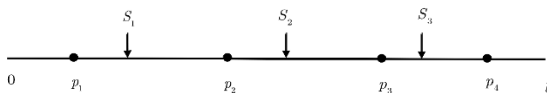
## ۲-۲-۲ مدل مستقیم جابه‌جایی-پراکندگی در رودخانه با وجود یک منبع آلاینده

با دانستن مکان و تابع شدت منبع آلاینده با حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکندگی، می‌توان توزیع زمانی غلظت را در نقاط مختلف رودخانه به دست آورد.

حل مستقیم معادله (۶) با استفاده از روش تابع گرین در حل معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت زیر انجام شده است:



در این بخش، منابع آلاینده موجود در رودخانه می‌تواند هر تعدادی در نظر گرفته شود؛ اما برای راحتی فهم این بخش، به طور مثال تعداد منابع موجود در رودخانه سه عدد در نظر گرفته شده است. بنابراین، در دو نقطه بالادست و پایین دست هر منبع آلاینده در رودخانه توزیع زمانی غلظت برداشت می‌شود. سپس با مدل ارائه شده در بخش قبل، مکان و شدت منابع آلاینده به صورت معکوس به دست می‌آید. مطابق شکل (۳)، سه منبع آلاینده در فواصلی از رودخانه قرار دارند. نقاط شاهد ( $p_i$ ) در شکل مشخص شده است. شایان ذکر است نقاط برداشت داده در بالادست و پایین دست رودخانه باید دارای ویژگی‌هایی باشند. ایستگاه برداشت داده در بالادست منبع آلاینده باید به صورتی انتخاب شود که نسبت به پراکندگی و سرعت رودخانه مقداری هر چند ناچیز از غلظت به این نقطه برسد؛ اما نقطه پایین دست منبع آلاینده، هر مکانی در پایین دست رودخانه می‌تواند انتخاب شود.



شکل ۳: موقعیت ایستگاه‌های اندازه‌گیری غلظت در رودخانه‌ای با وجود سه منبع آلاینده

#### ۲-۴- مدل مستقیم جابه‌جایی-پراکندگی در رودخانه‌ای با وجود سه منبع آلاینده

برای شناسایی مکان و تابع شدت منابع آلاینده موجود در رودخانه باید در نقاطی از رودخانه غلظت ثبت شود؛ اما از طرفی، چون این تحقیق در رودخانه‌ای فرضی انجام شده است، با استفاده از حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکندگی با وجود سه منبع آلاینده مقادیر غلظت در ایستگاه‌های مورد نظر محاسبه می‌شود. در ادامه، معادله جابه‌جایی-پراکندگی برای چند منبع آلاینده بازنویسی می‌گردد.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = w_1(t)\delta(x - S_1) + w_2(t)\delta(x - S_2) + w_3(t)\delta(x - S_3) \quad (33)$$

$$c(x, 0) = 0 \quad (34)$$

$$c(0, t) = 0 \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (36)$$

مطالب فوق با استفاده از روش تابع گرین در حل معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت زیر انجام شده است:

$$c(x, t) = -D \int_0^t d_b(\tau) G(x, \cdot, t - \tau) d\tau \quad (32)$$

با توجه به حل فوق، پروفیل مکانی در طول  $b$  تا  $l$  در زمان  $T$  مشخص می‌شود. از طرفی، در طول صفر تا  $b$  در طول رودخانه نیز پروفیل مکانی در زمان  $T$  برابر صفر است؛ پس با توجه به توضیحات بالا، پروفیل مکانی در طول رودخانه تنها با اندازه‌گیری سری زمانی در نقطه  $b$  به دست می‌آید. باید دقت کرد برای یکتا بودن پاسخ مدل معکوس، در حالت وجود یک منبع آلاینده، نقطه شاهد در بالادست منبع آلاینده به صورتی انتخاب شود که مقداری آلاینده، هر چند ناچیز، به این نقطه برسد. موقعیت نقطه شاهد در بالادست منبع آلاینده، ارتباط مستقیم با پارامترهای جریان دارد، به صورتی که اگر ضریب پراکندگی هر چه کمتر و ضریب سرعت بیشتر باشد، موقعیت نقطه شاهد باید نزدیک‌تر به منبع آلاینده باشد و اگر ضریب پراکندگی زیاد و ضریب سرعت کم باشد، موقعیت نقطه شاهد در بالادست رودخانه می‌تواند دورتر از منبع آلاینده انتخاب شود. موقعیت نقطه شاهد در پایین دست رودخانه، هر جایی می‌تواند باشد و تنها شرط آن این است که توابع ویژه در آن نقطه صفر نشود. اندازه‌گیری غلظت در نقطه شاهد پایین دست رودخانه تا زمانی ادامه دارد که غلظت آلاینده به صورت کامل از نقطه شاهد بگذرد یا به عبارت دیگر، اندازه‌گیری غلظت تا زمانی ادامه داشته باشد که دیگر هیچ‌گونه اثری از آلاینده در آن نقطه مشاهده نشود.

پس از محاسبه منبع آلاینده مجهول در رودخانه‌ای با وجود یک منبع، مدل برای حالت وجود چند منبع در رودخانه توسعه می‌یابد. در ادامه، به طور مفصل به این موضوع پرداخته می‌شود.

#### ۲-۳- مدل معکوس جابه‌جایی-پراکندگی در رودخانه‌ای با وجود چند منبع آلاینده

در این مقاله سعی شده است بتوان هم‌زمان منابع آلاینده فعال در رودخانه را شناسایی کرد؛ زیرا وجود چند منبع آلاینده در رودخانه و مجهول بودن مشخصات مربوط به منبع، از جمله مکان و تابع شدت ره‌اشده آلاینده بیشتر به واقعیت نزدیک‌تر است و پیچیدگی مسئله را دوچندان می‌کند. بنابراین در این تحقیق، ابتکاری برای شناسایی این منابع ارائه شده است.

نقاط  $p_1, p_2, p_3$  و  $p_4$  از معادله (۳۷) کم شوند تا بتوان مکان و شدت دومین منبع آلاینده را محاسبه کرد.

### ب. شناسایی مکان و تابع شدت دومین منبع آلاینده در رودخانه

پس از به دست آوردن منحنی غلظت-زمان حاصل از معادله (۳۷) در نقاط  $p_1, p_2, p_3$  و  $p_4$  و کم کردن آن‌ها از منحنی‌های حاصل از سه منبع آلاینده، منحنی‌های جدیدی به دست می‌آید که می‌توان با منحنی‌های جدید نقاط  $p_1$  و  $p_2$  مکان  $S_2$  را مانند بخش قبل شناسایی کرد. با در دست داشتن مکان منبع آلاینده می‌توان شدت منبع آلاینده ( $w_2(t)$ ) را نیز مانند بخش قبل شناخت. پس از یافتن شدت دومین منبع آلاینده، معادله جابه‌جایی-پراکندگی به صورت زیر نوشته می‌شود و به صورت مستقیم نمودارهای غلظت-زمان در ایستگاه‌های  $p_1$  و  $p_2$  محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = w_1(t) \delta(x - S_1) \quad (41)$$

$$c(x, 0) = 0 \quad (42)$$

$$c(0, t) = 0 \quad (43)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (44)$$

نمودارهای غلظت-زمان تولیدشده در نقاط  $p_1$  و  $p_2$  از معادله (۴۱) باید از نمودارهای غلظت-زمان تولیدشده در نقاط  $p_3$  و  $p_4$  از معادلات (۳۳) و (۳۷) کم شوند.

### ج. شناسایی مکان و تابع شدت سومین منبع آلاینده

برای شناسایی سومین منبع آلاینده در رودخانه و با توجه به اینکه شدت‌های منبع آلاینده اول و دوم به دست آمده است، هرکدام به صورت جدا در معادله جابه‌جایی-پراکندگی حل شده، خروجی‌های خود را که همان منحنی‌های غلظت-زمان در نقاط  $p_1$  و  $p_2$  است، تولید می‌کنند. حال، این منحنی‌های غلظت-زمان که از معادلات (۳۷) و (۴۱) تولید شدند، باید از منحنی‌های غلظت-زمان در نقاط  $p_1$  و  $p_2$  در معادله (۳۳) کم شوند و خروجی آن برای محاسبه آخرین منبع آلاینده به کار گرفته شود. پس از در دست داشتن منحنی‌های جدید مذکور، می‌توان مانند بخش قبل، مکان منبع آلاینده سوم را محاسبه کرد و سپس به پیدا کردن شدت این منبع آلاینده پرداخت. شایان ذکر

معادلات فوق، معادله جابه‌جایی-پراکندگی همراه با شرایط اولیه و مرزی حاکم بر رودخانه شکل ۳ هستند. برای در دست داشتن مقادیر غلظت در ایستگاه‌های اندازه‌گیری ( $p_1, p_2, p_3, p_4$ ) باید معادله فوق حل شود. سپس نمودارهای غلظت-زمان از این بخش استخراج می‌گردد.

بعد از اینکه نمودارهای غلظت-زمان در  $p_1, p_2, p_3$  و  $p_4$  استخراج شد، به اثبات مکان و شدت اولین منبع آلاینده پرداخته می‌شود.

برای یکتایی پاسخ مدل معکوس در حالت وجود چند منبع آلاینده در رودخانه، نحوه قرار گرفتن نقاط شاهد در رودخانه‌ای با چند منبع آلاینده به گونه‌ای است که در بالادست و پایین‌دست هر منبع آلاینده، یک نقطه شاهد قرار بگیرد یا به عبارت دیگر، نقطه شاهد پایین‌دست منبع آلاینده اول، نقطه شاهد بالادست منبع آلاینده دوم نیز باشد. محل قرار گرفتن نقطه شاهد بین دو منبع آلاینده باید به گونه‌ای باشد که نقطه شاهد نزدیک‌تر به منبع آلاینده دوم قرار گیرد تا مقداری هرچند ناچیز از منبع دوم به نقطه شاهد بالادست خود برسد.

### الف. شناسایی مکان و تابع شدت اولین منبع آلاینده در رودخانه

فرض می‌شود تنها یک منبع آلاینده در رودخانه فعال است و با استفاده از منحنی‌های غلظت-زمان در ایستگاه‌های  $p_1$  و  $p_2$  مکان  $S_1$  مانند بخش قبل شناسایی می‌شود. با داشتن مکان منبع آلاینده می‌توان شدت منبع آلاینده در رودخانه ( $w_1(t)$ ) را نیز مانند بخش قبل شناسایی کرد. پس از یافتن شدت اولین منبع آلاینده، معادله جابه‌جایی-پراکندگی به صورت زیر نوشته می‌شود و به صورت مستقیم نمودارهای غلظت-زمان در ایستگاه‌های  $p_1$  و  $p_2$  محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rc = w_1(t) \delta(x - S_1) \quad (37)$$

$$c(x, 0) = 0 \quad (38)$$

$$c(0, t) = 0 \quad (39)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (40)$$

نمودارهای غلظت-زمان تولیدشده در نقاط  $p_1$  و  $p_2$  از معادله (۳۳) باید از نمودارهای غلظت-زمان تولیدشده در

مدل در حالت وجود چند منبع آلاینده است. در این مثال، سه منبع آلاینده با توابع شدت متفاوت از هم در نظر گرفته می‌شوند و در حالت‌های مختلف آرایش نقاط شاهد، نتایج مدل معکوس ارائه می‌گردد. چهار نقطه شاهد برای شناسایی سه منبع آلاینده در رودخانه نیاز است. پارامترهای جریان و موقعیت نقاط شاهد و منابع آلاینده در رودخانه به شرح زیر است:

جدول ۱: پارامترهای جریان در رودخانه فرضی

$V(\frac{m}{s})$	$D(\frac{m^2}{s})$	$R(\frac{\Delta}{s})$
۰/۳	۲۵	۰

جدول ۲: موقعیت نقاط شاهد و منابع آلاینده

$p_1(m)$	$S_1(m)$	$p_2(m)$	$S_2(m)$	$p_3(m)$	$S_3(m)$	$p_4(m)$	$l(m)$
۱۰۰۰	۳۰۰۰	۵۵۰۰	۷۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۱۰۰۰	۱۴۰۰۰	۱۵۰۰۰

ضریب پراکندگی بیشتر باشد، مقدار این عدد بیشتر خواهد شد. همچنین اگر ایستگاه اندازه‌گیری در بالادست رودخانه به منبع آلاینده نزدیک‌تر باشد، مقدار مساحت زیر منحنی بیشتر خواهد شد که واضح است هرچه ایستگاه اندازه‌گیری به منبع آلاینده نزدیک‌تر باشد، مکان منبع آلاینده دقیق‌تر محاسبه خواهد شد. برای روشن شدن مطالب فوق، ایستگاه اندازه‌گیری بالادست، یک کیلومتر به منبع آلاینده نزدیک‌تر می‌شود. واضح است که هرچه ایستگاه اندازه‌گیری به منبع نزدیک‌تر باشد، پاسخ دقیق‌تر خواهد بود. در شکل فوق، در ایستگاه اول، مقدار مساحت زیر منحنی در حالت بدون خطا  $1/75 \times 10^{-5}$  است. اگر منحنی غلظت-زمان در یک کیلومتری بالادست منبع آلاینده در نظر گرفته شود، مساحت زیر منحنی  $4/65 \times 10^{-2}$  است. این مقدار عدد را در این مثال می‌توان از  $1/75 \times 10^{-5}$  تا  $4/65 \times 10^{-2}$  متغیر در نظر گرفت.

### ۳-۱- شناسایی مکان و تابع شدت اولین منبع آلاینده

در این بخش با استفاده از منحنی‌های غلظت-زمان در نقاط شاهد  $p_1$  و  $p_2$  و استفاده از مدل معکوس، مکان منبع آلاینده  $S_1$  شناسایی و سپس با استفاده از معلوم بودن اولین مکان منبع آلاینده، تابع شدت منبع آلاینده نیز مانند شکل ۴ بازسازی می‌شود. با توجه به شکل (۵) مکان اولین منبع آلاینده با اعمال ۵ درصد خطا  $3012$  متر به دست می‌آید. پس از یافتن مکان منبع، تابع شدت منبع آلاینده شناسایی می‌شود (شکل ۶). با

است معادلات فوق توسط نرم‌افزارهای متلب و میپل حل شده است.

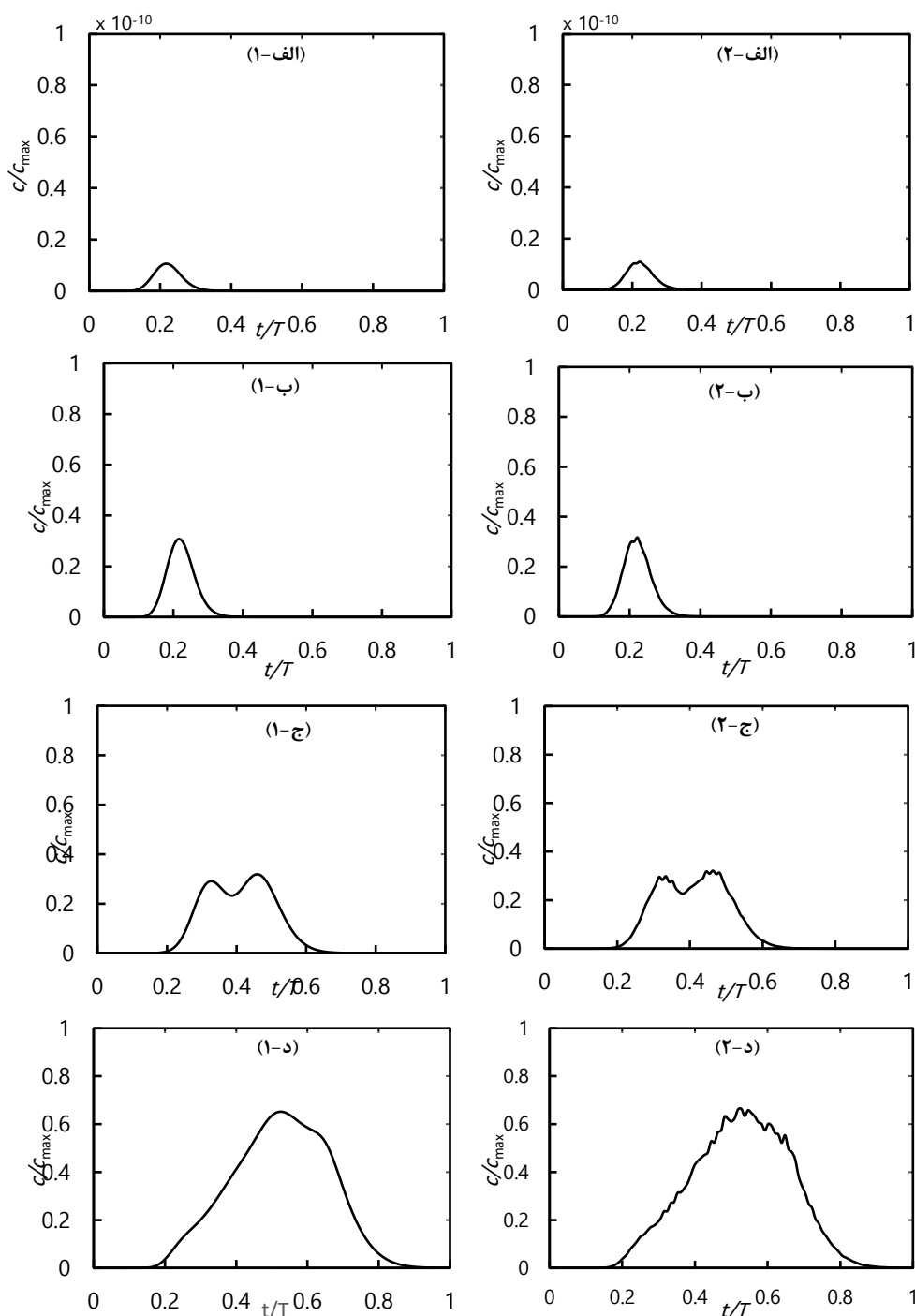
### ۳- نتایج و بحث

در بند قبل ثابت شد که مدل ارائه‌شده برای یک منبع آلاینده در رودخانه، قابل تعمیم به چند منبع آلاینده در رودخانه است. هدف از ارائه این مثال، بررسی آرایش‌های مناسب نقاط شاهد، تعداد آن‌ها، کارایی و صحت‌سنجی این

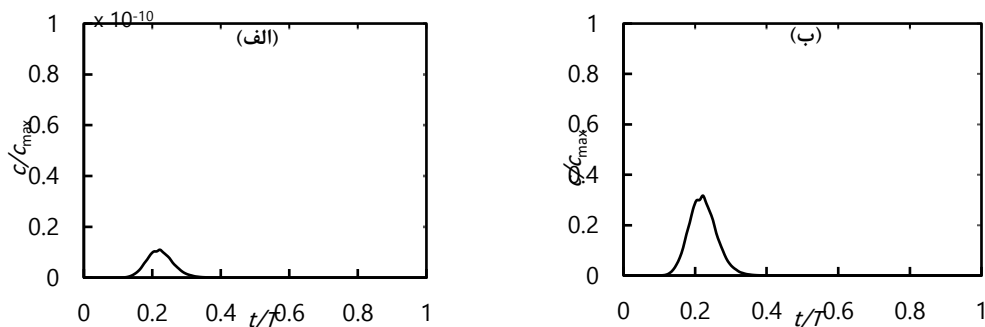
در ابتدا به منحنی‌های غلظت-زمان نیاز داریم. با اجرای مدل مستقیم، منحنی غلظت-زمان در نقاط شاهد در حالت‌های بدون خطا و با اعمال سطح خطای ۵ درصد مطابق شکل (۴) به دست می‌آید. با توجه به اینکه مثال‌های ارائه‌شده فرضی است، با استفاده از حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکندگی، توزیع زمانی غلظت در ایستگاه‌های مشاهداتی استخراج می‌شود. از آنجا که برداشت داده در رودخانه با خطا همراه است، به مقادیر خروجی از حل مستقیم ۵ درصد خطا اضافه شده تا به واقعیت نزدیک‌تر شود و نتایج در این حالت مورد ارزیابی قرار گیرد [۴]. چون داده‌های واقعی بدون خطا نیستند، باید به داده‌ها مثبت منفی خطا وارد شود. نحوه وارد کردن خطا به این صورت است که اگر بردار داده‌ها  $X$  در نظر گرفته شود و بردار  $Y$  بردار خطا باشد، باید بردار  $X$  در بردار  $Y$  ضرب شود. به‌عنوان مثال، اگر مقدار خطا ۵ درصد باشد، بردار  $Y$  اعداد متغیر بین  $0/95$  تا  $1/05$  خواهد بود. غلظت در ایستگاه بالادست بسیار کم و عملاً غیرقابل اندازه‌گیری با سنسورهای موجود است؛ اما نکته حائز اهمیت این است که مقادیر غلظت به صورت یکه در طول زمان برای یافتن مکان منبع آلاینده نیاز نیست و آنچه مهم است، مساحت زیر منحنی‌ها است و این مقدار مساحت زیر منحنی است که مستقیم وارد محاسبات می‌شود. مقدار مساحت زیر منحنی در ایستگاه اول اندازه‌گیری شده است. مقدار مساحت زیر منحنی بستگی به شرایط جریان در رودخانه دارد. هرچه سرعت کم و

منبع آلاینده را در نقاط شاهد پایین‌دست نیز به دست آورد.

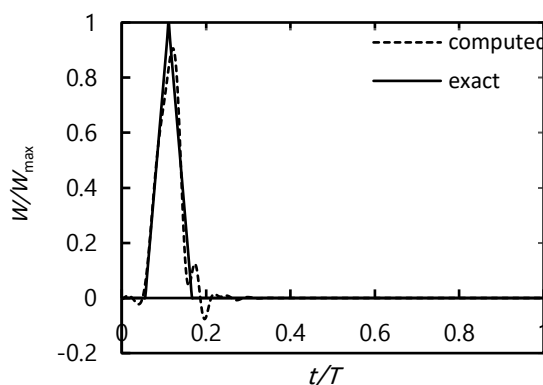
توجه به اینکه مکان و تابع شدت منبع آلاینده اول شناسایی شد، می‌توان با حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکندگی اثر این



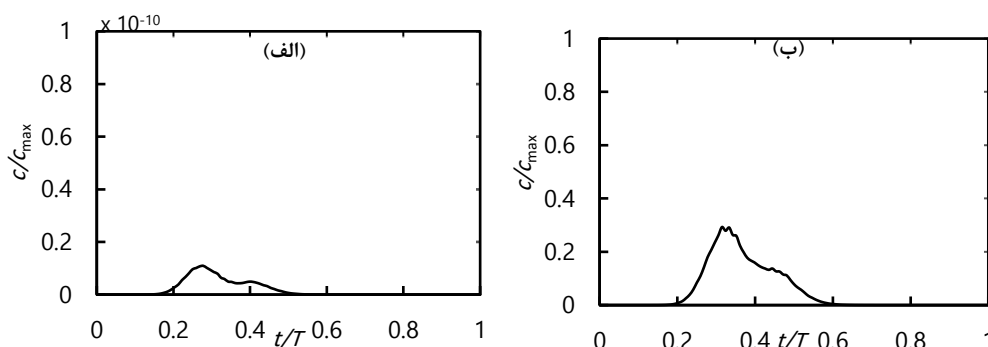
شکل ۴: منحنی‌های غلظت-زمان در نقاط شاهد، بدون اعمال خطا (چپ) و با اعمال ۵ درصد خطا (راست)، (الف) نقطه شاهد  $p_1$ ، (ب) نقطه شاهد  $p_2$ ، (ج) نقطه شاهد  $p_3$ ، (د) نقطه شاهد  $p_4$



شکل ۵: منحنی‌های غلظت-زمان در بالادست و پایین‌دست منبع آلاینده اول، (الف) نقطه شاهد  $p_1$ ، (ب) نقطه شاهد  $p_2$



شکل ۶: نتایج محاسبه تابع شدت منبع آلاینده اول



شکل ۷: منحنی‌های غلظت-زمان جدید بر اساس حذف اثر منبع آلاینده اول در نقاط شاهد پایین‌دست و بالادست منبع آلاینده، (الف) نقطه شاهد

$p_1$ ، (ب) نقطه شاهد  $p_2$

می‌شود.

### ۳-۳- شناسایی مکان و تابع شدت سومین منبع آلاینده

با توجه به اینکه مکان و تابع شدت منابع آلاینده اول و دوم شناسایی شد، می‌توان با حل مستقیم اثر منبع آلاینده دوم را نیز در نقاط شاهد پایین‌دست به دست آورد. در این بخش نیز هدف این است که با استفاده از منحنی‌های غلظت-زمان تولیدی از اثر هر سه منبع آلاینده و منحنی‌های غلظت-زمان تولیدی از اثر منبع آلاینده اول و دوم در نقاط شاهد  $p_1$  و  $p_2$  بتوان مکان و تابع شدت منبع آلاینده سوم را شناسایی کرد. برای دستیابی به این هدف، باید اثر منابع آلاینده اول و دوم را از مجموع منابع آلاینده در نقاط شاهد  $p_1$  و  $p_2$  کم کرد. شکل

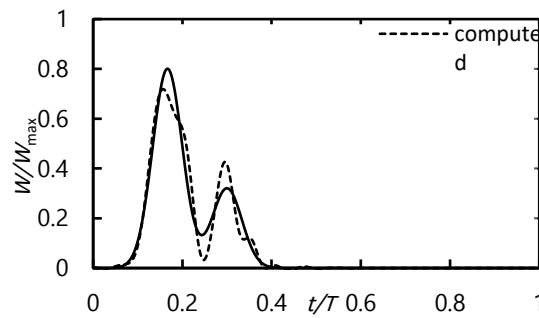
### ۲-۳- شناسایی مکان و تابع شدت دومین منبع آلاینده

هدف از این بخش این است که با استفاده از منحنی‌های غلظت-زمان تولیدی از اثر هر سه منبع آلاینده و منحنی‌های غلظت-زمان تولیدی از اثر منبع آلاینده اول در نقاط شاهد  $p_1$  و  $p_2$  بتوان مکان و تابع شدت منبع آلاینده دوم را شناسایی کرد. برای دستیابی به این هدف، باید اثر منبع آلاینده اول را از مجموع منابع در نقاط شاهد  $p_1$  و  $p_2$  کم کرد. شکل ۷ بیانگر این موضوع است.

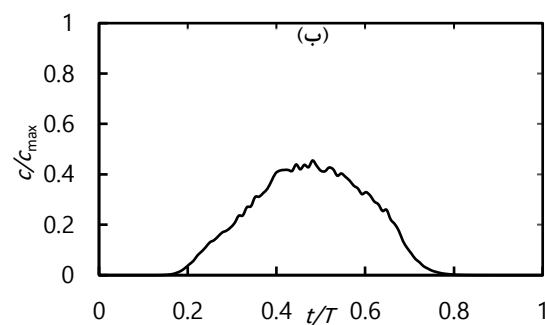
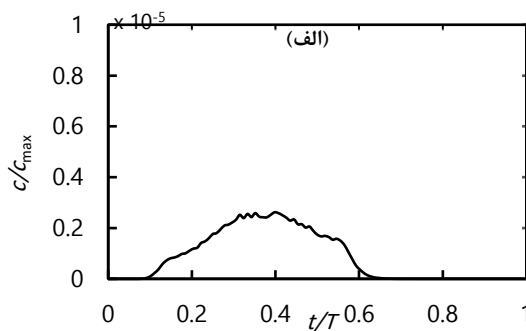
با استفاده از منحنی‌های غلظت-زمان شکل (۷) مکان منبع آلاینده دوم ۷۰۲۰ متر به دست آمده است. پس از یافتن مکان منبع آلاینده دوم، تابع شدت آن نیز مطابق شکل (۸) بازسازی

سومین منبع آلاینده موجود در روخانه ۱۱۰۳۵ متر شناسایی شده است. پس از یافتن مکان سومین منبع، تابع شدت آن نیز مطابق شکل (۱۰) بازسازی شده است.

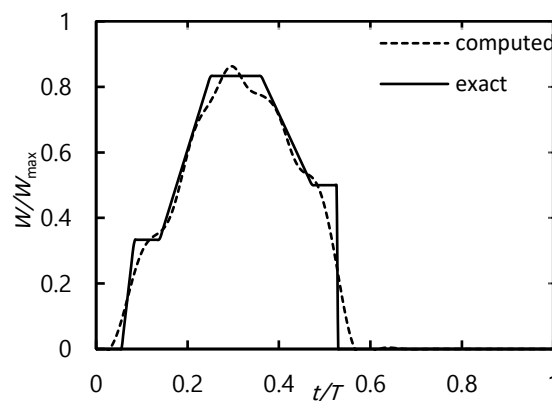
۹ بیانگر این موضوع است. با استفاده از منحنی‌های شکل (۹) می‌توان مکان و تابع شدت منبع آلاینده سوم را نیز شناسایی کرد. با توجه به منحنی‌های غلظت-زمان شکل (۹) مکان



شکل ۸: نتایج محاسبه تابع شدت منبع آلاینده دوم



شکل ۹: منحنی‌های غلظت-زمان جدید بر اساس حذف اثر منبع آلاینده اول و دوم در نقاط شاهد پایین‌دست منبع آلاینده سوم، (الف) نقطه شاهد  $p_1$ ، (ب) نقطه شاهد  $p_2$



شکل ۱۰: نتایج محاسبه تابع شدت منبع آلاینده سوم

شده است که هم‌زمان تعدادی منابع آلاینده با مشخصات نامعلوم در آن فعالیت می‌کنند. با به‌کارگیری این مدل، مکان و تابع شدت این منابع نامعلوم شناسایی شد. برای تحقق این هدف از بالادست و پایین‌دست هر منبع توزیع زمانی غلظت برداشت گردیده است. برای برداشت داده در این مقاله از حل مستقیم معادله جابه‌جایی-پراکندگی استفاده شده است. از آنجا که برداشت داده در واقعیت با خطا همراه است، ۵ درصد خطا به داده‌های خروجی از حل مستقیم اعمال شده تا اثر خطا در شناسایی مکان و بازایی توابع شدت منابع آلاینده مشاهده شود.

همان‌طور که در نتایج فوق مشاهده می‌شود، این مدل می‌تواند با برداشت داده در نقاط معدودی از رودخانه، مکان و تابع شدت منابع آلاینده را با حداقل خطا پیش‌بینی کند. شایان ذکر است هرچه تعداد منابع آلاینده و خطای وارد در منحنی غلظت-زمان در رودخانه بیشتر شود، منابع آلاینده با خطای بیشتری محاسبه خواهد شد.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، از مدل معکوس در رودخانه‌ای به کار گرفته

روش حداقل مجذورات خطی تنظیم شده استفاده گردید. روش تنظیم به کاررفته در این تحقیق، روش تیخونوف و روش به کاررفته برای محاسبه پارامتر تنظیم نیز روش L-curve است. در پایان، صحت سنجی بین حالت دقیق و نتایج حاصل از مدل معکوس انجام شد. در تمام موارد، نتایج مدل معکوس با دقت مناسبی قابل قبول بود.

شایان ذکر است توابع شدت منابع آلاینده فعال در رودخانه به صورت متفاوت در نظر گرفته شدند تا کارایی روش در شکل های مختلف توابع شدت مشاهده شود. یافتن توابع شدت منبع آلاینده با استفاده از یک معادله انتگرالی انجام شد. سپس با گسسته سازی معادله انتگرالی، دستگاه معادلات خطی با شدت های منبع آلاینده به عنوان مجهولات دستگاه، تشکیل داده شد. با توجه به بدخیم بودن دستگاه به دست آمده، برای حل آن از

## مراجع

- [۱] ز. شیخ خوزانی، خ. حسینی و م. رحیمیان، «مدل سازی بهره برداری از مخازن چندمنظوره به روش پویایی سیستم»، مجله مدل سازی در مهندسی، سال هشتم، شماره ۲۱، تابستان ۱۳۸۹، صفحه ۵۷-۶۵.
- [۲] ح. محمدی، ا. اکبرپور و ع. باقری، «مدل سازی اندرکنش منابع آب و ارزش افزوده دشت بیرجند»، مجله مدل سازی در مهندسی، سال شانزدهم، شماره ۵۵، زمستان ۱۳۹۷، صفحه ۲۷۹-۲۹۸.
- [۳] ح. نوذری و س. آزادی، «پیش بینی شوری آب زیرزمینی زیر لوله های زهکش با استفاده از شبکه عصبی»، مجله مدل سازی در مهندسی، سال شانزدهم، شماره ۵۲، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۲۰۳-۲۱۱.
- [4] A. Hamdi, "The recovery of a time-dependent point source in a linear transport equation: Application to surface water pollution", *Inverse Problems*, Jun 2009, Vol. 25, No. 7, pp. 1-19.
- [5] M.J. Colaco, H.R.B. Orlanda and G.S. Dulikravich, "Inverse and optimization problems in heat transfer", *Journal of Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 28, No. 1, Jan 2006, pp. 1-24.
- [6] S.C. Chapra, *Surface water-quality modeling*, Vol. 1, New York: McGraw-Hill, 1997
- [۷] م. مظاهری، «مدل ریاضی تشخیص منابع آلاینده در رودخانه: بازیابی مکان و شدت منابع آلاینده»، رساله دکتری، گروه سازه های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۹۰.
- [8] E. Milnes and P. Perrochet, "Simultaneous identification of a single pollution point source location and contamination time under known flow field conditions", *Advances in Water Resources*, Vol. 30, No. 12, December 2007, pp. 2439-2446.
- [9] W.P. Cheng and Y. Jia, "Identification of contaminant point source in surface waters based on backward location probability density function method. *Advances in Water Resources*", Vol. 33, No. 4, 2010, pp. 397-410.
- [10] R.M. Neupauer and J.L. Wilson, "Backward probability model using multiple observations of contamination to identify groundwater contamination sources at the Massachusetts Military Reservation", *Water Resources Research*, Vol. 41, No. 2, February 2005, pp. 1-14.
- [11] A. Ghane, M. Mazaheri and J. Mohammad Vali Samani, "Location and release time identification of pollution point source in river networks based on the Backward Probability Method", *Environmental Management*, Vol. 180, September 2016, pp. 164-171.
- [۱۲] ع. قانع، م. مظاهری و ج. محمدولی سامانی، «کاربرد مدل احتمال برگشتی در ردیابی منابع آلاینده در رودخانه در شرایط وجود جریان غیریکنواخت»، *محیط شناسی*، شماره ۴۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۴۱۰-۳۹۷.
- [۱۳] ع. قانع، م. مظاهری و ج. محمدولی سامانی، «ردیابی مکان و زمان رهاسازی آلاینده در رودخانه بر اساس مدل ترکیبی آنالیز الحاقی و بهینه سازی»، *مهندسی عمران شریف*، دوره ۳۳/۲، شماره ۳/۲، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۹۵-۱۰۴.
- [14] T.H. Skaggs and Z.J. Kabala, "Recovering the history of a groundwater contaminant plume: Method of quasi-reversibility", *Water Resources Research*, Vol. 31, No. 11, November 1995, pp. 2669-2673.
- [15] R.M. Neupauer, B. Borchers and J.L. Wilson, "Comparison of inverse methods for reconstructing the release history of a groundwater contamination source", *Water Resources Research*, Vol. 36, No. 9, September 2000, pp. 2469-2475.

- [16] J. Atmadja and A.C. Bagtezoğlu, "Pollution source identification in heterogeneous porous media", *Water Resources Research*, Vol. 37, No. 8, August 2001, pp. 2113-2125.
- [17] A.C. Bagtezoğlu, and J. Atmadja, "Marching-jury backward beam equation and quasi-reversibility methods for hydrologic inversion: Application to contaminant plume spatial distribution recovery", *Water Resources Research*, February 2003, Vol. 39, No. 2, pp. 1038-1052.
- [18] T. Zhang and Q. Chen, "Identification of contaminant sources in enclosed space by a single sensor", *Indoor Air*, Vol. 17, No. 6, 2007, pp. 439-449.
- [19] Z. Wang and J. Liu, "Identification of the pollution source from one-dimensional parabolic equation models", Vol. 219, No. 8, December 2012, pp. 3403-3413.
- [20] M. Mazaheri, J. Mohammad Vali Samani and H. Mohammad Vali Samani, "Mathematical model for pollution source identification in rivers", *Environmental Forensics*, Nov. 2015, Vol. 16, No. 4, pp. 310-321.
- [21] A. Hamdi, I. Mahfoudhi and A. Rejaiba, "Identification of time active limit with lower and upper bounds of total amount loaded by unknown sources in 2D transport equations", *Engineering Mathematics*, July 2015, Vol. 97, No. 1, pp. 101-117.
- [22] A. El Badia, T. Ha-Duong and A. Hamdi, "Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: Application to a pollution source problem", *Inverse Problems*, May 2005, Vol. 21, No. 3, pp. 1-17.
- [23] L. Ling, M. Yamamoto, Y.C. Hon and T. Takeuchi, "Identification of source locations in two-dimensional heat equations", *Inverse Problems in Science and Engineering*, June 2006, Vol. 22, No. 4, pp. 591-608.
- [24] A. EL Badia and A. Hamdi, "Inverse source problem in an advection–dispersion–reaction system: application to water pollution", *Inverse Problems*, October 2007, Vol. 23, No. 5, pp. 2103-2120.
- [25] Z. Wang and J. Liu, "Identification of the pollution source from one-dimensional parabolic equation models", *Applied Mathematics and Computation*, March 2008, Vol. 219, No. 8, pp. 3403-3413.
- [26] A. Hamdi, "Inverse source problem in a 2D linear evolution transport equation: Detection of pollution source", *Inverse Problems in Science and Engineering*, Oct 2011, Vol. 20, No. 3, pp. 401-421.
- [27] A. Hamdi, and I. Mahfoudhi, "Inverse source problem in a one-dimensional evolution linear transport equation with spatially varying coefficients: Application to surface water pollution", *Inverse Problems in Science and Engineering*, Jan 2013, Vol. 21, No. 6, pp. 1007-1031.
- [28] R.C. Aster, B. Borchers and C.H. Thurber, *Parameter Estimation and Inverse Problems*, San Diego: Elsevier Academic Press, 2004.
- [29] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Washington, D.C: Winston & Sons, 1977.