

بررسی عملکرد تکنیک‌های تعریف ناپیوستگی در حل عددی مسائل ترک به روش بدون شبکه

زهرا شیخی^۱، اکبرقنبری^{۲*}، محمد کارکن^۳ و سلیمان قوهستانی^۴

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۱۱	در سال‌های اخیر تحقیقات متعددی برای استفاده از روش‌های بدون شبکه با توجه به مزایای این روش‌ها جهت بررسی مسائل مکانیک شکست انجام گرفته است. به کارگیری روش‌های بدون شبکه در مکانیک شکست، به دلیل استفاده این روش‌ها از توابع شکل پیوسته، نیازمند اعمال اصلاحاتی در تابع شکل در نزدیکی سطح ناپیوستگی است. در این پژوهش، روش حداقل مربعات گسسته به عنوان یک روش بدون شبکه واقعی، برای حل مسائل صفحات حاوی ترک، با استفاده از تکنیک‌های تعریف ترک به کار گرفته شده است. در این روش گسسته‌سازی حوزه مسئله، توسط نقاط گرهی غیرمرتبط صورت می‌گیرد و برای تقریب تابع، از توابع شکل با درجه پیوستگی بالای حداقل مربعات متحرک استفاده شده است. همچنین از فرم قوی معادلات برای گسسته‌سازی معادلات استفاده می‌شود. روش حداقل مربعات گسسته، مبتنی بر به حداقل رساندن مربعات باقیمانده‌ها در تعدادی از نقاط همسایه گره اصلی استوار است. شرایط مرزی به راحتی توسط ضرایب پنالتی اعمال می‌شود. برای تعریف ناپیوستگی تکنیک‌های پرکاربرد معیار دید، روش پراش و شفافیت استفاده شده است. عملکرد هر سه تکنیک در سطوح ترک به جز در نزدیکی نوک ترک، یکسان است. کارایی و دقت کاربرد هر تکنیک در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته با مقایسه نتایج حاصل از مدل سازی مثالی بررسی شده است. مقایسه نتایج و میزان خطای هر تکنیک، بیانگر توانایی و دقت بالای روش پیشنهادی در استفاده از تکنیک‌های مختلف تعریف ناپیوستگی در مدل سازی صفحات ترک دار می‌باشد. همچنین نشان داده شده است که تکنیک پراش، عملکرد نسبتاً بهتری در مواجهه با مرزهای ناپیوسته در مقایسه با تکنیک های شفافیت و معیار دید دارد.
پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۲۴	
واژگان کلیدی: روش بدون شبکه، حداقل مربعات گسسته، تکنیک تعریف ناپیوستگی، معیار دید، روش پراش، روش شفافیت.	

۱- مقدمه

مرزی معادلات دیفرانسیل جزئی در نظر گرفته شود. شکل حوزه محاسباتی و شرایط مرزی مختلط می‌تواند باعث تکینگی در زمینه تنش و کرنش در مجاورت نوک ترک شود که توسط فاکتور شدت تنش^۲ (SIF) مشخص شده است. راه‌حل‌های تحلیلی برای حل مدل‌های مختلف ترک‌های منظم و ساده ارائه شده است؛ اما برای مسائل مختلف ترک با توجه به پیچیدگی هندسی پیچیده، نیاز به استفاده از

نواقصی مانند ترک در مواد و ساختارهای ماکروسکوپی وجود دارند که همواره تأثیری مهلک بر زندگی آن‌ها می‌گذارند. برای کشف مکانیسم دلایل این تأثیر، مکانیک شکست به سرعت در چند دهه گذشته توسعه یافته است و جدیداً نقش بسیار مهمی در طراحی و تحلیل سازه دارد. مسائل ترک می‌تواند به عنوان حل یک کلاس از مسائل

۳. استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد لارستان، دانشگاه آزاد اسلامی، لارستان، ایران
۴. استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فسا، فسا، ایران

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: akbar_ghanbarii@yahoo.com
۱. دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، واحد لارستان، دانشگاه آزاد اسلامی، لارستان، ایران
۲. استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد لارستان، دانشگاه آزاد اسلامی، لارستان، ایران

². Stress Intensity Factor

روش‌های عددی الزام‌آور است.

مأموریت اولیه مکانیک شکست، یافتن راه‌حل‌های دقیق مقادیر مسائل در مرزهای بیضوی است. با استفاده از اصل کار مجازی یا روش باقیمانده وزن، بیشتر تکنیک‌های عددی، مانند روش المان محدود سنتی^۱ (FEM) [۱] و روش المان مرزی [۲]، متعهد به حل معادلات دیفرانسیل جزئی به فرم انتگرالی هستند. روش المان محدود، یکی از روش‌های موفق برای حل مسائل مهندسی و همچنین تجزیه و تحلیل پدیده شکست است. تحقیقات عددی متعددی برای تحلیل مسائل شکست با استفاده از روش المان محدود ارائه شده است [۱ و ۲]. در این پژوهش‌ها، تکنیکی تنش در ژاکوبین با استفاده از منطبق کردن گره میانی المان بر نوک ترک و سپس تکنیکی در تابع شکل، با اصلاح تابع شکل در نزدیکی نوک ترک بررسی شده است. همچنین روش المان محدود برای مدل‌سازی رشد ترک دینامیکی با اصلاح و بازتولید شبکه در مسیر رشد ترک به کار گرفته شده است. علی‌رغم نتایج موفق المان محدود، به دلیل کاستی‌هایی نظیر شبکه‌بندی مجدد در مسائلی چون رشد ترک، محققان برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌های دلخواه، روش مؤثرتر المان محدود توسعه یافته [۳] را معرفی کرده‌اند. بلچکو و بلک در روش المان محدود توسعه یافته، ناپیوستگی‌ها را بر اساس افزاز واحد که مستقل از شبکه‌های المان محدود عمل می‌کند، برای مدل‌سازی ترک تعریف کرده‌اند. روش اصلاح‌شده را می‌توان در مرجع [۴] که در آن رشد ترک با استفاده از مجانب‌هایی در نزدیکی میدان نوک ترک و تابع هار^۲ انجام می‌شود، مشاهده کرد. استفاده از روش‌های بدون شبکه هنوز به گستردگی روش المان محدود در مسائل مهندسی نیست؛ اما این روش‌ها به دلیل عدم استفاده از المان‌گیری، در حل مسائلی که دچار کج شکلی و ناپیوستگی هستند و مسائلی با مرزهای متحرک، با عملکرد مطلوبی به کار گرفته شده‌اند. حل این‌گونه مسائل در روش المان محدود و سایر روش‌های متکی بر شبکه، نیازمند فرایند مداوم شبکه‌بندی در حوزه مسئله است. فرایند تولید شبکه، فرایندی پرهزینه و دشوار است، به طوری که هزینه این فرایند، قابل مقایسه با هزینه گسسته سازی معادلات و حل معادلات حاکم بر مسئله بیان شده

است. معمولاً مشتقات جواب در روش‌های مبتنی بر شبکه برای رسیدن به دقت کافی، نیازمند هموارسازی است که فرایندی پرهزینه به‌ویژه در مسائلی مانند المان محدود سه بعدی و جریانات سطح آزاد است؛ اما در روش‌های بدون شبکه به دلیل عدم استفاده از مش‌بندی و گسسته‌سازی حوزه مسئله به وسیله نقاط گرهی و همچنین استفاده از درون‌یاب‌های مرتبه بالا این مشکلات منتفی شده است. گسسته‌سازی حوزه مسئله در روش‌های بدون شبکه، با استفاده از نقاط گرهی صورت می‌گیرد. به دلیل عدم وجود پیوستگی المانی بین نقاط گرهی و در نتیجه عدم نیاز به تعریف روابطی قبل از حل مسئله و همچنین مزایایی که در بالا به آن اشاره شده است، این روش‌ها در حل مسائلی نظیر مدل‌سازی ترک و رشد ناپیوستگی و مرزهای متحرک، عملکرد خوب و مناسبی را نشان داده‌اند.

با توجه به نحوه گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل، روش‌های بدون شبکه به دو دسته کلی تقسیم شده است: روش‌های مبتنی بر بازنمایی انتگرالی و روش‌هایی که جواب‌ها مستقیماً از معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم به دست می‌آید. روش‌هایی مانند روش بدون المان گالرکین^۳ (EFG) [۵]، روش پترو-گالرکین محلی [۶] و روش معادله انتگرال مرز محلی [۷] در دسته اول قرار گرفته‌اند. ویژگی مشترک این روش‌ها ضرورت انتگرال‌گیری عددی است که نیازمند شبکه‌بندی زمینه می‌باشد. به همین دلیل، بازده محاسبات به واسطه پیچیدگی توابع شکل به شدت کاهش می‌یابد.

روش گالرکین بدون المان، اولین روش بدون شبکه است که توسط بلچکو و همکاران [۸] در سال ۱۹۹۴ برای تحلیل شکست ناشی از ترک به کار گرفته شده است. در این مطالعه، روش معیار دید^۴ برای آنالیز پارامترها در نوک ترک استفاده شده است. ارگان و همکاران [۹] در سال ۱۹۹۶ دو تکنیک پراش و شفافیت^۵ را در چارچوب روش گالرکین بدون المان، برای مدل‌سازی مرزهای غیرمحدب به کار گرفته‌اند. روش پری‌دینامیک^۶ برای اولین بار در سال ۲۰۰۰ توسط سیلینگ [۱۰] و پس از آن به صورت جامع توسط سیلینگ و عسکری [۱۱] در سال ۲۰۰۵ برای مدل‌سازی ناپیوستگی به کار گرفته شده است. در این روش، فرض مشتق‌پذیر بودن جابه‌جایی‌ها در سازه وجود ندارد و

۴. Visibility Criterion
۵. Transparency Method
۶. Peridynamic Method

۱. Finite Element Method
۲. Haar
۳. Element Free Galerkin Method

دسته دوم روش‌های بدون شبکه قرار می‌گیرد. روش پیشنهادی، سابق بر این در حل مسائل کشسانی مختلف، نظریه تطبیقی برآورد خطا توانایی و دقت خود را نشان داده است [۲۰-۲۶].

در این روش، گسسته‌سازی حوزه مسئله توسط نقاط گرهی برای تولید توابع شکل با استفاده از درون‌یاب مرتبه بالا با درجه پیوستگی زیاد صورت می‌گیرد و جهت گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل از فرم قوی استفاده می‌شود. تکنیک حداقل مربعات با به حداقل رساندن مجموع مربعات باقیمانده، منجر به ایجاد دستگاه معادلات گسسته می‌گردد. به دلیل پیوستگی بالای توابع شکل تولیدشده در روش‌های بدون شبکه، استفاده از تکنیک‌های تعریف ناپیوستگی در مسائل حاوی ترک، الزام‌آور است. بدین منظور، تکنیک‌های متعددی ارائه شده‌اند که در این پژوهش، تکنیک‌های معیار دید، پراش و شفافیت که در بیشتر مطالعات حوزه روش‌های بدون شبکه به کار گرفته شده‌اند، بررسی شده است.

بدین منظور، در این پژوهش ابتدا، فرمول‌بندی روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و درون‌یاب حداقل مربعات متحرک بررسی خواهد شد و در بخش دوم، سه تکنیک معیار دید، روش پراش و شفافیت و نحوه عملکرد هر کدام بررسی شده است. در گام سوم، نظر به حل مسائل شکست صفحات با مواد ایزوتروپیک، بررسی اجمالی در مکانیک شکست ارتجاعی خطی صورت گرفته است. در انتها ضمن حل مسئله صفحه حاوی ترک لبه‌ای با مقایسه نتایج به روش پیشنهادی و روش المان محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس^۸ با نتایج تحلیلی به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته خواهد شد.

۲- فرمول‌بندی روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته

روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته که یکی از جدیدترین روش‌های بدون شبکه است، برخلاف روش گالرکین بدون المان از فرم قوی معادلات برای حل مسئله استفاده می‌کند. در این روش بدون شبکه، حوزه مسئله توسط نقاط گرهی گسسته‌سازی می‌شود که برای تشکیل توابع شکل پیوسته با استفاده از درون‌یاب حداقل مربعات

در عوض، ذرات موجود در میدان، به دلیل وجود نیروی بین ذره‌ای در فاصله معین از یکدیگر قرار می‌گیرند؛ بنابراین نیاز به تمهیدات ریاضیاتی جدید وجود ندارد. در سال ۲۰۰۳ موراوین و همکاران [۱۲] یک تکنیک جدید به نام تابع وزن حلزونی^۱ برای مدل کردن ترک در روش‌های بدون شبکه، به منظور کاهش مشکلات موجود در روش‌های اصلاح توابع وزن، ارائه کردند. ژانگ و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۰۸ آنالیز مسائل شکست دوبعدی را با استفاده از روش غنی‌شده بدون شبکه گالرکین ارائه کردند. در این مقاله از یک تقریب حداقل مربعات اصلاح‌شده با یک تابع وزن، به عنوان تابع پایه استفاده شده است. در مقاله‌ای [۱۴] روش درون‌یاب نقطه‌ای شعاعی با استفاده از غنی‌سازی درون‌یاب توابع پایه شعاعی^۲، فاکتورهای شدت تنش مود اول و دوم شکست، توسط ژو و همکاران در سال ۲۰۱۱ مورد بررسی قرار گرفته است.

در سال ۲۰۱۷ خزری و همکاران [۱۵] ترکیب روش نوار محدود^۳ و روش بازتولید ذرات کرنل^۴ را برای آنالیز صفحات حاوی ترک در مسائل دوبعدی ارتجاعی به کار گرفتند. سال ۲۰۱۸ فلاح و نیک‌رفتار [۱۶] روش بدون شبکه حجم محدود را برای حل مسائل مکانیک شکست در مواد ارتوتروپیک، با استفاده از توابع چندجمله‌ای معمولی و غنی‌شده توسعه دادند.

در سال ۲۰۱۹ لی و همکاران [۱۷] روش بدون شبکه تفاضل محدود عمومی^۵ را در مواجهه با ناپیوستگی‌های قوی در میدان مسئله با استفاده از تکنیک پراش و اصلاح‌شده روش معیار دید مورد بررسی قرار دادند. در روش اصلاح‌شده معیار دید، تعداد نقاط پشت ترک که در روش معمول معیار دید از حوزه گره اصلی حذف شده‌اند، در منطقه دید گره اصلی، در زیرحوزه گره قرار داده می‌شود. یووا و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۲۰، با استفاده از تکنیک پراش، مرزهای غیرمحدب با تأکید بر ترک را در روش هیدرودینامیک ذرات هموار پیوسته^۶ شبیه‌سازی کردند. در این مطالعه، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته^۷ (DLSSM) [۱۹]، برای بررسی تأثیر تکنیک‌های مختلف معرفی ترک بر محاسبه پارامترهای میدان نوک ترک در مواد الاستیک خطی مورد استفاده قرار گرفته است. این روش برای حل معادلات در

^۵. Generalized Finite Difference Method

^۶. Continuous Smoothed Particle hydrodynamics

^۷. Discrete Least Squares Meshless Method

^۸. ABAQUS

^۱. Spiral Weight Function

^۲. Radial Basis Function

^۳. Finite Strip Method

^۴. Reproducing Kernel Particle Method

می‌شود:

$$\phi(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \phi^h(x) \quad (4)$$

که $\phi^h(x)$ بردار مؤلفه‌های مجهول و $A(x)$ و $B(x)$ به صورت زیر است:

$$A(x) = \sum_{j=1}^n w_j(x) \mathbf{p}^T(x_j) \mathbf{p}(x_j) \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(x) = [w_1(x-x_1) \mathbf{p}(x_1), w_2(x-x_2) \mathbf{p}(x_2), \dots, w_n(x-x_n) \mathbf{p}(x_n)] \quad (6)$$

بازنویسی معادله ۴ به درون یاب فرم استاندارد، به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^n N_i^T(x) \phi_i(x) = \mathbf{N}^T(x) \phi^h(x) \quad (7)$$

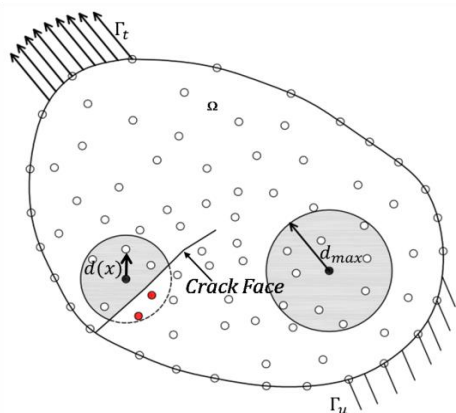
که منجر به ایجاد توابع شکل حدآقل مربعات متحرک خواهد شد.

$$\mathbf{N}^T(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \quad (8)$$

$\mathbf{N}^T(x)$ محتوی توابع شکل گره‌ها در نقطه x است که توابع شکل حدآقل مربعات متحرک نامیده می‌شود.

۲-۲- روش حدآقل مربعات گسسته

گسسته‌سازی حوزه مسئله در روش حدآقل مربعات گسسته توسط نقاط گرهی با توزیع دلخواه صورت می‌گیرد. روش حدآقل مربعات گسسته از فرم قوی معادلات برای گسسته سازی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کند. در صورتی که یک مسئله دوبعدی با قوانین حاکم الاستیسیته خطی بر حوزه مسئله Ω و مرزهای دریچه Γ_{II} و مرزهای نیومن Γ_I که توسط نقاط گرهی گسسته‌سازی شده است، مطابق شکل (۱) در نظر گرفته شود:



شکل ۱- گسسته‌سازی حوزه مسئله در روش حدآقل مربعات گسسته

متحرک به کار می‌روند. در این بخش درون یاب حدآقل مربعات متحرک و فرمول‌بندی روش بدون شبکه حدآقل مربعات گسسته ارائه شده است.

۲-۱- تابع تقریب حدآقل مربعات متحرک^۱

روش‌های متعددی از جمله حدآقل مربعات متحرک، افراز واحد، تابع پایه شعاعی و اینتروپی حدآکثر جهت تقریب تابع در روش‌های بدون شبکه ارائه شده است. یکی از پرکاربردترین روش‌ها روش حدآقل مربعات متحرک است. در این روش، تابع ϕ مجهول به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

که $\mathbf{p}^T(x)$ مؤلفه‌های چندجمله‌ای پایه در نقطه x و m تعداد کل مؤلفه‌های پایه است. برای مسائل دوبعدی $m=6$ به صورت $\mathbf{p}(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$ است. $\mathbf{a}(x)$ بردار ضرایب است که از به حدآقل رساندن پارامتر وزنی گسسته زیر به دست می‌آید:

$$J = \sum_{j=1}^n w_j(x-x_j) (\mathbf{p}^T(x_j) \mathbf{a}(x) - u_j^h)^2 \quad (2)$$

که n تعداد گره‌های موجود در حوزه تأثیر است. u_j^h مقدار گرهی تابع است که در نقطه j تقریب زده می‌شود. تابع وزن $w_j(x-x_j)$ در مجاورت x_j جایی که تابع و مشتقات آن محاسبه می‌شود، به گونه‌ای تعریف می‌شوند که مقدار تابع در محدوده حوزه اثر گره غیرصفر و خارج از آن صفر است و همچنین با فاصله گرفتن از گره، از مقدار تابع کاسته می‌شود. توابع وزنی مختلفی توسط محققان ارائه گردیده که در این مطالعه، تابع وزنی اسپیلاین مرتبه ۳ به صورت زیر به عنوان تابع وزنی به کار گرفته شده است.

$$w_j(x-x_j) = w(\bar{d}) \quad (3)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \frac{1}{2} \leq \bar{d} < 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases}$$

که $\bar{d} = \frac{|x-x_j|}{d_{max}}$ و d_{max} اندازه حوزه تأثیر در نقطه x_j است. از به حدآقل رساندن معادله ۲، عبارت زیر حاصل

^۱. Moving Least Squares

$$R_t(x_k) = L'(\varphi(x_k)) - \bar{t}(x_k) \\ = \sum_{j=1}^N L'(N_j(x_k)) \varphi_j - \bar{t}(x_k) \quad (18)$$

$$R_u(x_k) = \varphi - \bar{\varphi}(x_k) = \sum_{j=1}^N N_j(x_k) \varphi_j - \bar{\varphi}(x_k) \quad (19)$$

ضرایب پنالتی برای ایجاد تابع حداقل مربعات باقیمانده به شکل زیر استفاده می‌شود:

$$I = \sum_{k=1}^{M_\Omega} (R_\Omega^2(x_k)) + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} (R_t^2(x_k)) \\ + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} (R_u^2(x_k)) \quad (20)$$

که در آن، M_Ω تعداد کل نقاط داخلی، M_t و M_u به ترتیب تعداد نقاط روی مرزهای نیومن و دریاچه و α_u و α_t ضرایب پنالتی برای شرایط مرزی نیومن و دریاچه هستند. مینیمم‌سازی تابع فوق، منجر به سیستم معادلات زیر می‌شود:

$$K\varphi = F \quad (21)$$

که در آن،

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^{M_\Omega} [L(N_i(x_k))]^T L(N_j(x_k)) \\ + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} [L'(N_i(x_k))]^T L'(N_j(x_k)) \quad (22)$$

$$+ \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} [N_i(x_k)]^T N_j(x_k) \\ F_i = \sum_{k=1}^{M_\Omega} [L(N_i(x_k))]^T f(x_k) \\ + \alpha_t \sum_{k=1}^{M_t} [L'(N_i(x_k))]^T \bar{t}(x_k) \quad (23) \\ + \alpha_u \sum_{k=1}^{M_u} [N_i(x_k)]^T \bar{\varphi}(x_k)$$

هستند. ماتریس سختی K مربع $2N \times 2N$ است که N تعداد کل گره‌های مورد استفاده برای گسسته‌سازی حوزه و مرزهای آن است. علاوه بر این، K بدون توجه به عملگرهای دیفرانسیلی L و L' متقارن و مثبت است. بنابراین دستگاه معادلات نهایی توسط سیستم‌های حل‌کننده متداول، قابل محاسبه هستند.

۳- اصلاح تابع تقریب در مسائل حاوی ترک

همان گونه که توسط بلچکو و همکاران [۸] بیان شده است، هنگامی که یک ترک در یک جسم مدل‌سازی می‌شود، متغیرهای وابسته، یعنی جابه‌جایی‌ها باید در تمام نقاط ترک ناپیوسته باشند. چنین ویژگی‌هایی به دلیل پیوستگی

معادله دیفرانسیل بر روی هر گره موجود در حوزه مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\varphi) + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

که $L(\cdot)$ عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$L(\cdot) = L_1(\cdot)_{xx} + L_2(\cdot)_{yy} + L_3(\cdot)_{xy} \quad (10)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \\ L_3 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda + \mu \\ \lambda + \mu & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

φ بردار مجهولات $\varphi = [u \ v]^T$ و f بردار نیروهای خارجی $f = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \end{bmatrix}$ و μ مدول برشی و λ ضریب لامه به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)} > 0, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \quad (12)$$

E مدول یانگ و ν نسبت پواسون است. همچنین معادلات بر روی مرزهای دریاچه و نیومن به ترتیب به صورت زیر وجود دارد:

$$\varphi - \bar{\varphi} = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (13)$$

$$L'(\varphi) - \bar{t} = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad (14)$$

که $\bar{\varphi}$ و \bar{t} جابه‌جایی‌ها و کشش‌های اعمالی در مرزهای دریاچه و نیومن هستند و L' مشتق اول عملگر بر مرزهای نیومن به صورت زیر است:

$$L'(\cdot) = L'_1(\cdot)_x + L'_2(\cdot)_y \quad (15)$$

$$L'_1 = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)n_x & \mu n_y \\ \lambda n_y & \mu n_x \end{bmatrix}, L'_2 = \begin{bmatrix} \mu n_y & \lambda n_x \\ \mu n_x & (\lambda + 2\mu)n_y \end{bmatrix} \quad (16)$$

که n_x و n_y جهت کسینوس‌های نرمال مرزها هستند. بنابراین باقیمانده معادلات دیفرانسیل حاکم در هر نقطه k که ممکن است به عنوان نقطه گرهی در نظر گرفته شود یا نشود، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R_\Omega(x_k) = L(\varphi(x_k)) + f(x_k) \\ = \sum_{j=1}^N L(N_j(x_k)) \varphi_j + f(x_k) \quad (17)$$

که N تعداد کل گره‌ها برای گسسته‌سازی حوزه و مرزهای مسئله است. مقادیر باقیمانده بر مرزهای نیومن و دریاچه به ترتیب به صورت زیر هستند:

(۲)، در صورتی که ترک وجود نداشته باشد، گره I می‌تواند تمامی نقاط به فاصله کمتر از شعاع حوزه تأثیر d_{max} را مشاهده کند؛ اما در صورت تعریف ناپیوستگی، در نزدیکی نوک ترک، نقاطی که در حوزه دید گره I نباشند، از زیر حوزه حذف خواهند شد و گره فقط بخش هاشورخورده خاکستری‌رنگ را در زیرحوزه خود خواهد داشت؛ بنابراین نقاط خاکستری‌رنگ از حوزه گره I خارج می‌شوند. این شرایط توسط روابط زیر، قابل بیان است:

$$\Omega_I = \{X | X \in \Omega, w(x_I - x_0) > 0\} \quad (24)$$

$$\Omega_I^{vis} = \{X | S_{x_I \rightarrow x_0} \cap \Theta = \emptyset\} \quad (25)$$

در تعریف فوق، $S_{x_I \rightarrow x_0}$ مجموعه‌ای از تمام نقاطی است که بر روی یک خط مستقیم واصل بین X_0 و X_I قرار دارند و Θ مجموعه کلیه مرزهای دامنه مشتمل بر ناپیوستگی‌ها و مرزهای محدب است. با توجه مطالب ذکر شده، دامنه تأثیر ذره با استفاده از معیار دید به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Omega_I^{DI} = \Omega_I^{vis} \cap \Omega_I \quad (26)$$

در مدل‌سازی عددی حاضر، ترک به صورت یک شکاف در نظر گرفته شده است و دو سمت ترک توسط نقاطی تعریف شده‌اند.

۳-۱-۲- تکنیک پرش

همان طور که در مرجع [۹] توضیح داده شده است، روش پرش توسط شکست نور در اطراف یک گوشه تیز تعریف می‌شود. خط ناپیوستگی همچنان به عنوان معیار دید مبهم و مات تلقی می‌گردد؛ اما طول اشعه توسط یک مسیر ناشی از شکست نور در اطراف گوشه ناپیوستگی محاسبه می‌شود. همان طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، نقطه x داده شده در حوزه نامرئی گره I که باید توسط معیار دید حذف شود، با تغییر پارامتر وزن آن به شرح زیر حفظ می‌شود:

$$d_I(x) = \left(\frac{d_1 + d_2(x)}{d(x)} \right)^\zeta d(x) \quad (27)$$

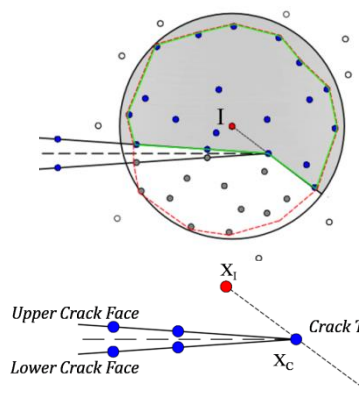
که در آن، $d_1 = |X_C - X_I|$ و $d_2(x) = |X_0 - X_C|$ است. در نتیجه، با انتخاب یک شاخص بزرگ‌تر ζ ، تابع وزن اصلاح شده wz به شدت کاهش می‌یابد که حوزه تأثیر X_I را تغییر داده، سپس ناپیوستگی را منعکس می‌کند. در مطالعه حاضر، بهترین نتایج برای $\zeta = 2$ به دست آمده است. اساس کار روش پرش، ایجاد تغییراتی در وزن است،

بالای توابع درون‌یاب، نیاز به اصلاحات ویژه در DLISM معمولی خواهد داشت.

۳-۱-۱- اصلاح ویژه در سطح‌های ناپیوسته ترک

مشابه روش بدون شبکه EFG برای مسائل ترک، استفاده از تابع تقریب MLS در DLISM و همچنین ارائه راه‌حل‌هایی با مشتقات هموار برای تابع وزن، ناپیوستگی در مشتقات ممکن است نوسانات فراوانی را ایجاد کند. بر این اساس، اصلاح تابع وزن یا حوزه تأثیر این گره‌ها در نزدیکی سطح ترک، نیازمند تکنیک‌های خاصی است. در این مقاله، ایده‌های معیار دید ارائه شده توسط بلچکو و همکاران [۸] و تکنیک پرش و شفافیت ارائه شده توسط ارگان و همکاران [۹] برای این روش اقتباس شده‌اند. در صورتی که گره در نزدیکی بخش‌های میانی ترک واقع شده باشد و طول ترک نسبت به حوزه تأثیر گره بزرگ‌تر باشد، تکنیک‌های مختلف ترک، عملکرد یکسانی خواهند داشت. تفاوت عملکرد تکنیک‌ها در میدان‌های نزدیک نوک ترک نمایان خواهد شد.

۳-۱-۱-۱- تکنیک معیار دید



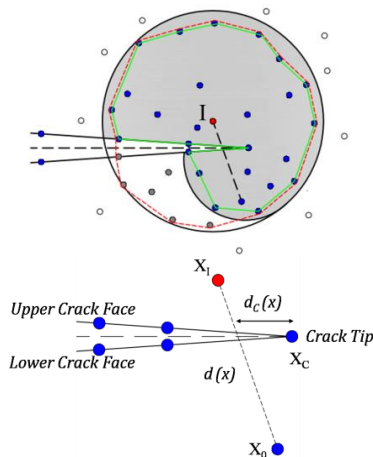
شکل ۲- تغییر شکل تابع شکل در نزدیکی نوک ترک در تکنیک معیار دید، نقاط خاکستری از حوزه گره اصلی خارج می‌شوند

در مرجع [۸]، روش معیار دید برای معرفی ناپیوستگی در تابع وزن و تابع شکل در روش EFG بدون شبکه در هر جایی که حوزه تأثیر توسط ناپیوستگی بریده شود، پیشنهاد شده است. در این روش، ناپیوستگی همانند یک دیوار در نظر گرفته شده که گره، نقاط پشت دیوار را نمی‌تواند مشاهده کند. اگر شعاع حوزه تأثیر یک تابع شکل به وسیله یک خط از یک نقطه به یک گره تعیین گردد و این خط به عنوان یک شعاع نور در نظر گرفته شود، مرزها نیز تحت عنوان یک سطح مات در نظر گرفته می‌شود. مطابق شکل

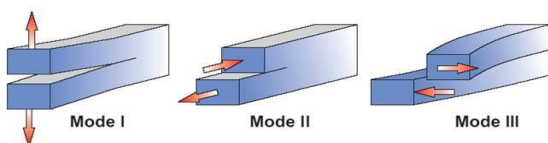
تا نقطه برخورد خط X_0X_I با خط ناپیوستگی هستند. \bar{d}_c پارامتری طولی است که از رابطه $\bar{d}_c = \kappa h$ به دست می آید. h فاصله گرهی و κ ضریب کدری است که $0 < \kappa < 1$ است. مانند روش پرارش، تابع وزن در حوزه تأثیر، بزرگ تر از صفر خواهد بود و در خارج از آن ناپدید می شود. در مطالعه حاضر، بهترین نتایج برای $\zeta = 3$ به دست آمده است. این روش هنگامی که گرهها بسیار به سطح ترک نزدیک باشند، به خوبی عمل نمی کند. در مواردی که گره به خط ترک بسیار نزدیک است، زاویه بین ترک و پرتو ساطع شده از گره به نوک ترک بسیار کوچک است. این موضوع باعث ایجاد افت شدیدی در تابع وزن خواهد شد. بنابراین یک فاصله حداقل برای گره تا خط ترک در نظر گرفته شده است. در تحقیقات انجام شده [۹]، این فاصله بزرگ تر از γh در نظر گرفته شده که در آن، $0 < \gamma < 1$ است که معمولاً $\gamma = 0.25$ در نظر گرفته می شود.

۴- مکانیک شکست ارتجاعی خطی^۱ (LEFM)

در سال ۱۹۲۱ اساس تئوری شکست، توسط گریفیت [۲۷] ارائه شد و در سال ۱۹۵۶ توسط ایروین [۲۸] و در سال ۱۹۶۸ توسط رایس [۲۹] تکمیل گردید. *LEFM*، مبتنی بر یک وضعیت ایدنال، زمانی که ماده به جز در ناحیه در

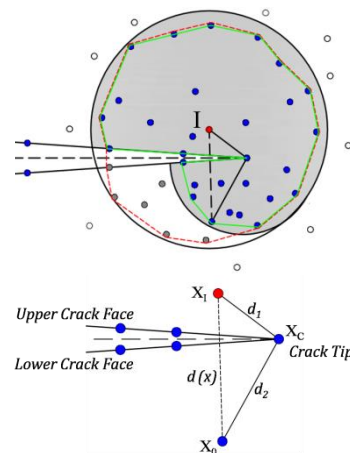


شکل ۴- تغییر شکل تابع شکل در نزدیکی نوک ترک در تکنیک شفافیت، نقاط خاکستری از حوزه گره اصلی خارج می شوند



شکل ۵- مودهای اول، دوم و سوم شکست مواد

جایی که تابع وزن تعریف می شود که با اصلاح طول شعاع حوزه تأثیر براساس پارامتر وزنی $d_I(x)$ صورت می پذیرد. پارامتر وزنی $d_I(x)$ اصلاح شده شعاع تأثیر جهت تولید توابع وزنی است. تابع وزن در صورتی که پارامتر وزنی $d_I(x)$ بزرگ تر از شعاع اختیار شده حوزه تأثیر باشد، مقدار صفر خواهد داشت. در نتیجه، تابع وزن محاسبه شده براساس رابطه (۲۷) در پشت ترک، نوعی ناپیوستگی از لحاظ مقدار نسبت به تابع وزن در جلوی ترک خواهد داشت. در مدل سازی ترک های میانی، کوتاه ترین مسیر گره تا نقطه به عنوان فاصله تأثیر گذار برای تعیین تابع شکل در نظر گرفته شده است.



شکل ۳- تغییر شکل تابع شکل در نزدیکی نوک ترک در تکنیک پرارش، نقاط خاکستری از حوزه گره اصلی خارج می شوند

۳-۱-۳- روش شفافیت

در روش شفافیت، سطح یا خط ناپیوستگی به وسیله تابعی با درجه های مختلف شفافیت نسبت به نوک ناپیوستگی تعریف می شود [۹]. در این صورت، نوک ناپیوستگی کاملاً شفاف در نظر گرفته شده، با دور شدن از نوک ترک، از میزان شفافیت کاسته می شود.

در شکل (۴)، در صورتی که پرتو نوری که از نقطه X_I به گره X_0 تابیده می شود، با خط ناپیوستگی برخورد کند، پارامتر طولی تابع وزن در روش شفافیت به صورت زیر اصلاح خواهد شد:

$$d_I(x) = d(x) + d_{max} \left(\frac{d_c(x)}{\bar{d}_c} \right)^\zeta \quad (29)$$

که در آن، $d(x) = |X_I - X_0|$ و d_{max} شعاع حداکثر حوزه تأثیر هر گره اصلی، $d_c(x)$ فاصله نوک ناپیوستگی

¹. Linear Elastic Fracture Mechanic

طول یک شعاع معلوم خارج شده از نوک ترک، تابعی برای K_I برحسب فاصله r به دست خواهد آمد. مقدار این تابع در $\theta = 0$ منجر به مقدار K_I می‌شود.

$$K_I = \sigma_{xx} \sqrt{2\pi r} \quad (33)$$

همچنین براساس جابه‌جایی‌های داده شده در معادله (۳۱) که برای حالت کرنش مسطح نوشته شده است، در $\theta = \pi$ یعنی خط پشت ترک نیز K_I به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K_I = u \left(\frac{\mu}{2-2\nu} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (34)$$

در صورتی که توزیع تنش σ_{xx} در جلوی ترک یا جابه‌جایی‌ها u در خط پشت ترک معلوم باشد، ضریب فاکتور شدت تنش و جابه‌جایی با برون‌یابی منحنی تغییرات K_I حاصل خواهد شد.

۵- مثال عددی

در این بخش، صفحه مستطیلی با ترک لبه‌ای با استفاده از روش DLMS با سه توزیع گرهی با درجات آزادی متفاوت در مقایسه با روش المان محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس و روش تحلیلی ارائه شده است که در آن، تکنیک‌های معیار دید، پراش و روش شفافیت برای تعریف ناپیوستگی استفاده شده است. گسسته‌سازی حوزه مسئله با استفاده از نقاط گرهی نامنظم به دلیل وجود تکینگی در نوک ترک و همچنین عملکرد مناسب‌تر [۲۵] انجام گردیده است، به این ترتیب که در نزدیکی نوک ترک که گرادیان شدید تنش وجود دارد، فاصله نقاط کمتر و تعداد نقاط بیشتر و با فاصله گرفتن از نوک ترک، تعداد نقاط کاهش می‌یابد. برای ارزیابی قابلیت روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و مقایسه نحوه عملکرد تکنیک‌های مختلف تعریف ترک در حل مسائل مکانیک شکست، صفحه مستطیل شکل حاوی ترک لبه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. برای تعیین میزان کارایی و دقت این روش، نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی و نتایج روش المان محدود مقایسه شده است. صفحه حاوی ترک لبه‌ای مطابق شکل (۶) با ابعاد صفحه $8 \times 16 \text{ mm}^2$ و طول ترک $a = 3/2 \text{ mm}$ مدول یانگ $E = 100 \text{ pa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0/3$ در نظر گرفته شده و صفحه تحت کشش $\sigma = 1 \text{ pa}$ قرار گرفته است.

در حل عددی، حوزه مسئله توسط سه آرایش گرهی با ۶۲۳، ۱۰۸۴ و ۲۰۸۸ نقطه گرهی مطابق با شکل‌های (۸-الف) تا (۱۰-الف) گسسته‌سازی شده است.

حال اضمحلال، مانند نوک ترک قرار می‌گیرد، مطرح شده است. اگر اندازه ناحیه غیرالاستیک در مقایسه با حوزه الاستیک کوچک باشد، از این مفهوم برای توصیف ماده حاوی ترک استفاده خواهد شد.

در تئوری LEFM، میدان تنش شامل یک تکینگی مستقیماً در نوک ترک بدون وابستگی به کوچک بودن نیروی اعمالی است. گریفیث یک رویکرد مبتنی بر انرژی برای حل مسئله رشد ترک‌های موجود، با علم به اینکه معیار مقاومت قابل قبول نیست، پیشنهاد کرده است؛ اما این تئوری برای مسائل شکست فلزات قابل استفاده نبوده است. ایروین فاکتور شدت تنش (SIF) را به عنوان نسبت رهایی انرژی که می‌توان برای توصیف میدان جابه‌جایی و تنش حول ترک استفاده شود، معرفی کرد. این مفهوم مبتنی بر تجزیه و تحلیل ترک براساس سه حالت باز شدن ترک، مدهای ۱، ۲ و ۳ مطابق شکل (۵) است که می‌تواند رفتار تمامی شکست‌ها را توسط ترکیب خطی سه مد تعریف کند. همچنین تابعی مختلط وجود دارد که می‌توان با انتگرال گیری از آن، تابع تنش ابری را برای مسئله صفحه بی‌نهایت تحت بار کششی دومحوره یکنواخت به دست آورد [۳۴]. روابط تنش و جابه‌جایی برای یک ترک در صفحه بی‌نهایت برای مود اول شکست به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} [\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ \sin \frac{\theta}{2} [\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}] \end{cases} \quad (31)$$

در این روابط، θ و r مختصات قطبی نقاط نسبت به نوک ترک، μ مدول برشی ماده و K_I فاکتور شدت تنش مود اول شکست است که مقدار آن وابسته به هندسه مسئله، اندازه ترک و مقدار تنش اعمالی می‌باشد. همچنین κ ثابت کسولوف است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{for plane stress} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{for plane strain} \end{cases} \quad (32)$$

۴-۱- فاکتور شدت تنش

۴-۱-۱- روش برون‌یابی جابه‌جایی و تنش

با استفاده از روابط (۳۰) و (۳۱) برای توزیع تنش و جابه‌جایی در مود ۱ در حوالی نوک ترک، با تعیین تنش در

که با توجه به شرایط هندسی مسئله از رابطه زیر به دست آمده است:

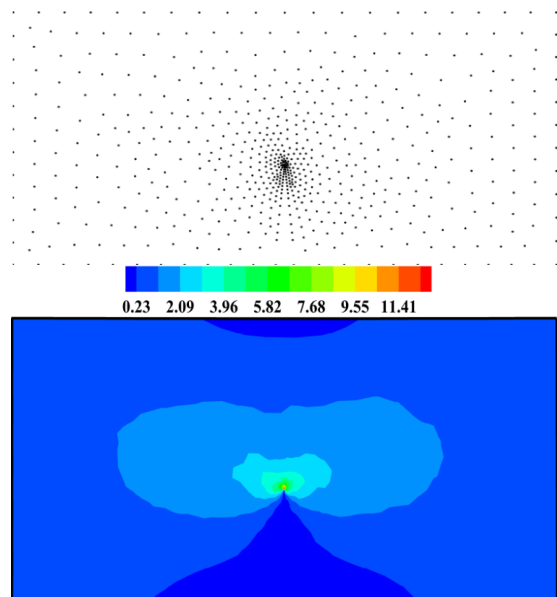
$$K_I = f\left(\frac{a}{w}\right)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (35)$$

$$f(x) =$$

$$1.12 - 0.231x + 10.55x^2 - 21.72x^3 + 30.39x^4$$

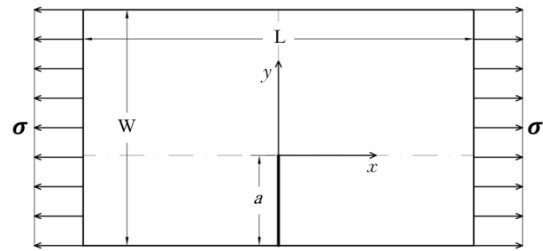
$f(x)$ ضریب اصلاح اثر لبه‌ای، a طول ترک و w عرض صفحه تحت تنش اعمالی است.

اشکال (۱۱) تا (۱۳) مقایسه نموداری توزیع تنش به ترتیب σ_{xx} ، σ_{yy} و τ_{xy} در فواصل مختلف از نوک ترک در امتداد خط ناپیوستگی، با به کارگیری سه تکنیک تعریف ناپیوستگی معیار دید، روش پراش و شفافیت در روش حداقل مربعات گسسته با نتایج تحلیلی را نشان می‌دهد. در تمامی اشکال موجود در این نوشتار، VIS، DIF و TRS، بیان‌کننده تکنیک‌های تعریف ناپیوستگی به ترتیب روش های معیار دید، پراش و شفافیت هستند.



شکل ۸- گسسته‌سازی حوزه مسئله توسط ۶۲۳ نقطه گرهی و نمایش کانتوری توزیع تنش σ_{xx} شبیه‌سازی شده در DLSM

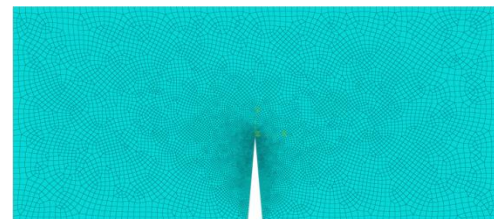
مقایسه نموداری نتایج در اشکال (۱۱) تا (۱۳)، بیانگر دقت و عملکرد مناسب DLSM در بهره‌گیری از تکنیک‌های مختلف ترک است. با این حال، نشان‌دهنده هم‌پوشانی دقیق‌تر نمودار نتایج حاصل از به کارگیری تکنیک پراش نسبت به تکنیک شفافیت و به‌ویژه معیار دید با نمودارهای نتایج تحلیلی است. روش معیار دید و سپس روش شفافیت به دلیل محدودیت‌های ذکر شده در بخش ۳ این مقاله، نسبت به روش پراش، گره اصلی در نزدیکی نوک ترک، تعداد نقاط بیشتری در منطقه پشت ترک را از دست می‌دهد؛ در نتیجه



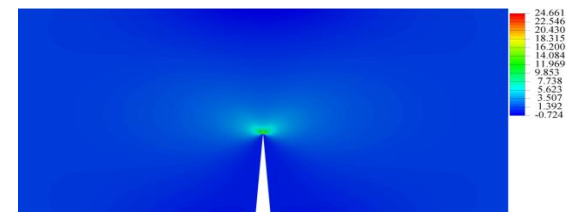
شکل ۶- ترک لبه در صفحه مستطیلی

در نوک ترک و بر لبه فوقانی صفحه در امتداد ترک به ترتیب تکیه‌گاه مفصلی و تکیه‌گاه غلطکی در نظر گرفته شده است. در شکل‌های (۸-ب) تا (۱۰-ب) توزیع تنش در نمونه شبیه سازی شده به روش بدون شبکه DLSM با استفاده از تکنیک پراش نشان داده شده است. تکنیکی تنش در نوک ترک برای هر سه توزیع گرهی به وضوح دیده می‌شود و با فاصله گرفتن از نوک ترک، از میزان تنش به شکل قابل‌ملاحظه‌ای کاسته شده است. همچنین این مسئله در نرم‌افزار آباکوس با شرایط مرزی فوق و توسط ۱۲۴۲۹ المان مربعی چهار گرهی مطابق شکل (۷-الف) شبیه‌سازی شده است. توزیع تنش در راستای محور x برای حل عددی در روش FEM استخراج شده از نرم‌افزار آباکوس در شکل (۷-ب) آورده شده است. مقایسه توزیع تنش در شکل (۷-ب) با توزیع تنش حاصل از مدل‌سازی عددی با ۲۰۸۸ نقطه گرهی توسط روش پیشنهادی در شکل (۱۰)، مطابقت بسیار خوبی را نشان داده است.

حل تحلیلی با استفاده از روابط (۳۰) انجام شده است. در این روابط، K_I فاکتور شدت تنش مود اول شکست است.

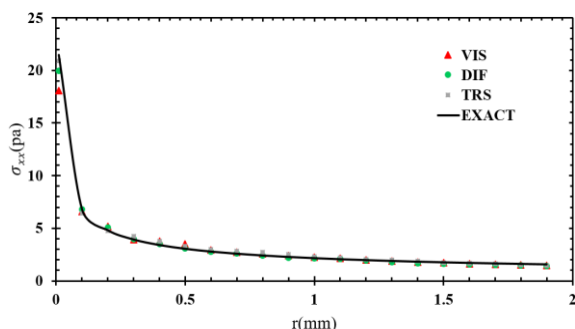


(الف)

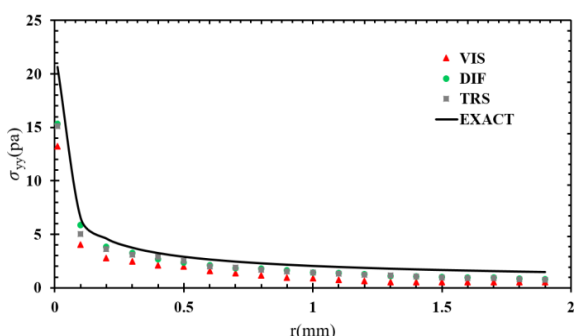


(ب)

شکل ۷- مدل‌سازی مسئله با ترک لبه‌ای در نرم‌افزار آباکوس (الف) شبکه‌بندی میدان مسئله توسط ۱۲۴۲۹ المان مربعی، (ب) توزیع تنش σ_{xx}

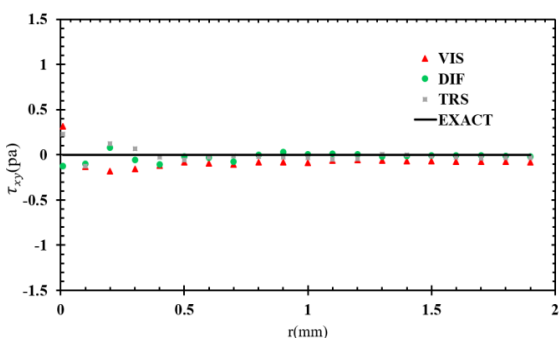


شکل ۱۱- مقادیر تنش σ_{xx} در فواصل مختلف از نوک ترک در روش‌های معیار دید، پراش، شفافیت در مقایسه با نتیجه تحلیلی



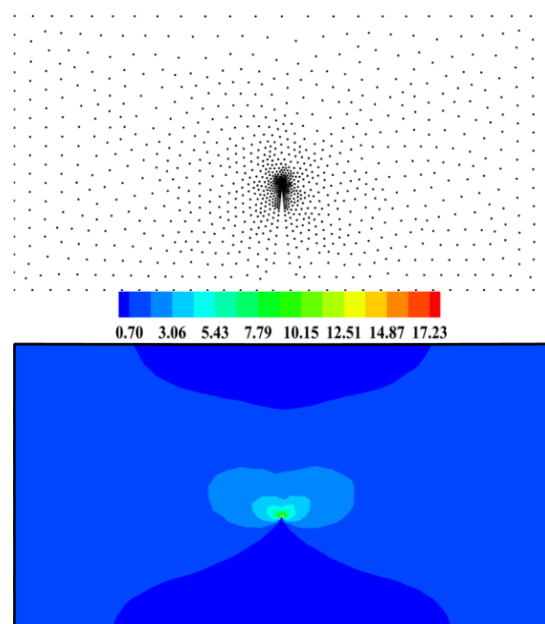
شکل ۱۲- مقادیر تنش σ_{yy} در فواصل مختلف از نوک ترک در روش‌های معیار دید، پراش، شفافیت در مقایسه با نتیجه تحلیلی

مقادیر تنش σ_{xx} در نقاط با فواصل مختلف از نوک ترک در امتداد خط ناپیوستگی یا به عبارت دیگر در نقاط با مختصات $x=xc$ و $y>yc$ ، که yc و xc مختصات نوک ترک و θ زاویه بین امتداد خط متصل‌کننده نقطه موردنظر در جلوی ترک و نوک ترک با خط ناپیوستگی هستند. برای روش DLISM در سه تکنیک تعریف ناپیوستگی با سه توزیع مختلف گرهی در مقایسه با حل عددی در FEM و حل تحلیلی در شکل (۱۵) آورده شده است.



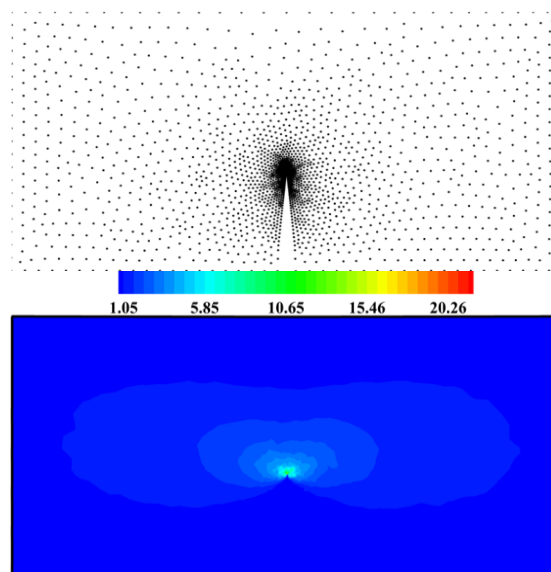
شکل ۱۳- مقادیر تنش τ_{xy} در فواصل مختلف از نوک ترک در روش‌های معیار دید، پراش، شفافیت در مقایسه با نتیجه تحلیلی

روش معیار دید عملکرد نسبتاً ضعیف‌تر و روش پراش عملکرد دقیق‌تری را از خود نشان داده‌اند.



شکل ۹- گسسته‌سازی حوزه مسئله توسط ۱۰۸۴ نقطه گرهی و نمایش کانتوری توزیع تنش σ_{xx} شبیه‌سازی شده در DLISM

شکل (۱۴) مقادیر نرمال شده فاکتور شدت تنش عددی حاصل از رابطه ۳۳ برای تنش σ_{xx} و مقدار نرمال شده تحلیلی آن را در فواصل مختلف از نوک ترک در راستای طول ترک نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تکنیک پراش و سپس روش شفافیت، هم‌پوشانی بهتری نسبت به روش معیار دید با نتیجه تحلیلی دارند.

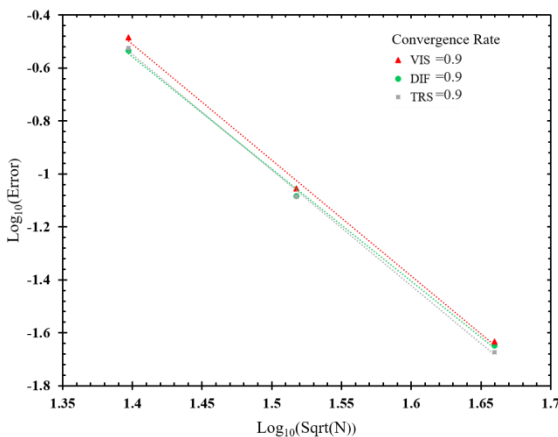


شکل ۱۰- گسسته‌سازی حوزه مسئله توسط ۲۰۸۸ نقطه گرهی و نمایش کانتوری توزیع تنش σ_{xx} شبیه‌سازی شده در DLISM

۰/۵a به مرکزیت نوک ترک که a طول ترک است، به دست آمده است. میزان نرخ همگرایی هرکدام از سه تکنیک تعریف ناپیوستگی در شکل (۱۵) بیانگر همگرایی بالای روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته در استفاده از هر سه تکنیک اعمال ترک است. همان گونه که مشاهده می شود، با کاهش نقاط گرهی میزان خطای هرکدام از روش ها افزایش یافته است. با توجه به شیب خط رگرسیونی، به ترتیب تکنیک پراش، شفافیت تأثیر کمتری با کاهش نقاط نسبت به روش معیار دید از خود نشان داده اند. همان گونه که اشاره شده است، دلیل اصلی اختلاف دقت تکنیک های مختلف ناپیوستگی در محاسبه تلاش های داخلی، نحوه انتخاب نقاط در نزدیکی نوک ترک است، جایی که گرادبان تنش به شدت تغییر می کند. در مطالعه [۱۷] نیز نشان داده شده است که با اصلاح روش معیار دید با استفاده از افزایش تعداد نقاط در محدوده دید گره اصلی، اثر و دقت تکنیک به صورت قابل ملاحظه ای بهبود می یابد.

جدول ۱- درصد خطای تکنیک های تعریف ترک نسبت به گسسته سازی حوزه مسئله با ۲۰۸۸، ۱۰۸۴ و ۶۲۳ نقطه گرهی

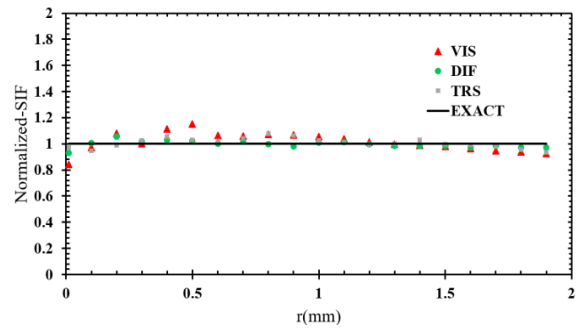
شفافیت	پراش	معیار دید	تعداد نقاط
۲/۲۹	۲/۲۵	۲/۳۳	۲۰۸۸
۸/۳۲	۸/۲۶	۸/۸۳	۱۰۸۴
۲۹/۹۰	۲۹/۲۸	۳۲/۸۲	۶۲۳



شکل ۷- نرخ همگرایی سه تکنیک معیار دید، روش پراش و شفافیت برای سه آرایش گرهی

۶- بحث و نتیجه گیری

در گام نخست، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای حل مسائل ترک در مواد ایزوتروپیک در مقاله حاضر به کار گرفته شده است. این روش به دلیل استفاده از توابع شکل با مرتبه پیوستگی بالا در مواجهه با سطح های

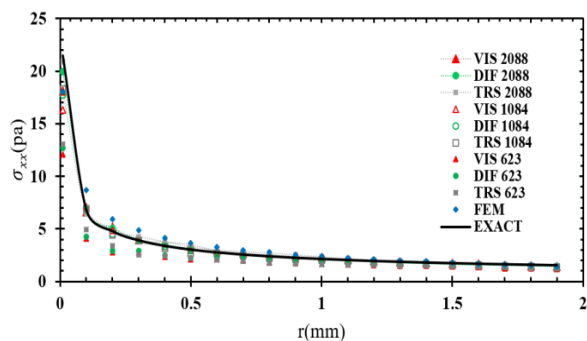


شکل ۱۴- مقادیر فاکتور شدت تنش نرمال شده در فواصل مختلف از نوک ترک در روش های معیار دید، پراش، شفافیت در این شکل، حساسیت روش پیشنهادی نسبت به تعداد نقاط جهت گسسته سازی حوزه مسئله نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می شود، با کاهش تعداد نقاط، از میزان هم پوشانی نمودارها و در نتیجه، از میزان دقت روش DLSSM کاسته شده است.

برای محاسبه میزان خطای اعمال هرکدام از تکنیک مختلف تعریف ناپیوستگی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و بررسی نرخ همگرایی این روش در حل مسائل حاوی ترک با سه آرایش گرهی از نرم خطای رابطه زیر استفاده شده است:

$$e_{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n |\sigma_i^{exact} - \sigma_i^{num}|}{\sum_{i=1}^n |\sigma_i^{exact}|} \quad (36)$$

که σ^{exact} و σ^{num} به ترتیب مقادیر تنش های تحلیلی و عددی هستند و n تعداد کل نقاط استفاده شده می باشد.



شکل ۱۵- مقادیر تنش σ_{xx} در فواصل مختلف از نوک ترک در روش FEM و DLSSM با سه تکنیک معیار دید، روش پراش و شفافیت برای آرایش گرهی ۲۰۸۸، ۱۰۸۴ و ۶۲۳ نقطه گرهی

درصد خطای هر یک از روش های اعمال ناپیوستگی، متناسب با تعداد نقاط گرهی که برای گسسته سازی حوزه مسئله مورد استفاده قرار گرفته، در جدول ۱ آورده شده است. میزان خطا، با استفاده از رابطه (۳۶) با محاسبه مقادیر تنش σ_{xx} در نقاط موجود بین دو دایره به شعاع های $0/1a$ و

وجود تکینگی در میدان نوک ترک و تأثیر عملکرد روش عددی نسبت به تعداد نقاط موجود در زیرحوزه هر گره اصلی، در نحوه انتخاب نقاط گرهی در نزدیکی نوک ترک توسط سه تکنیک بررسی شده و ماهیت عملکرد آن‌ها مشخص شده است؛ زیرا علی‌رغم کاهش نسبی هزینه محاسباتی و سادگی در به‌کارگیری تکنیک معیار دید، این روش تعداد بیشتری از نقاط گرهی در نزدیکی نوک ناپیوستگی از حوزه اثر گره اصلی را از دست داده است و همچنین در روش شفافیت زمانی که گره به سطح ترک نزدیک است، با اعمال شرایطی نقاط نزدیک‌تر از 0.25 فاصله گرهی از فرایند محاسباتی خارج می‌شوند؛ اما روش پراش نسبتاً تعداد نقاط بیشتری را در نوک ترک در میدان گره اصلی قرار می‌دهد.

اثر بخشی و دقت بالای روش بدون شبکه حداقل مرتب‌ات گسسته مورد تأیید است و دقت آن درباره به‌کارگیری تکنیک‌های مختلف تعریف ناپیوستگی در نمونه ارائه شده حدود ۲ درصد تعیین شده است. شایستگی‌های ذاتی این روش مانند یک روش واقعی بدون شبکه بودن، سهولت در طرح برنامه و حل دقیق معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب متغیر، آن را برای حل مسائل مکانیک شکست و رشد ترک در مواد پیچیده، جذاب‌تر کرده است.

ناپیوسته، نیازمند اصلاحاتی در حوزه اثر گره اصلی در نزدیکی سطح ترک است. مقایسه عملکرد و میزان دقت تکنیک‌های مختلف تعریف ناپیوستگی‌های قوی در تابع وزن به روش پیشنهادی به‌عنوان یکی از اهداف اصلی پژوهش حاضر در نظر گرفته شده است. بدین منظور، تکنیک‌های معیار دید، پراش و شفافیت به کار گرفته شده است. توزیع گرهی هدفمند به‌صورت نامنظم به دلیل وجود تکینگی در نوک ترک، نتایج مفیدتری را دربر داشته است. نمایش کانتوری توزیع تنش به‌وضوح تمرکز تنش در نوک ترک را نشان داده است. افزایش تعداد نقاط گرهی جهت گسسته‌سازی مسئله منجر به حصول نتایج بهتر و مطلوب‌تر شده است. با این حال، با مقایسه نتایج، مشخص شده است که تکنیک معیار دید، تأثیر بیشتری نسبت به کاهش نقاط در مقایسه با دو روش دیگر از خود نشان می‌دهد.

اثر بخشی، دقت و کارایی هر سه تکنیک استفاده‌شده برای اصلاح تابع شکل در نزدیکی سطح ترک، بسیار خوب ارزیابی شده، اما عملکرد سه تکنیک در نزدیکی نوک ترک با وجود تکینگی و گرادبان شدید تنش، متفاوت بوده است. تکنیک‌های پراش، شفافیت و معیار دید در مقایسه با یکدیگر، به ترتیب دقت بالا، متوسط و ضعیف‌تری از خود نشان داده‌اند. دلیل اصلی این اختلافات در نتایج، با علم به

مراجع

- [1] S.K. Chan, I.S.Tuba, and W.K.Wilson, "On the finite element method in linear fracture mechanics", Engineering Fracture Mechanic, Vol. 2, 1970, pp. 1–17.
- [2] Y. Gu, X. He, W. Chen and C. Zhang, "Analysis of three-dimensional anisotropic heat conduction problems on thin domains using an advanced boundary element method", Computers & Mathematics, Vol. 75, No. 1, 2018, pp. 33–44.
- [3] T. Belytschko and T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, No. 5, 1999, pp. 601–20.
- [4] N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, No. 1, 1999, pp. 131–150.
- [5] T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, "Element free Galerkin methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 229–256.
- [6] S.N. Atluri and T. Zhu, "A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach", Computational Mechanics, Vol. 22, 1998, pp. 117–127.
- [7] SN. Atluri, J. Zhang and T. Zhu, "A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach", Computational Mechanics, Vol. 21, 1998, pp. 223–235
- [8] T. Belytschko, L. Gu and Y.Y. Lu, "Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods", Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, Vol. 2, 1994, pp. 519–534.
- [9] D.J. Organ, M.A. Fleming and T. Belytschko, "Continuous Meshless Approximations for Nonconvex Bodies By Diffraction and Transparency", Computational Mechanics, Vol. 18, 1996, pp. 225–235.

- [10] S.A. Silling, "Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, 2000, pp. 175-209.
- [11] S.A. Silling and E. askari, "A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanic", *Computers and Structures*, Vol. 83, 2005, pp. 1526-1535.
- [12] B. Muravin and E. Turkel, "Spiral Weight for Modeling Cracks in Meshless Numerical Methods", 2003.
- [13] Z. Zhang, K.M. Liew, Y. Cheng and Y.Y. Lee, "Analyzing 2D fracture problems with the improved element-free Galerkin method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, 2008, pp. 241–250
- [14] Y.T. Gu, W. Wang, L.C. Zhang and X.Q. Feng, "An enriched radial point interpolation method (e-RPIM) for analysis of crack tip fields", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 78, 2011, pp. 175–190.
- [15] M. Khezri, M. Abbasi and K.J.R. Rasmussen, "A combined meshfree/finite strip method for analysis of plates with perforations and cracks", *Thin-Walled Structures*, Vol. 111, 2017, pp. 113–125.
- [16] N. Fallah and N. Nikraftar, "Meshless finite volume method for the analysis of fracture problems in orthotropic media", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 204, 2018, pp. 46–62.
- [17] J. Lei, Y. Xu, Y. Gu and M. Fan, "The generalized finite difference method for in-plane crack problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 98, 2019, pp. 147–156.
- [18] W. Yao, X. Zhou and F. Berto, "Continuous smoothed particle hydrodynamics for cracked nonconvex bodies by diffraction criterion", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 108, 2020, 102584.
- [19] M.H. Afshar and H. Arzani, "Solving Poisson's equations by the discrete least squares meshless method", *WIT Transaction on Modelling and Simulation*, Vol. 42, 2004, pp. 23-32.
- [20] G. Shobeyri and M.H. Afshar, "Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method", *Computers & Fluids*, Vol. 39, 2010, pp. 461–470.
- [21] M.H. Afshar, M. Lashckarbolok and G. Shobeyri, "Collocated discrete least squares meshless (CDLSM) method for the solution of transient and steady-state hyperbolic problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 60, 2009, pp. 1055-1078.
- [22] M. Naisipour, M.H. Afshar, B. Hassani and A.R. Firoozjaee, "Collocation Discrete Least Square (CDLS) Free Methods Moving Beyond the Finite Element Method", CRC Press, 2003.
- [23] A.R. Firoozjaee and M.H. Afshar, "Discrete least squares meshless method with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, 2009, pp. 83–92.
- [24] M. Naisipour, M.H. Afshar, B. Hassani and A.R. Firoozjaee, "Collocation Discrete least square (CDLS) method for elasticity problem and grid irregularity effect assessment", *American journal of applied sciences*, Vol. 5, No. 11, 2008, pp. 1595-1601.
- [25] M.H. Afshar, J. Amani and M. Naisipour, "A node enrichment adaptive refinement in Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, 2012, pp. 385–393
- [26] M.H. Afshar, M. Naisipour and J. Amani, "Node moving adaptive refinement strategy for planar elasticity problems using discrete least squares meshless method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, 2011, pp. 1315–1325.
- [27] A. Griffith, "The phenomena of rupture and flows in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, No. 221, 1921, pp. 163–197.
- [28] G. R. Irwin, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics - Trans. ASME* 24, 1956, pp. 361–364.
- [29] J.R. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics - Trans. ASME* 35, 1968, pp. 379–386.
- [30] Y. Li, J. Li and P.H. Wen, "Finite and infinite block Petrov–Galerkin method for cracks in functionally graded materials", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 68, 2019, pp. 306–326.
- [31] R. Zhang and R. Guo, "Determination of crack tip stress intensity factors by singular Voronoi cell finite element model", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 197, 2018, pp. 206–216.

[32] B.H. Nguyen, H.D. Tran, C. Anitescu, X. Zhuang and T. Rabczuk, "An isogeometric symmetric Galerkin boundary element method for two-dimensional crack problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 306, 2016, pp. 252–275.

[33] W. Zhou, B. Liu, Q. Wang, X. Chang and Xu. Chen, "Formulations of displacement discontinuity method for crack problems based on boundary element method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 115, 2020, pp. 86–95.

[۳۴] فرهاد جاویدراد، مکانیک شکست در طراحی سازه‌ها، انتشارات گوتنبرگ، ایران، ۱۳۸۸.

[35] H. Tada, P.C. Paris and G.R. Irwin, *The Stress Analysis of Crack Handbook*, 3th ed., ASME Press, 2000.

[36] G.R. Liu, *Mesh Free Methods*, CRC Press, Boca Raton, Fla, USA, 1st ed., 2003.

[37] L. Wang, J.S. Chen and H.Y. Hu, "Subdomain radial basis collocation method for fracture mechanics", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 83, 2010, pp. 851–876.

[38] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas and M. Duflo, "Meshless methods: a review and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, 2008, pp. 763–813.

[۳۹] عبدالحسین فریدون و فرهان یکتای کیا، «تحلیل ترک در مواد مرکب به وسیله روش انرژی»، *مجله مدل‌سازی در مهندسی*، دوره ۳، شماره ۱۷، تابستان ۱۳۸۸، صفحه ۵۵–۶۵.

[۴۰] بهروز حسنی و احمد گنجعلی، «مکان‌یابی نقاط بهینه تنش در تحلیل ایزوژئومتریک»، *مجله مدل‌سازی در مهندسی*، دوره ۱۳، شماره ۴۰، تابستان ۱۳۹۴، صفحه ۱۵۱–۱۶۷.

[۴۱] محمد دامغانی نوری و حسین رحمانی، «بررسی تأثیرات زمان فراز بار ضربه‌ای بر ضریب شدت تنش دینامیکی در ترک دوبعدی نیمه بی‌نهایت بر روی جسم نامحدود»، *مجله مدل‌سازی در مهندسی*، دوره ۱۳، شماره ۴۰، بهار ۱۳۹۴، صفحه ۷۹–۸۷.

[۴۲] میثم شکوری، سید روح‌الله کاظمی، «بررسی رشد دو ترک پادمتقارن در ورق بر اثر کشش لبه‌ها با سرعت‌های مختلف با استفاده از تئوری پری‌دینامیک»، *مجله مهندسی مکانیک امیرکبیر*، دوره ۵۱، شماره ۱، ۱۳۹۸، صفحه ۴۳–۵۲.