

## تحلیل پایداری لیاپانوف در آموزش سیستم فازی - عصبی نوع ۲ با یک الگوریتم ترکیبی مبتنی بر گرادیان نزولی و فیلتر کالمن

محمد مهدی ذبیحی شش پلی<sup>۱</sup>، مهدی علیاری شوره‌دلی<sup>۲\*</sup> و علی معرفیان پور<sup>۳</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۷	پایداری آموزش در شناسایی سیستم‌های غیرخطی یکی از مهمترین مسائل در پژوهش‌های مربوط به کنترل است. این مقاله به بررسی پایداری یک سیستم فازی-عصبی نوع ۲ بازه‌ای (IT2ANFIS) به‌عنوان شناساگر از طریق یک تابع لیاپانوف جدید می‌پردازد. در این تحلیل، آموزش قسمت مقدم و تالی سیستم IT2ANFIS به ترتیب با الگوریتم‌های گرادیان نزولی و فیلتر کالمن صورت می‌پذیرد. از این‌رو، با استفاده از تابع لیاپانوف مورد نظر، محدوده‌های مجاز متغیرهای قابل تنظیم آموزش، به‌گونه‌ای بدست آمده و بر الگوریتم‌ها اعمال می‌گردند تا فرآیند شناسایی پایدار بماند. مطابق با تحلیل پایداری این پژوهش، محدوده‌های تطبیقی وسیعی از متغیرهای قابل تنظیم در آموزش الگوریتم‌ها به‌دست آمده است. علاوه بر این، مطابق با نتایج شبیه‌سازی، با انتخاب محدوده‌های مجاز بر مبنای تحلیل پایداری پیشنهادی، فرآیند شناسایی پایدار و با عملکرد مناسبی بوده است. هنگامی که روش پیشنهادی برای پیش‌بینی مقادیر آتی سری آشوب مکی‌گلاس و یک سیستم غیرخطی با داده‌های تصادفی به‌کار گرفته می‌شود، از نظر ریشه دوم میانگین خطا، زمان شناسایی، و قرارگیری در تله کمینه محلی، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های دیگر دارد.
پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۸	
<b>واژگان کلیدی:</b>	
شناسایی سیستم، پایداری لیاپانوف، سیستم فازی-عصبی نوع ۲، بازه‌ای، گرادیان نزولی، فیلتر کالمن	

### ۱- مقدمه

معطوف داشته‌اند. با بهره‌گیری از الگوریتم‌های آموزشی قدرتمند شبکه‌های عصبی و ترکیب آن با اطلاعات افراد خبره به صورت قوانین زبانی در سیستم فازی، سیستم استنتاجی فازی-عصبی مصنوعی تطبیقی<sup>۵</sup> (ANFIS) ایجاد شده است [۱]. نوع جامع‌تری از سیستم‌های فازی با عنوان سیستم‌های فازی نوع ۲ (T2FS) توسط پروفیسور زاده ارائه گردید [۲]. عملکرد قابل توجه T2FS و متعاقب آن T2ANFIS در مواجهه با عدم قطعیت‌ها و وجود درجه آزادی بالاتر آن نسبت به ANFIS، منجر به رشد روز افزون

هوش محاسباتی<sup>۴</sup> (CI) دانشی برای تقلید استدلال ذهنی انسان یا گزینه موجودات زنده توسط یک برنامه رایانه‌ای است. این دانش به‌روش‌های حل یا مدل‌سازی مسائل پیچیده همراه با عدم قطعیت و یا مسائلی که رویکردهای مدل‌سازی سنتی در آن‌ها بی‌اثر هستند، اشاره دارد. دو بخش اصلی هوش محاسباتی، منطق فازی و شبکه عصبی است. در سال‌های اخیر، تعداد زیادی از پژوهشگران این حوزه توجه خود را به شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: aliyari@kntu.ac.ir

۱. دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، برق و کامپیوتر- واحد علوم و تحقیقات- دانشگاه آزاد اسلامی - تهران - ایران

۲. دانشیار، گروه مکترونیک- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تهران- ایران

۳. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، برق و کامپیوتر- واحد علوم و تحقیقات- دانشگاه آزاد اسلامی - تهران - ایران

<sup>4</sup> Computational Intelligence

<sup>5</sup> Adaptive Neuro-Fuzzy inference system

<sup>6</sup> Type 2 Fuzzy system

به گونه‌ای با الگوریتم‌های مرتبط با مسائل شناسایی همراه می‌گردد که بتواند محدوده‌های مجاز پایدارساز را برای پارامترهای قابل تنظیم در الگوریتم‌ها (بهینه‌سازها) تعیین کند. این پارامترها در محدوده تعیین شده و به صورت برخط به گونه‌ای تغییر می‌کنند که فرآیند شناسایی پایدار بماند. پیاده‌سازی نظریه پایداری لیپانوف در بیشتر الگوریتم‌های مبتنی بر مشتق امکان‌پذیر است، اما این مسئله برای بیشتر الگوریتم‌های غیر مبتنی بر مشتق شکل صریحی ندارد. هرچند، نظریه پایداری لیپانوف در برخی از الگوریتم‌های غیر مبتنی بر مشتق مورد بررسی قرار گرفته است [۲۸] و [۲۹].

پژوهشگران مرجع [۳۰]، مدل‌هایی را برای سیستم استنتاجی فازی-عصبی مصنوعی نوع ۲ (T2ANFIS) ارائه دادند. در مدل‌های ارائه شده توسط ایشان، توابع عضویت مقدم از مجموعه فازی نوع ۲ ساخته شده بود، ولی از تالی‌های مختلف استفاده شد. در تحلیل پایداری که آن‌ها ارائه کرده‌اند، به منظور تضمین پایداری آموزش با استفاده از الگوریتم GD، محدوده‌های مجاز نرخ‌های آموزش، توسط تحلیل پایداری لیپانوف به گونه‌ای تعیین شد تا روند آموزش در هر تکرار پایدار بماند. همچنین آن‌ها مشتق‌های مربوط به بهینه‌سازی توسط الگوریتم GD را برای سیستم فازی نوع ۲ با جزئیات کامل بیان نمودند. پژوهشگران مرجع [۳۱]، از الگوریتم GD برای بهینه‌سازی T2ANFIS بهره بردند و پایداری آموزش را با استفاده از روش نامساوی ماتریس خطی<sup>۱۴</sup> (LMI) مورد بررسی قرار دادند. قسمت تالی کار آن‌ها بصورت تابعی غیر خطی از ورودی‌ها بیان شد و قسمت مقدم نیز از مجموعه‌های فازی نوع ۲ تشکیل شده بود.

مندز و هرناندز [۳۲]، از یک الگوریتم ترکیبی برای تنظیم پارامترهای سیستم T2FS بهره بردند که در قسمت مقدم از GD و در قسمت تالی از الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی (RLS) استفاده می‌شد. آن‌ها مجموعه‌های فازی تاکاگی-سوگنو-کانگ<sup>۱۵</sup> (TSK) نوع ۱ را در قسمت تالی استفاده نمودند. تحلیل پایداری که آن‌ها ارائه کردند منجر

تعداد انتشار مقالات علمی در این زمینه شده است. نتایج حاصل از پژوهش‌های مربوط به T1FS و T2FS در زمینه‌های مختلفی از جمله مهندسی و کنترل [۳-۵]، شناسایی [۶-۸]، پیش‌بینی [۹]، مدلسازی [۱۰] و تصمیم‌گیری [۱۱] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. شناسایی سیستم‌های دینامیکی با استفاده از ANFIS، نیازمند به الگوریتم‌های آموزشی قدرتمند است. وظیفه این الگوریتم‌ها، پیدا نمودن ضرایب بهینه برای پارامترهای مدل (شناساگر<sup>۱</sup>) است، به گونه‌ای که مدل تحت آموزش بیشترین تطابق را با سیستم اصلی داشته باشد. به طور کلی، این الگوریتم‌ها به سه دسته تقسیم‌بندی می‌شوند: الگوریتم‌های مبتنی بر مشتق، غیر مبتنی بر مشتق و ترکیب هر دو نوع که از آن‌ها به عنوان الگوریتم‌های ترکیبی تعبیر می‌شود [۱۲].

در الگوریتم‌های مبتنی بر مشتق همانند گرادیان نزولی<sup>۲</sup> (GD)، حداقل مربعات<sup>۳</sup> (LS)، مارکارت<sup>۴</sup> (LM)، لونیبرگ<sup>۵</sup> (LM)، فیلتر کالمن<sup>۵</sup> (KF) و انواع آن [۱۷ و ۱۸]، بهینه‌سازی پارامترها وابسته به مشتق خروجی مدل نسبت به پارامترها است، در حالی که قوانین به روز رسانی در الگوریتم‌های غیر مبتنی بر مشتق همانند الگوریتم ژنتیک<sup>۶</sup> (GA)، بهینه‌سازی اجتماع ذرات<sup>۷</sup> (PSO)، کولونی زنبورها<sup>۸</sup> (ABC)، کولونی مورچه‌ها<sup>۹</sup> (ACO)، شبیه‌سازی تبرید<sup>۱۰</sup> (SA)، الگوریتم چرخه آب<sup>۱۱</sup> (WSA)، و غیره، متکی بر هیچ‌گونه مشتقی نیست.

علی‌رغم این که الگوریتم‌های مبتنی بر مشتق تمایل بسیار زیادی برای همگرایی در کمینه محلی دارند، اما آن‌ها دارای نرخ همگرایی مطلوبی هستند [۲۷]. در الگوریتم‌های ترکیبی، پارامترهای مقدم<sup>۱۲</sup> و تالی<sup>۱۳</sup> با استفاده از ترکیب دو الگوریتم مجزا از هم بهینه‌سازی می‌شوند. این مسئله موجب افزایش شانس رسیدن به نقطه بهینه در مسئله بهینه‌سازی مربوطه خواهد شد.

پایداری فرآیند آموزش یکی از مسائل پراهمیت در شناسایی است. تحلیل پایداری در مسائل کنترل با استفاده از نظریه لیپانوف انجام می‌شود. تحلیل پایداری لیپانوف

<sup>9</sup> Ant colony Optimization

<sup>10</sup> Simulated Annealing

<sup>11</sup> Water cycle algorithm

<sup>12</sup> Antecedent

<sup>13</sup> Consequent

<sup>14</sup> Linear matrix inequality

<sup>15</sup> Takagi-Sugeno-Kang

<sup>1</sup> Identifier

<sup>2</sup> Gradient descent

<sup>3</sup> Least square

<sup>4</sup> Levenberg Marquardt

<sup>5</sup> Kalman filter

<sup>6</sup> Genetic algorithm

<sup>7</sup> Particle swarm optimization

<sup>8</sup> Artificial Bee colony

در الگوریتم ترکیبی GD+FRLS بررسی نمودند و به-محدوده‌های جدیدی از پارامترهای قابل تنظیم در الگوریتم‌ها رسیدند.

در این پژوهش، آموزش مقدم و تالی IT2ANFIS به ترتیب با استفاده از الگوریتم‌های GD و KF انجام شده‌است، و از تابع لیاپانوف ارائه‌شده در [۳۶] برای تحلیل پایداری آموزش سیستم بهره‌گرفته‌شده‌است. این تابع لیاپانوف برای اولین بار برای تحلیل پایداری آموزش با الگوریتم‌های مذکور مورد استفاده قرار گرفته‌است و با استفاده از این تحلیل، محدوده‌های مجاز برای پارامترهای قابل تنظیم بهینه‌ساز بدست آمدند. این محدوده‌ها در هنگام آموزش سیستم IT2ANFIS به‌گونه‌ای به‌الگوریتم اعمال شده‌است، که پایداری سیستم را تضمین کند و منجر به عملکرد مناسب در سیستم گردد.

## ۲- مروری بر سیستم‌های فازی نوع ۲ (T2FS)

در مجموعه‌های فازی نوع ۱ درجه عضویت یک عدد ثابت است، اما مقادیر عضویت در T2FS، مجموعه‌ای فازی در محدوده [0, 1] است. توابع عضویت در T2FS در برگیرنده اثر عدم قطعیت‌هایی<sup>۳</sup> (FOU) است، که تأثیر بسزایی در مواجهه با عدم قطعیت‌ها دارد. به‌همین دلیل سیستم‌های T2FS، در مقایسه با T1FS از درجه اهمیت بیشتری برخوردار است. سیستم T2FS به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{x \in X} \int_{u \in [0,1]} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u), \quad (1)$$

$$\forall x \in X, \forall u \in [0,1]$$

که در آن  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  بیانگر تابع عضویت در T2FS است، می‌توان گفت که  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ . توابع عضویت در T2FS به‌صورت یک تابع دو متغیره رفتار می‌کنند که  $x$  و  $u$  به ترتیب متغیر اولیه و ثانویه آن هستند. هنگامی که درجه عضویت متغیر ثانویه در T2FS برابر با ۱ باشد، سیستم فازی نوع ۲ تبدیل به سیستم استنتاجی فازی نوع ۲ بازه‌ای (IT2FIS) می‌شود. از این رو معادله (۱) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد [۳۷]:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in [0,1]} 1 / (x, u) \quad (2)$$

به‌تولید محدوده‌های محاسباتی مشخصی برای پارامترهای قابل تنظیم در بهینه‌ساز نشد. لو و تسای [۳۳]، به ترتیب از الگوریتم‌های GD و FRLS برای آموزش پارامترهای مقدم و تالی بهره بردند. تحلیل پایداری ارائه شده توسط آن‌ها فقط محدود به نرخ‌های آموزش در قسمت مقدم بود ولی قسمت تالی مورد توجه قرار نگرفت. علیاری شوره‌دلی و همکاران [۳۴]، تحلیل پایداری جامعی را در آموزش ANFIS، بر مبنای الگوریتم‌های ترکیبی ارائه نمودند. آن‌ها در ابتدا تحلیل پایداری لیاپانوف را برای حالتی مورد بررسی قرار دادند که در آن، آموزش سیستم ANFIS، هم در قسمت مقدم و هم در تالی توسط الگوریتم GD انجام پذیرفت. در این حالت به منظور پایدارسازی آموزش، محدوده‌های مجاز نرخ‌های آموزش با بهره‌گیری از نظریه پایداری لیاپانوف بدست آمدند. سپس آن‌ها از یک الگوریتم ترکیبی برای آموزش این سیستم استفاده نمودند که قسمت مقدم آن توسط GD و قسمت تالی آن توسط FRLS تحت آموزش قرار گرفت که اختصاراً به‌صورت (GD+RLS) بیان می‌شود. سپس، آن‌ها پایداری الگوریتم PSO را نیز مورد بررسی قرار دادند. لین و همکاران [۳۵]، پارامترهای تالی یک سیستم استنتاجی فازی-عصبی نوع ۲ بازه‌ای<sup>۱</sup> IT2ANFIS خود تکاملی را با استفاده از فیلتر کالمن متغیرگسترده<sup>۲</sup> (VEKF) و پارامترهای مقدم آن را با بهره‌مندی از GD بهینه‌سازی نمودند. تولید قواعد فازی با استفاده از خوشه‌بندی آنلاین انجام شد. آنها مدعی شدند که ریشه مربعات خطا در این الگوریتم ترکیبی، کمتر و همگرایی در آن سریعتر است. تحلیل پایداری ارائه شده توسط آن‌ها مشابه با مرجع [۳۰] بوده‌است. در اکثر مقالاتی که تاکنون مسائل پایداری سیستم‌های فازی-عصبی را مورد بررسی قرار داده‌اند، تابع لیاپانوف مورد استفاده برای تحلیل پایداری، تابعی از مربع خطای بین خروجی سیستم فازی-عصبی و خروجی سیستم واقعی بوده است. هرچند توابع دیگری نیز در برخی از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفته‌است. ذبیحی شش‌پلی و همکاران [۳۶]، یک تابع لیاپانوف جدید ارائه نمودند که تابعی از مربع تفاضل خطای بین خروجی IT2ANFIS و خروجی سیستم واقعی بوده‌است. آن‌ها پایداری آموزش را در الگوریتم آموزشی GD و سپس

<sup>3</sup> Footprint of uncertainty

<sup>1</sup> Interval type 2 adaptive Neuro-Fuzzy inference system

<sup>2</sup> Variable expansive Kalman filter

با اعمال ورودی  $i$ ام متناظر با قانون  $k$ ام، خروجی بخش فازی ساز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_{k,i}^1(x_i, [\sigma_{k,i}, m_{k,i}]) = e^{-0.5 \left( \frac{x_i - m_{k,i}}{\sigma_{k,i}} \right)^2} \quad (4)$$

$$\mu_{k,i}^2(x_i, [\sigma_{k,i}, m_{k,i}]) = e^{-0.5 \left( \frac{x_i - m_{k,i}}{\sigma_{k,i}} \right)^2} \quad (5)$$

پارامترهای  $m_{k,i}^1$  و  $m_{k,i}^2$  بیانگر مقادیر میانگین (مراکز) توابع عضویت هستند. بالانویس‌های "۱" و "۲" به ترتیب نمایانگر مقادیر بالایی و پایینی آن‌ها هستند و  $\sigma_{k,i}$  انحراف معیار این تابع عضویت است. درجه عضویت بالایی و پایینی به ترتیب و با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\bar{\mu}_{k,i}(x_i) = \begin{cases} \mu_{k,i}^1(x_i, [\sigma_{k,i}, m_{k,i}]), & x_i < m_{k,i}^1 \\ 1, & m_{k,i}^1 \leq x_i \leq m_{k,i}^2 \\ \mu_{k,i}^2(x_i, [\sigma_{k,i}, m_{k,i}]), & x_i > m_{k,i}^2 \end{cases} \quad (6)$$

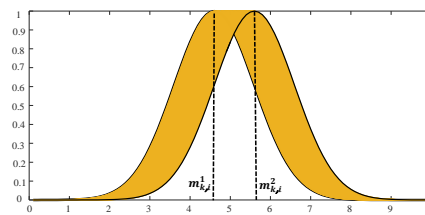
$$\underline{\mu}_{k,i}(x_i) = \begin{cases} \mu_{k,i}^2(x_i, [\sigma_{k,i}, m_{k,i}]), & x_i \leq \frac{m_{k,i}^1 + m_{k,i}^2}{2} \\ \mu_{k,i}^1(x_i, [\sigma_{k,i}, m_{k,i}]), & x_i \geq \frac{m_{k,i}^1 + m_{k,i}^2}{2} \end{cases} \quad (7)$$

همچنین، شدت آتش قاعده‌های بالایی و پایینی به صورت حاصلضرب درجه عضویت‌های مربوطه و با رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردند [۳۷]:

$$\underline{f}^k = \prod_{i=1}^n \underline{\mu}_{k,i}, \quad \bar{f}^k = \prod_{i=1}^n \bar{\mu}_{k,i} \quad (8)$$

یکی از پرچالش‌ترین مسائل در T2FS، محاسبه خروجی این سیستم است. همچنین، برای محاسبه خروجی این سیستم نیاز به یک مرحله اضافه‌تری به نام کاهش نوع است که قبل از غیر فازی‌سازی انجام می‌پذیرد. استراتژی‌های مبتنی بر تکرار برای کاهش نوع از قبیل روش کارنیک و مندل [۳۹ و ۴۰]، زمان‌بر و پیچیده هستند و دارای یک حل بسته در سیستم نیستند، که موجب می‌شود تا تحلیل پایداری تبدیل به یک مسئله پرچالش و تا حد زیادی نا-ممکن شود. این پژوهش از مکانیزم ارائه‌شده در مرجع [۳۷]، بهره می‌گیرد که بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{Y} = Y_{TSK} = \frac{\sum_{k=1}^M \bar{f}^k \tilde{y}_k}{\sum_{k=1}^M \bar{f}^k \tilde{y}_k + \sum_{k=1}^M \underline{f}^k \tilde{y}_k} + \frac{\sum_{k=1}^M \underline{f}^k \tilde{y}_k}{\sum_{k=1}^M \bar{f}^k \tilde{y}_k + \sum_{k=1}^M \underline{f}^k \tilde{y}_k} \quad (9)$$



شکل ۱- یک نوع خاص از تابع عضویت نوع ۲ بازه‌ای با توزیع گوسی

شکل (۱) نوع خاصی از یک تابع عضویت نوع ۲ بازه‌ای را با توزیع گوسی نشان می‌دهد.

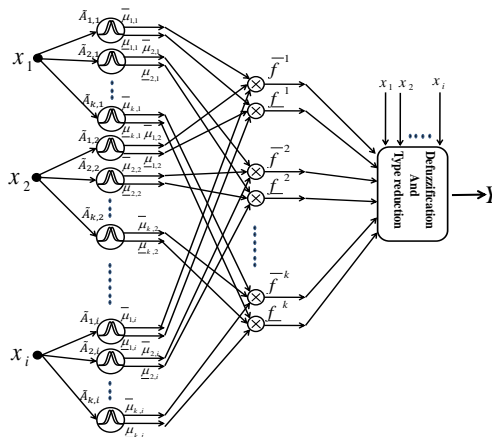
به‌منظور اجتناب از پیچیدگی‌های T2FS و ساده‌سازی محاسبات در این پژوهش، از یک مدل T2FS جایگزین با ساختار تالی TSK تحت عنوان A2-C0 استفاده شده است [۳۷]. قسمت تالی این مدل به صورت مجموعه‌های فازی نوع ۲ بازه‌ای با توزیع گوسی است. این مجموعه‌های فازی دارای میانگین نامعین و انحراف معیار ثابت هستند. قانون  $k$ ام سیستم فازی مورد نظر به‌صورت زیر است [۳۸]:

$$R^k: \text{if } x_1 \text{ is } \tilde{A}_{k,1} \text{ and } x_2 \text{ is } \tilde{A}_{k,2} \text{ and } \dots x_i \text{ is } \tilde{A}_{k,i} \text{ then } \tilde{y}_k = r_k + p_k x_1 + q_k x_2 + \dots + z_k x_i \quad (3)$$

زیر نویس‌های  $i$  و  $k$  بیانگر متغیر ورودی  $i$ ام و قانون  $k$ ام در تابع عضویت است.  $r_k$  تا  $z_k$  اعدادی ثابت هستند و  $\tilde{y}_k$  نشانگر خروجی قانون  $k$ ام است.

### ۳- پیکربندی IT2ANFIS

مشابه با ANFIS، ترکیب قوانین زبانی IT2FIS و شبکه عصبی، سیستم IT2ANFIS را ایجاد خواهد کرد. این پیکربندی در شکل (۲) نشان داده شده‌است.



شکل ۲- پیکربندی IT2ANFIS

$$\Phi = [m_{1,1}^1 \sigma_{1,1}^2 m_{1,1}^2 \dots m_{k,i}^1 \sigma_{k,i}^2 m_{k,i}^2]^T \quad (17)$$

$$\Gamma = [r_1 p_{1\dots s_1} r_2 p_{2\dots s_2} \dots r_k p_{k\dots s_k}]^T$$

اگر رابطه زیر نشان‌دهنده تابع هدف باشد،

$$E = \frac{e^2(k)}{2} \quad (18)$$

آن‌گاه قانون بروز رسانی الگوریتم GD با رابطه زیر نشان داده می‌شود.

$$\Delta\Phi(k) = \eta_{\Phi} e(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right) \quad (19)$$

مطابق با رابطه (۱۹)، قسمت اول معادله (۱۶) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Delta e_1(k) = M_1(k) = \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T \Delta\Phi(k) = \quad (20)$$

$$\eta_{\Phi} e(k) \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right) = -\eta_{\Phi} e(k) \|D_{\Phi}(k)\|_2^2$$

که  $\| \cdot \|_2$  در معادله (۲۰)، نمایانگر نرم دوم و  $D_{\Phi}(k)$  بیانگر مشتق اول خروجی IT2ANFIS نسبت به پارامترهای مقدم است. حال با اعمال بسط اول سری تیلور بر روی پارامترهای مقدم داریم:

$$\Delta M_1(k) = \left( \frac{\partial M_1(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T \Delta\Phi(k) = \quad (21)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \Phi(k)} \left( \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T \Delta\Phi(k) \right) \right)^T \Delta\Phi(k)$$

با بسط رابطه (۲۱) می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\Delta M_1(k) = \left[ \left( \frac{\partial^2 e(k)}{\partial \Phi^2(k)} \right)^T \Delta\Phi(k) + \frac{\partial}{\partial \Phi(k)} \left( (\Delta\Phi(k))^T \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Phi(k)} \right) \right)^T \Delta\Phi(k) \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^2 e(k)}{\partial \Phi^2(k)} \right)^T \eta_{\Phi} e(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi(k)} \left( \left( \eta_{\Phi} e(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right) \right)^T \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Phi(k)} \right) \right)^T \right. \\ \left. \times \eta_{\Phi} e(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right) - \eta_{\Phi}^2 e^2(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T H_{\Phi} \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} + \right. \\ \left. + \eta_{\Phi}^2 e(k) \|D_{\Phi}(k)\|_2^2 \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right) - \right. \\ \left. - \eta_{\Phi}^2 e^2(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T H_{\Phi} \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} = -2\eta_{\Phi}^2 e^2(k) \left( \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T H_{\Phi} \frac{\partial \hat{Y}(k)}{\partial \Phi(k)} + \right. \\ \left. + \eta_{\Phi}^2 e(k) \|D_{\Phi}(k)\|_2^4 = -2\eta_{\Phi}^2 e^2(k) D_{\Phi}^T H_{\Phi} D_{\Phi} + \eta_{\Phi}^2 e(k) \|D_{\Phi}(k)\|_2^4 \right) \quad (22)$$

که در آن  $H_{\Phi}$  ماتریس هس<sup>۱</sup> است و شامل مشتق‌های دوم خروجی IT2ANFIS نسبت به پارامترهای مقدم است. در این پژوهش، بهینه‌سازی قسمت تالی IT2ANFIS با الگوریتم KF انجام می‌گیرد.

#### ۴- تحلیل پایداری در آموزش سیستم IT2ANFIS با الگوریتم ترکیبی GD+KF

در این پژوهش به منظور انجام تحلیل پایداری در آموزش سیستم IT2ANFIS، از تحلیل پایداری لیاپانوف استفاده شده‌است. تابع لیاپانوف پیشنهادی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(k) = \frac{1}{2} (\Delta e(k))^2 > 0 \quad (10)$$

که  $e(k)$  در معادله (۱۰) بیان‌گر خطای بین خروجی مورد نظر (واقعی) و خروجی سیستم IT2ANFIS می‌باشد،

$$e(k) = Y_d(k) - \hat{Y}(k) \quad (11)$$

و اختلاف بین خطای زمان بعد و زمان فعلی یعنی  $\Delta e(k)$  را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$e(k+1) = \Delta e(k) + e(k) \quad (12)$$

در نتیجه، تفاضل تابع لیاپانوف به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = \frac{1}{2} [(\Delta e(k+1))^2 - (\Delta e(k))^2] \\ = \frac{1}{2} [\Delta e(k+1) + \Delta e(k)] [\Delta e(k+1) - \Delta e(k)] \\ = \frac{1}{2} [\Delta e(k+1) + \Delta e(k) + \Delta e(k) - \Delta e(k)] [\Delta e(k+1) - \Delta e(k)] \\ = \frac{1}{2} [\Delta M(k) + 2\Delta e(k)] \Delta M(k) \quad (13)$$

که در آن،

$$\Delta e(k) = \Delta e_1(k) + \Delta e_2(k) = M_1(k) + M_2(k) \quad (14)$$

و

$$\Delta e(k+1) = \Delta M(k) + \Delta e(k) = \Delta M_1(k) + \Delta M_2(k) + \Delta e(k) \quad (15)$$

اعداد زیر نویس  $M_1$  و  $M_2$  به ترتیب مربوط به پارامترهای مقدم و تالی هستند. با اعمال بسط مرتبه اول سری تیلور متغیر  $e(k)$  بر روی پارامترهای مقدم و تالی،  $\Delta e(k)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta e(k) = \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Phi(k)} \right)^T \Delta\Phi(k) + \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Gamma(k)} \right)^T \Delta\Gamma(k) \\ M_1(k) + M_2(k) \quad (16)$$

$\Phi(k)$  و  $\Gamma(k)$  به ترتیب ماتریس‌های مربوط پارامترهای مقدم و تالی هستند که،

<sup>۱</sup> Hessian matrix

$$\begin{aligned} \Delta M_2(k) &= \left( \frac{\partial M_2(k)}{\partial \Gamma(k)} \right)^T \Delta \Gamma(k) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \Gamma(k)} \left( \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Gamma(k)} \right)^T \Delta \Gamma(k) \right) \right)^T \Delta \Gamma(k) = \\ & \left( \frac{\partial}{\partial \Gamma(k)} \left( - (G(x(k+1)))^T L(k+1) e_p(k) \right) \right)^T L(k+1) e_p(k) = \\ & - (G(x(k+1)))^T L(k+1) \left( \frac{\partial}{\partial \Gamma(k)} (e_p(k)) \right)^T L(k+1) e_p(k) = \\ & - (G(x(k+1)))^T L(k+1) (-G(x(k+1)))^T L(k+1) e_p(k) = \\ & = \left( (G(x(k+1)))^T L(k+1) \right)^2 e_p(k) \end{aligned} \tag{28}$$

با جایگزینی نتیجه حاصل از معادله (۲۸) در معادله (۲۷)،  $\Delta M(k)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta M(k) &= \left( -2\eta_\Phi^2 e^2(k) D_\Phi^T H_\Phi D_\Phi + \eta_\Phi^2 e(k) (\|D_\Phi(k)\|_2)^4 \right) + \\ & + \left( (-G(x(k+1)))^T L(k+1) \right)^2 e_p(k) \end{aligned} \tag{29}$$

با توجه به معادله‌های (۲۶) و (۲۹)، تغییرات تابع لیاپانوف  $\Delta V(k)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \frac{1}{2} [\Delta M(k) + 2\Delta e(k)] \Delta M(k) \\ &= \frac{1}{2} [-2\eta_\Phi^2 e^2(k) D_\Phi^T H_\Phi D_\Phi + \eta_\Phi^2 e(k) (\|D_\Phi(k)\|_2)^4] \\ & + \left( (G(x(k+1)))^T L(k+1) \right)^2 e_p(k) - \\ & - 2\eta_\Phi e(k) (\|D_\Phi(k)\|_2)^2 - 2(G(x(k+1)))^T L(k+1) e_p(k) \times \\ & \times [-2\eta_\Phi^2 e^2(k) D_\Phi^T H_\Phi D_\Phi + \eta_\Phi^2 e(k) (\|D_\Phi(k)\|_2)^4] + \\ & \left( (G(x(k+1)))^T L(k+1) \right)^2 e_p(k) \end{aligned} \tag{30}$$

اگر  $\gamma$  و  $\xi$  را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} \gamma &= \left( -2e(k) D_\Phi^T H_\Phi D_\Phi + (\|D_\Phi(k)\|_2)^4 \right) \\ \xi &= G(x(k+1))^T L(k+1) \end{aligned} \tag{31}$$

معادله (۳۰) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \\ & \frac{1}{2} e^2(k) \left[ \eta_\Phi^2 \gamma + \xi^2 \frac{e_p(k)}{e(k)} - 2\eta_\Phi (\|D_\Phi(k)\|_2)^2 - 2\xi \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] \times \\ & \times \left[ \eta_\Phi^2 \gamma + \xi^2 \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] \end{aligned} \tag{32}$$

بر طبق نظریه لیاپانوف، برای تضمین پایداری فرآیند شناسایی، معادله (۳۲) می‌بایست منفی معین گردد. در این قسمت بایستی محدوده‌هایی از  $\eta_\Phi$  و  $\xi$  (متغیرهای قابل

می‌توان تابع تبدیل IT2ANFIS را با  $\hat{Y} = f(x, \Gamma)$  نشان داد که در آن  $\hat{Y}$  نشان دهنده خروجی سیستم است.  $\Gamma$  و  $x$  به ترتیب ورودی و پارامترهای تالی هستند. اگر تولید داده با مدل ریاضی زیر انجام شود:

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) &= \Gamma(k) + \omega(k+1) \\ \hat{Y}(k+1) &= G(x(k))^T \Gamma(k) + \nu(k+1) \end{aligned} \tag{23}$$

آن‌گاه قوانین به‌روزرسانی پارامترهای تالی با استفاده از الگوریتم KF بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} L(k+1) &= \frac{P(k)G(x(k+1))}{G^T(x(k+1))P(k)G(x(k+1))+R(k+1)} \\ P(k+1) &= P(k) - L(k+1)(G^T(x(k+1))P(k) + \\ & + Q(k+1)) \\ \hat{\Gamma}(k+1) &= \hat{\Gamma}(k) + L(k+1)e_p \end{aligned} \tag{24}$$

که  $R(k)$  و  $Q(k)$  به ترتیب ماتریس‌های کوواریانس<sup>۱</sup> نویزهای  $\nu(k)$  و  $\omega(k)$  هستند که به صورت مصنوعی اضافه می‌گردند. در رابطه (۲۴)  $e_p(k)$  خطای پیش‌بینی،  $P(k)$  ماتریس کوواریانس متغیرهای حالت و  $L(k+1)$  بهره کالمن<sup>۲</sup> است. قسمت دوم معادله (۱۶) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Delta e_2(k) &= M_2(k) = \left( \frac{\partial e(k)}{\partial \Gamma(k)} \right)^T \Delta \Gamma(k) = \\ & = -G^T(x(k+1))^T L(k+1) e_p \end{aligned} \tag{25}$$

در نتیجه، معادله (۱۶) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \Delta e(k) &= -\eta_\Phi e(k) (\|D_\Phi(k)\|_2)^2 - \\ & - G^T(x(k+1))^T L(k+1) e_p \end{aligned} \tag{26}$$

متغیر  $\Delta M(k)$  در معادله (۱۵) برای حالتی که پارامترهای قسمت تالی با KF آموزش داده شوند، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta M(k) &= -2\eta_\Phi^2 e^2(k) D_\Phi^T H_\Phi D_\Phi + \\ & + \eta_\Phi^2 e(k) (\|D_\Phi(k)\|_2)^4 + \left( \frac{\partial M_2(k)}{\partial \Gamma(k)} \right)^T \Delta \Gamma(k) \end{aligned} \tag{27}$$

متغیر  $\Delta M_1(k)$  در معادله (۲۲) نشان داده‌شد. با اعمال یک روند مشابه که برای متغیر  $M_2(k)$  استفاده گردید، قسمت سوم معادله (۲۷) یعنی  $\Delta M_2(k)$  به صورت زیر خواهد بود:

<sup>2</sup> Kalman gain

<sup>1</sup> Covariance matrix

و محدوده‌های زیر را می‌توان برای  $\eta_\Phi$  و  $\xi$  به‌دست آورد:

$$\begin{cases} 0 < \eta_\Phi < \frac{2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2}{\gamma} \\ 0 < \xi < 2 \end{cases} \quad (37)$$

پس با انتخاب محدوده‌های  $\eta_\Phi$  و  $\xi$  بدست آمده از رابطه (۳۷)، می‌توان موجب منفی معین شدن رابطه (۳۴) و در نهایت (۳۲) شد.

حالت ۲. اگر  $\frac{e_p(k)}{e(k)} < 0$  و  $\gamma < 0$ ، آنگاه برای منفی معین شدن رابطه (۳۲)، شرایط زیر می‌بایست برقرار گردد:

$$\begin{cases} \left[ \eta_\Phi^2 \gamma + \xi^2 \frac{e_p(k)}{e(k)} - 2\eta_\Phi (\|D_\Phi(k)\|_2)^2 - 2\xi \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] > 0 \\ \left[ \eta_\Phi^2 \gamma + \xi^2 \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] < 0 \end{cases} \quad (38)$$

منفی شدن قسمت پایینی معادله (۳۸) بدیهی است و با توجه به آن، برای مثبت معین شدن قسمت بالایی رابطه (۳۸)، ناتساوی زیر می‌بایست برقرار گردد:

$$\eta_\Phi \left[ \eta_\Phi \gamma - 2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2 \right] + \xi(\xi - 2) \frac{e_p(k)}{e(k)} > 0 \quad (39)$$

یکی از حالت‌ها برای برآورده شدن ناتساوی (۳۹)، رابطه زیر است:

$$\begin{cases} \eta_\Phi \left[ \eta_\Phi \gamma - 2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2 \right] > 0 \\ \left[ \xi(\xi - 2) \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] > 0 \end{cases} \quad (40)$$

با توجه به قسمت پایینی معادله (۴۰)، از آنجایی که  $\frac{e_p(k)}{e(k)} < 0$  عبارت  $\xi(\xi - 2)$  می‌بایست منفی باشد. برای منفی شدن عبارت  $\xi(\xi - 2)$ ، یا می‌بایست داشته باشیم  $\begin{cases} \xi > 0 \\ \xi - 2 < 0 \end{cases}$  و یا  $\begin{cases} \xi < 0 \\ \xi - 2 > 0 \end{cases}$ ، که فقط قسمت اول آن مورد پذیرش است. همچنین اگر قسمت بالایی معادله (۴۰) به صورت زیر نوشته شود:

$$\eta_\Phi^2 \gamma > 2\eta_\Phi (\|D_\Phi(k)\|_2)^2 \quad (41)$$

و با دانستن این که پارامتر  $\gamma$  منفی است، می‌توان نتیجه گرفت که  $\eta_\Phi < 0$ . از این رو با توجه به رابطه (۴۰) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\eta_\Phi \gamma - 2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2 < 0 \quad (42)$$

در نتیجه، از آنجایی پارامتر  $\gamma$  منفی است، می‌توان گفت که  $\eta_\Phi > \frac{2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2}{\gamma}$  از این رو، با توجه به معادله (۴۰)

تنظیم در آموزش الگوریتم‌ها) ارائه شود که بتواند معادله (۳۲) را منفی معین کند. پارامتر  $(\|D_\Phi(k)\|_2)^2$  همیشه مثبت است. همچنین، در محاسبه محدوده‌ها، چهار حالت زیر را می‌بایست مدنظر قرار داد:

$$\begin{aligned} 1- \quad & \gamma > 0 \text{ و } \frac{e_p(k)}{e(k)} > 0 \\ 2- \quad & \gamma < 0 \text{ و } \frac{e_p(k)}{e(k)} < 0 \\ 3- \quad & \gamma < 0 \text{ و } \frac{e_p(k)}{e(k)} > 0 \\ 4- \quad & \gamma > 0 \text{ و } \frac{e_p(k)}{e(k)} < 0 \end{aligned}$$

حالت ۱. اگر  $\gamma > 0$  و  $\frac{e_p(k)}{e(k)} > 0$ ، آنگاه برای منفی معین شدن رابطه (۳۲)، شرط زیر می‌بایست برقرار گردد:

$$\begin{cases} \left[ \eta_\Phi^2 \gamma + \xi^2 \frac{e_p(k)}{e(k)} - 2\eta_\Phi (\|D_\Phi(k)\|_2)^2 - 2\xi \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] < 0 \\ \left[ \eta_\Phi^2 \gamma + \xi^2 \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] > 0 \end{cases} \quad (33)$$

مثبت بودن قسمت دوم معادله (۳۳) بدیهی است. با استفاده از قسمت اول معادله (۳۳)، داریم:

$$\eta_\Phi \left[ \eta_\Phi \gamma - 2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2 \right] + \xi(\xi - 2) \frac{e_p(k)}{e(k)} < 0 \quad (34)$$

هرچند حالت‌های متعددی برای برآورده شدن رابطه (۳۴) وجود دارد، ولی یکی از حالت‌ها برای منفی معین شدن رابطه (۳۴)، این است که عبارات با پارامترهای مشترک و ضرایب آن‌ها در این رابطه (عبارات اول و دوم در رابطه (۳۴))، به‌طور مجزا منفی معین گردند. به‌شرطی که محدوده‌های  $\eta_\Phi$  و  $\xi$  بدست آمده از آن، موجب منفی معین شدن رابطه (۳۲) شود. از این رو یکی از حالات، ناتساوی زیر است:

$$\begin{cases} \eta_\Phi \left[ \eta_\Phi \gamma - 2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2 \right] < 0 \\ \left[ \xi(\xi - 2) \frac{e_p(k)}{e(k)} \right] < 0 \end{cases} \quad (35)$$

در نظریه پایداری لیاپانوف، بایستی بتوان محدوده‌ای را تعریف کرد که با توجه به آن محدوده، تغییرات تابع لیاپانوف منفی معین گردد. در قسمت بالایی رابطه (۳۵)، مقادیر  $\eta_\Phi$  و  $\xi$  نمی‌توانند کوچکتر از صفر گردند. با توجه به قسمت بالایی معادله (۳۵) و این که  $\frac{e_p(k)}{e(k)} > 0$ ، می‌توان گفت که  $\xi(\xi - 2) < 0$ . از آنجایی که  $\xi$  نمی‌تواند منفی گردد، شرایط زیر را داریم:

$$\begin{cases} \eta_\Phi > 0 & \& \quad \eta_\Phi \gamma - 2(\|D_\Phi(k)\|_2)^2 < 0 \\ \xi > 0 & \& \quad (\xi - 2) < 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \eta_{\Phi} < \frac{2(\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2}{\gamma} \\ \xi > 2 \end{array} \right. \quad (49)$$

به‌درنظر گرفتن اینکه رابطه (۴۵) برقرار گردد. با توجه به مخرج معادلات (۳۷) تا (۴۹) که برای محاسبه نرخ آموزش  $\eta_{\Phi}$  مورد استفاده قرار گرفته‌اند، می‌توان دریافت که ماتریس هس  $H_{\Phi}$  می‌تواند انعطاف‌پذیری زیادی را در محاسبه محدوده‌های پایدارساز نرخ آموزش ایجاد کند. از این‌رو نرخ آموزش می‌تواند محدوده‌های وسیع‌تری را نسبت به پژوهش‌های مرتبط با این حوزه به خود بگیرد. متغیر  $\xi$ ، در آموزش پارامترهای مقدم با KF، تابعی از بهره کالمن  $L(k)$  و در نتیجه ماتریس کوواریانس  $P(k)$  است. از این‌رو، قرار گرفتن این متغیر در محدوده‌های مورد نظر به معنی کنترل ماتریس کوواریانس است.

#### ۵- نتایج شبیه‌سازی

محدوده‌های تطبیقی حاصل از تحلیل پایداری لیاپانوف پیشنهادی در این پژوهش، در شناسایی و پیش‌بینی مقادیر آتی سری زمانی آشوب (مکی گلاس) و یک سیستم غیر خطی استاتیکی با داده‌های تصادفی به‌عنوان محک‌های مورد بررسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از این پژوهش بعد از اعمال به‌سری آشوب زمانی مکی گلاس با نتایج حاصل از روش‌های ارائه‌شده در [۱۸] (با الگوریتم EKF)، [۴۱] (با الگوریتم LM) و [۳۶] (با الگوریتم GD+FRLS)، مقایسه شده‌اند. سپس نتایج حاصل از این پژوهش به‌سیستم غیرخطی استاتیکی اعمال شده و با نتایج حاصل از [۳۶] مقایسه گردید. هر چند هدف اصلی این پژوهش بررسی و به‌دست آوردن محدوده‌های پایدارساز در الگوریتم مورد بحث با ارائه یک تابع لیاپانوف جدید است، اما بررسی عملکرد الگوریتم با استفاده از روش پیشنهادی به‌عنوان هدف ثانویه انجام پذیرفته‌است. از این‌رو، به منظور مقایسه منصفانه این روش با روش‌های دیگر، چه در آموزش داده و چه در بررسی داده<sup>۱</sup>، برنامه برای هر وضعیت، ۱۰ بار به‌طور مجزا اجرا شده‌است. میانگین و انحراف معیار ریشه دوم میانگین خطای آن‌ها (RMSE) در جدول‌های ۱ و ۲، ارائه‌شده است. نرم‌افزار Matlab R2015b به‌عنوان نرم‌افزار شبیه‌ساز مورد استفاده قرار گرفته‌است. سخت‌افزار

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 > \eta_{\Phi} > \frac{2(\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2}{\gamma} \\ 0 < \xi < 2 \end{array} \right. \quad (43)$$

پس با انتخاب محدوده‌های  $\eta_{\Phi}$  و  $\xi$  بدست آمده از رابطه (۴۳)، می‌توان موجب مثبت معین شدن رابطه (۳۹) و در نهایت منفی معین شدن (۳۲) شد.

حالت ۳. اگر  $\frac{e_p(k)}{e(k)} > 0$  و  $\gamma < 0$ ، آنگاه هم شرط (۳۳) و هم شرط (۳۸) می‌بایست بررسی گردد. در این قسمت، اگر با شرط (۳۳) مسأله بررسی شود، هر دو قسمت این شرط می‌بایست در تحلیل مورد توجه قرار گیرند. با توجه به قسمت بالایی معادله (۳۳)، و مشابه با تحلیل‌هایی که در دو حالت قبل ارائه شد، محدوده‌های به‌دست آمده به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{\Phi} < 0 \text{ \& } \eta_{\Phi} < \frac{2(\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2}{\gamma} \\ 0 < \xi < 2 \end{array} \right. \quad (44)$$

فقط باید توجه داشت که این رابطه برای حالت ۳ زمانی برقرار است که قسمت پایینی رابطه (۳۳) نیز برقرار باشد. از این‌رو با مقایسه قسمت‌های بالایی و پایینی معادله (۳۳)، زمانی محدوده‌های به‌دست آمده صحیح هستند که

$$\eta_{\Phi} (\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2 + \xi \frac{e_p(k)}{e(k)} > 0 \quad (45)$$

اگر با شرط (۳۸) مسأله بررسی گردد، محدوده‌های به‌دست آمده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 > \eta_{\Phi} > \frac{2(\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2}{\gamma} \\ \xi > 2 \end{array} \right. \quad (46)$$

به‌شرطی که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\eta_{\Phi} (\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2 + \xi \frac{e_p(k)}{e(k)} < 0 \quad (47)$$

حالت ۴. اگر  $\frac{e_p(k)}{e(k)} < 0$  و  $\gamma > 0$ ، آنگاه مشابه با تحلیلی که برای حالت‌های ۱، ۲، و ۳ ارائه‌گردید، محدوده‌های زیر را خواهیم داشت:

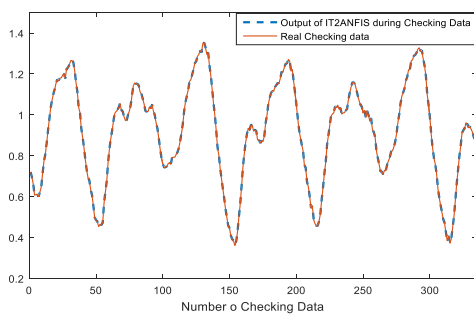
$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{\Phi} > \frac{2(\|D_{\Phi}(k)\|_2)^2}{\gamma} \\ 0 < \xi < 2 \end{array} \right. \quad (48)$$

به‌شرطی که رابطه (۴۷) برقرار گردد. یا این‌که:

<sup>۱</sup> Checking data

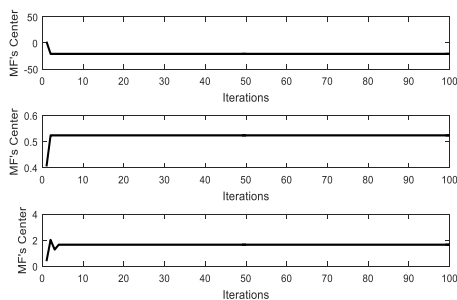


همگرایی نشان‌دهنده پایدار ماندن آموزش بر اساس روش پیشنهادی است. شکل (۸) وضعیتی ناپایدار را نشان می‌دهد که در آن پارامترهای قابل تنظیم در الگوریتم ترکیبی در خارج از محدوده تعیین شده در روش پیشنهادی قرار گرفته‌اند. شکل (۹) تغییرات تطبیقی نرخ آموزش را به ازای همه تکرارها و داده‌های آموزشی نشان می‌دهد. مقادیر بزرگ نرخ آموزش در برخی از لحظه‌ها به دلیل کوچک شدن شیب خطا در آن لحظه‌ها است. کوچک شدن شیب خطا اگر با نرخ آموزش کوچک همگام شود، ممکن است منجر به افتادن الگوریتم در تله کمینه محلی و نیز کند شدن آموزش گردد.



شکل ۴- داده‌های واقعی و داده‌های پیش‌بینی شده در مسئله ۱ توسط مدل IT2ANFIS

از این روش پیشنهادی در این پژوهش، نرخ آموزش را بزرگ انتخاب می‌کند تا قابلیت فرار از کمینه محلی را افزایش دهد و نیز زمان شبیه‌سازی را در حداقل‌ترین حالت نگه دارد. همچنین شکل (۱۰) تغییرات تطبیقی  $\xi$  را به ازای همه تکرارها و داده‌های آموزشی نشان می‌دهد. این متغیر تابعی از بهره کالمن  $L(k)$  و بالتبع تابعی از ماتریس کوواریانس  $P(k)$  در الگوریتم KF است. این شکل نشان می‌دهد که این پارامترها در محدوده تعیین شده در روش پیشنهادی قرار گرفته‌اند.



شکل ۵- همگرایی برخی از مراکز توابع عضویت مقدم در مسئله ۱

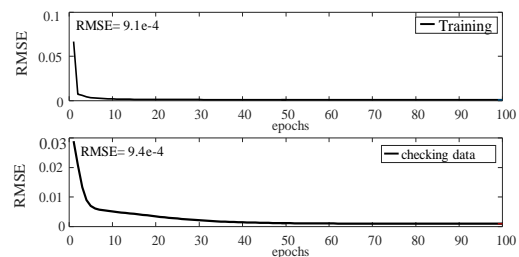
مورد استفاده، یک رایانه با پردازنده مرکزی ۲/۴ گیگاهرتز و حافظه رم ۴ گیگابایتی است.

### ۱-۵- مسئله ۱

**سری آشوب مکی گلاس**<sup>۱</sup> این سری یکی از محک‌های مورد بررسی بسیار درخشان است که در بسیاری از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفته است. بر مبنای داده‌های حاصل از این سری زمانی، مدل شناسایی شده بایستی خروجی در زمان  $x(t+1)$  را با استفاده از ورودی‌هایی در لحظه‌های  $x(t)$ ،  $x(t-1)$ ،  $x(t-2)$ ،  $x(t-3)$  پیش‌بینی کند. چهار تابع عضویت به ازای هر ورودی در نظر گرفته شده‌است. تعداد داده‌های آموزش و بررسی داده به ترتیب ۷۵۰ و ۳۳۵ می‌باشد. این سری با رابطه زیر بیان می‌شود [۴۲]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)} - 0.1x(t) \quad (50)$$

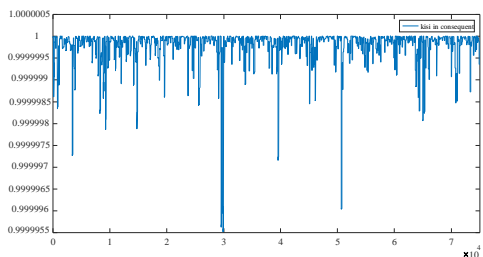
مقادیر عددی معادله (۴۰) در این پژوهش،  $x(0) = 1.2$  و  $\tau = 17$  هستند.



شکل ۳- RMSE آموزش و بررسی داده‌ها در شناسایی مسئله ۱ بر مبنای روش پیشنهادی (GD+KF)

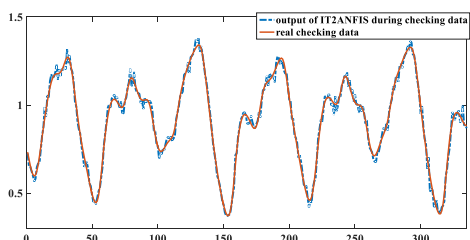
شکل (۳) نشان‌دهنده RMSE مربوط به روش پیشنهادی (GD+KF) هم در فاز آموزش و هم در فاز بررسی داده می‌باشد. در این شکل، پارامترهای قابل تنظیم الگوریتم‌ها (نرخ آموزش در مقدم و ضریبی از بهره کالمن در تالی که تابعی از ماتریس کوواریانس است) در محدوده تعیین‌شده قرار گرفتند. بنابراین همگرایی رخ داده است و پایداری حاصل شده‌است. شکل (۴) نشان‌دهنده خروجی مدل IT2ANFIS و خروجی واقعی در فاز بررسی داده (پیش‌بینی) است که برهم‌نهی بسیار مناسبی را نشان می‌دهد. شکل‌های (۵) تا (۷) به ترتیب نشان‌دهنده همگرایی برخی از مراکز توابع عضویت مقدم، انحراف معیار توابع عضویت مقدم، و ضرایب توابع عضویت تالی است. این

<sup>۱</sup> Mackey-Glass Chaotic time series



شکل ۱۰- تغییرات تطبیقی  $\xi$  در آموزش تالی مدل بر مبنای نظریه پیشنهادی در مسئله ۱

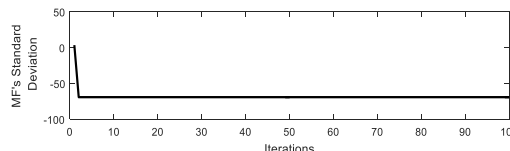
شکل (۱۱) خروجی پیش‌بینی شده حامل نویز توسط مدل IT2ANFIS (نمودار نقطه چین آبی) را به همراه خروجی واقعی غیر حامل نویز (نمودار قرمز رنگ) در حالت بررسی داده نشان می‌دهد.



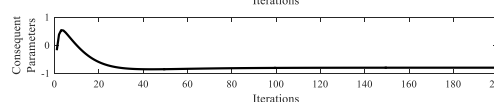
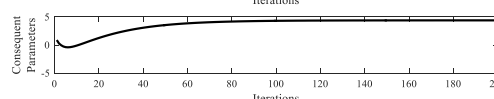
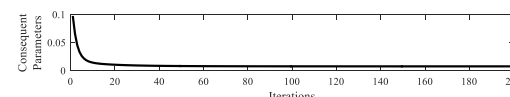
شکل ۱۱- خروجی حامل نویز پیش‌بینی شده با نسبت سیگنال به نویز ۱۰ دسی‌بل (نمودار نقطه چین آبی) به همراه خروجی واقعی غیر حامل نویز در حالت بررسی داده در مسئله ۱

جدول ۱ نتایج عملکرد روش پیشنهادی را همراه با مراجع [۱۸، ۳۶ و ۴۱] نشان می‌دهد. هنگامی که این روش با مراجع [۱۸، ۳۶ و ۴۱]، و بدون حضور نویز در داده‌ها مقایسه می‌شود، روش پیشنهادی در این پژوهش هم در فاز آموزش و هم در فاز بررسی داده‌ها (پیش‌بینی)، عملکرد بسیار بهتری را از خود نسبت به روش [۱۸] و [۴۱] نشان داده‌است (باید توجه شود که در الگوریتم‌های ترکیبی و منفرد که الگوریتم KF و انواع آن حضور دارند، کمی نویز اندازه‌گیری به صورت دستی وارد می‌شود که SNR آن‌ها بسیار بیشتر از ۱۰ دسی‌بل هست).

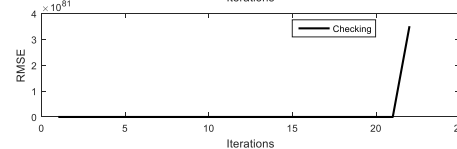
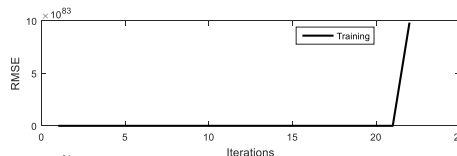
با اضافه نمودن نویز به داده‌ها نیز همچنان روش پیشنهادی عملکرد نسبتاً بهتری را از خود نشان می‌دهد و نسبت به- روش [۳۶] قابل رقابت است. البته به منظور بررسی دقیق‌تر، برای هر نظریه، ۱۰ بار شبیه‌سازی انجام می‌شود و میانگین RMSE فاز آموزش و فاز بررسی داده (پیش‌بینی) و انحراف معیار آنها در جدول آورده شده‌است و با مراجع مربوطه مقایسه گردیده‌است.



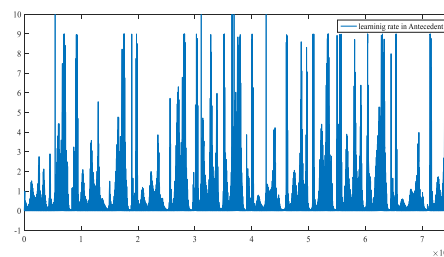
شکل ۶- همگرایی انحراف معیارهای توابع عضویت مقدم



شکل ۷- همگرایی ضرایب توابع عضویت تالی



شکل ۸- RMSE آموزش و بررسی داده‌ها در مسئله ۱ هنگامی که پارامترهای قابل تنظیم در خارج از محدوده‌های تعیین شده در روش پیشنهادی انتخاب شوند



شکل ۹- تغییرات تطبیقی نرخ آموزش بر مبنای نظریه پیشنهادی در مسئله ۱

برای بررسی عملکرد نظریه‌های پیشنهادی مطابق با مراجع، نویزی با قدرت ۱۰ دسی‌بل به داده‌ها اعمال می‌گردد، که با استفاده از رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{var}(Signal)}{\text{var}(Noise)} \right) \quad (51)$$

جدول ۱- مقایسه RMSEهای روش پیشنهادی در مسئله ۱ با الگوریتم‌های LM، EKF و GD+FRLS

مسئله ۱: سری آشوب مکی گلاس		ورودی‌ها: $x[t-3], x[t-2], x[t-1], x[t]$ خروجی: $x[t+1]$ تعداد داده‌های آموزش/بررسی داده ۳۳۵/۷۵۰		
		۱۰ دسی‌بل		
نسبت سیگنال به نویز (SNR)		بدون نویز	حالت ۱	
			حالت ۲	
LM [۴۱]	آموزش	میانگین	0.008	0.0914
	بررسی داده	میانگین	0.04	0.0913
	زمان شبیه‌سازی		70 sec	
EKF [۱۸]	آموزش	میانگین	----	0.0770
	بررسی داده	میانگین	----	0.0943
	زمان شبیه‌سازی		32.2 sec	
GD+FRLS [۳۶]	آموزش	میانگین	9.61e-4	0.0256
		بهترین	8.6e-4	0.0225
		انحراف معیار	6e-5	0.0027
	بررسی داده	میانگین	9.77e-4	0.0261
		بهترین	8.7e-4	0.023
		انحراف معیار	5.1e-5	0.0026
زمان شبیه‌سازی		21 sec		
روش پیشنهادی GD+KF	آموزش	میانگین	9.5e-4	10.2e-4
		بهترین	9.1e-4	9.6e-4
		انحراف معیار	2.35e-4	4.28e-5
	بررسی داده	میانگین	9.7e-4	11.3e-4
		بهترین	9.4e-4	10.8e-4
		انحراف معیار	5.53e-5	4.15e-5
زمان شبیه‌سازی		18 sec		

در هنگام بررسی عملکرد الگوریتم در هنگامی که نویز به داده‌ها اعمال گردید، دو مطلب مورد توجه بوده است. این که در حالت اول، RMSEهای فاز آموزش و فاز بررسی داده بر مبنای اختلاف داده خروجی مدل شناسایی شده با داده حامل نویز بدست آمده‌اند و حالت دوم بر مبنای اختلاف

داده خروجی مدل شناسایی شده با داده غیر حامل نویز بدست آمده‌اند و مراجعی که تحت مقایسه قرار گرفته‌اند، بر مبنای اختلاف داده خروجی مدل شناسایی شده با داده غیر حامل نویز بوده‌اند. در این وضعیت، مقایسه روش پیشنهادی در مسئله ۱ با آن مراجع نشان می‌دهد که عملکرد روش پیشنهادی در هنگام اعمال نویز به داده‌ها بهتر بوده‌است و در حالت بدون نویز با مرجع [۳۶] قابل رقابت است. از نظر زمان شناسایی، روش پیشنهادی از همه بهتر بوده است. هر چند قرار دادن محدوده‌های پایداری و بررسی شرایط آن‌ها برای انتخاب محدوده مجاز پارامترهای قابل تنظیم در الگوریتم‌ها نیز بار محاسباتی بیشتری را به مسئله شناسایی تحمیل می‌نماید. همچنین در روش [۴۱]، الگوریتم LM به دلیل بزرگ بودن اندازه ماتریس ژاکوبی، دارای زمان شبیه‌سازی بزرگی است.

## ۲-۵- مسئله ۲

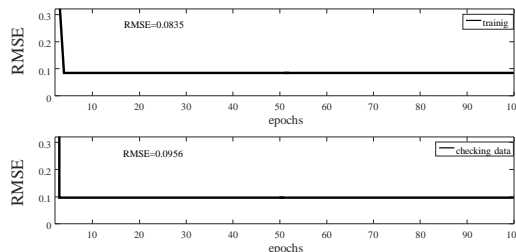
سیستم غیرخطی استاتیکی با داده‌های تصادفی. سیستم مورد بررسی در مسئله ۲، یک سیستم غیرخطی استاتیکی است که دارای ۳ ورودی و ۱ خروجی است. ورودی‌های این سیستم در مرحله آموزش، داده‌های تصادفی تولید شده در محدوده [۱، ۶] و در مرحله بررسی داده، داده‌های تصادفی تولید شده در محدوده [۵، ۵، ۱، ۵] هستند. خروجی این سیستم با رابطه زیر تولید می‌گردد:

$$u = 1 + x^{0.5} + y^{-1} + z^{-1.5} \quad (۵۲)$$

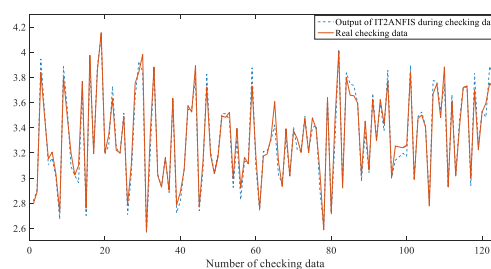
در مرحله آموزش از ۲۱۶ مجموعه داده و برای مرحله بررسی داده از ۱۲۵ مجموعه داده استفاده شده‌است. همچنین مدل فازی تحت آموزش دارای ۲ تابع عضویت به ازای هر ورودی است. مشابه با مسئله قبل، RMSE حاصل از مراحل آموزش و بررسی داده در شکل (۱۲) نشان داده شده‌است که همگرایی فرآیند شناسایی بعد از چندین تکرار و به‌عبارتی پایداری آن را نشان می‌دهد.

بعد از مرحله آموزش، داده‌های ورودی مربوط به مرحله بررسی داده (پیش‌بینی) به مدل آموزش دیده اعمال شد و خروجی آن در شکل (۱۳) نشان داده شده‌است که دارای برهم‌نهی مناسبی است. همچنین برای اثبات دقیق‌تر پایداری آموزش، می‌بایست نشان داد که پارامترهای توابع عضویت مدل نیز بعد از چند مرحله تکرار همگرا می‌گردند که این امر در شکل‌های (۱۴) و (۱۵) به تصویر کشیده شده‌است.

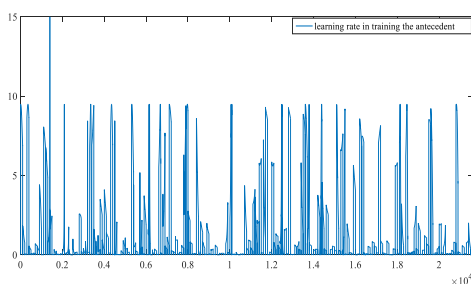
همانطور که از شکل‌ها برمی‌آید، هم پارامترهای مقدم و هم پارامترهای تالی به یک عدد ثابت همگرا شده‌اند و این موضوع بر پایداری فرآیند آموزش صحت می‌گذارد. شکل (۱۶)، RMSE مراحل آموزش و بررسی داده را در وضعیتی نشان می‌دهد که پارامترهای قابل تنظیم در الگوریتم‌ها در خارج از محدوده تعیین شده در نظریه پیشنهادی قرار گرفتند که موجب ناپایداری آموزش شده‌است. از آنجایی که هدف اصلی این پژوهش رسیدن به مقادیر تطبیقی پایدارساز و جدید برای پارامترهای قابل تنظیم در الگوریتم-ها بوده‌است، این پارامترها به ازای هر مجموعه داده و هر تکرار از آموزش در شکل‌های (۱۷) و (۱۸) رسم گردیده‌اند.



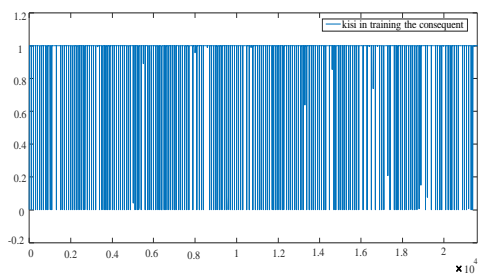
شکل ۱۲- RMSE آموزش و بررسی داده‌ها در شناسایی و بررسی داده در مسئله ۲ بر مبنای روش پیشنهادی (GD+KF)



شکل ۱۳- داده‌های واقعی و داده‌های پیش‌بینی شده در مسئله ۲ توسط مدل IT2ANFIS

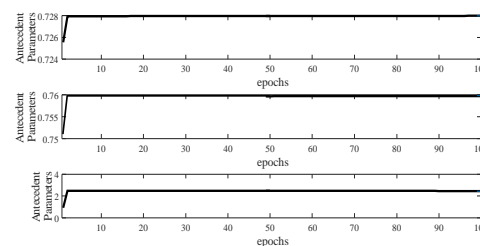


شکل ۱۷- تغییرات تطبیقی نرخ آموزش بر مبنای نظریه پیشنهادی در مسئله ۲

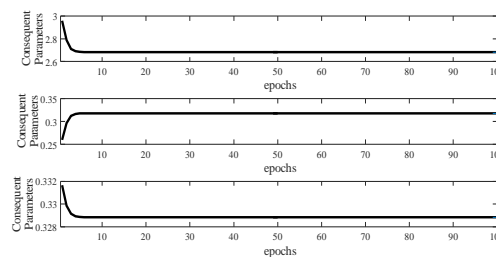


شکل ۱۸- تغییرات تطبیقی  $\xi$  در آموزش تالی مدل بر مبنای نظریه پیشنهادی در مسئله ۲

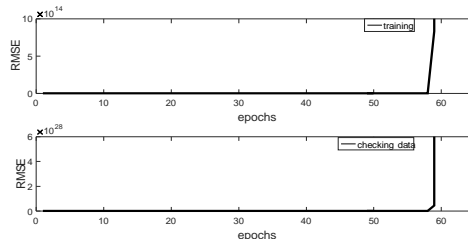
همانطور که نشان داده شده‌است، این مقادیر به صورت تطبیقی تغییر نموده‌اند و نیز موجب پایدارسازی فرآیند آموزش شده‌اند. به منظور مقایسه RMSE حاصل از این پژوهش با پژوهش‌های مرتبط با این حوزه در مسئله ۲، این روش با نتایج روش مطرح شده در مرجع [۳۶] مقایسه شده‌است. نتایج حاصل در جدول ۲ نشان داده شده‌است. با توجه به جدول ۲ می‌توان مشاهده نمود که روش پیشنهادی در مسئله ۲، هم به لحاظ RMSE و هم به لحاظ زمان شبیه‌سازی عملکرد بهتری داشته‌است. در روش [۳۶] تنها درجه آزادی برای تنظیم الگوریتم FRLS، ضریب فراموشی است که معمولاً بین ۰/۹ تا ۱ تنظیم می‌گردد ولی در



شکل ۱۴- همگرایی مراکز توابع عضویت مقدم در مسئله ۲



شکل ۱۵- همگرایی مراکز توابع عضویت تالی در مسئله ۲



شکل ۱۶- RMSE آموزش و بررسی داده‌ها در مسئله ۲ هنگامی که پارامترهای قابل تنظیم در خارج از محدوده‌های تعیین شده در روش پیشنهادی انتخاب شوند

قطعیت بیشتر در اندازه‌گیری است و فیلتر می‌بایست کمتر با اندازه‌گیری بروزسانی شود. در واقع  $R(k)$  بزرگ به معنی این است که اندازه‌گیری ارزشش کمتر می‌شود و RMSE حین آموزش و بررسی داده افزایش می‌یابد. ماتریس  $H_k$  که به عنوان ماتریس هس شناخته می‌شود، انعطاف‌پذیری بسیار زیادی را در نرخ آموزش ایجاد کرده است.

این انعطاف‌پذیری منجر به انتخاب محدوده‌های وسیع‌تری از این پارامتر قابل تنظیم تطبیقی شده است. وجود این ماتریس که در واقع حاوی مشتقات مرتبه دوم هست، می‌تواند تا حدودی بار محاسباتی را در فرآیند شناسایی افزایش دهد ولی این ماتریس در معادلات که جزء جدایی‌ناپذیر نظریه‌های پیشنهادی در پژوهش پیش رو هست، به‌عنوان مؤلفه اصلی این تحلیل است و باعث همگرایی سریع‌تر و بهبود عملکرد الگوریتم می‌شود.

#### ۶- نتیجه‌گیری

با بهره‌گیری از مزیت سیستم فازی نوع ۲ در مدل IT2ANFIS، قابلیت آموزش و پیش‌بینی سیستم در حضور نویز و عدم قطعیت‌ها نسبت به‌هنگامی که از سیستم فازی نوع ۱ در این نوع مدل‌ها استفاده می‌شود، ارتقاء یافته است. معرفی تابع لیاپانوف جدید در این پژوهش منجر به ارائه محدوده‌های جدیدی از نرخ آموزش در الگوریتم GD و ماتریس کوواریانس در الگوریتم KF شده است. این محدوده‌ها پایداری فرآیند آموزش را مطابق با نظریه پایداری لیاپانوف تضمین نموده‌اند. اگرچه ممکن است عملکرد شناساگر از نظر کوچکتر بودن RMSE چه در فاز آموزش و چه در فاز بررسی داده، در خارج از محدوده تعیین‌شده توسط نظریه‌های پیشنهادی، بهتر باشد و یا حتی در خارج از این محدوده‌ها، پایدار باشد، ولی پایداری آن تضمین شده نخواهد بود. با انتخاب مقادیر تطبیقی نرخ آموزش در روش پیشنهادی شانس فرار از تله کمینه محلی توسط الگوریتم افزایش یافته است و ترکیب کردن آن با الگوریتم‌های دیگر نیز این قابلیت را فزونی بخشیده است. نتایج شبیه‌سازی برای پیش‌بینی مقادیر آتی سری آشوب مکی گلاس و پیش‌بینی مقادیر آتی سیستم غیر خطی با داده‌های تصادفی بر مبنای روش پیشنهادی، نشان داد که روش پیشنهادی از نظر زمان شبیه‌سازی و مقدار ریشه دوم میانگین خطا هم در فاز آموزش و هم در فاز بررسی داده عملکرد مناسبی داشته است.

الگوریتم KF که در این پژوهش به جای آن جایگزین شده است، ماتریس کوواریانس‌های  $P(k)$  و  $Q(k)$  دو درجه آزادی ایجاد می‌کنند که علاوه بر ایجاد انعطاف‌پذیری بیشتر در تنظیم الگوریتم، می‌توانند به الگوریتم قابلیت عملکرد با نویز بهتری به آن بدهند. و این موضوعات موجب گردید که در هر دو مسئله RMSE مراحل آموزش و بررسی داده بهتر از روش‌های دیگر باشد.

ماتریس‌های  $Q(k)$  و  $R(k)$  فاکتورهای وزنی بین معادلات حالت (پیش‌بینی) و معادلات اندازه‌گیری هستند. در واقع نسبت این دو، نماینده بهره کالمن است. مقادیر بزرگ  $Q(k)$  به معنی عدم قطعیت بزرگتر در معادلات حالت است و به عبارتی بیانگر اعتماد کمتر به نتایج حاصل از معادلات حالت (پیش‌بینی) است و فیلتر بایستی بیشتر با اندازه‌گیری بهینه شود. البته انتخاب  $P_0(k)$  که مربوط به انتخاب مقادیر اولیه هست، ممکن است در بسیار از موقعیت‌ها مهم نباشد و معمولاً بصورت یک ماتریس همانی یا ضرایبی از آن شروع می‌شود. به‌طور مشابه مقادیر بزرگ  $R(k)$  به معنی عدم

جدول ۲- مقایسه RMSE های روش پیشنهادی در مسئله ۲ با الگوریتم GD+FRLS

مسئله ۲: سیستم غیر خطی با داده‌های تصادفی		ورودی‌ها: $x, y, z$ خروجی: $u$ تعداد داده‌های آموزش/بررسی ۱۲۵/۲۱۶	
GD+FRLS [۳۶]	آموزش	میانگین	0.1586
		بهترین	0.0758
		انحراف معیار	0.0312
	بررسی داده	میانگین	0.1678
		بهترین	0.1053
		انحراف معیار	0.0263
زمان شبیه‌سازی		4.5 sec	
روش پیشنهادی GD+KF	آموزش	میانگین	0.1025
		بهترین	0.0835
		انحراف معیار	0.0121
	بررسی داده	میانگین	0.118
		بهترین	0.0956
		انحراف معیار	0.0124
زمان شبیه‌سازی		1 sec	

## مراجع

- [1] C. T. Lin, and C. S. G. Lee, "Neural-network-based fuzzy logic control and decision system", IEEE Transactions on computers, Vol. 40, No. 12, 1991, pp. 1320-1336.
- [2] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I", Information sciences, Vol. 8, No. 3, 1975, pp. 199-249.
- [3] H. Chaoui, M. Khayamy, and A. A. Aljarboua, "Adaptive interval type-2 fuzzy logic control for PMSM drives with a modified reference frame", IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, Vol. 64, No. 5, pp. 3786–3797.
- [4] R. Coteli, H. Acikgoz, F. Ucar, and B. Dandil, "Design and implementation of type-2 fuzzy neural system controller for PWM rectifiers", International Journal of Hydrogen Energy, Vol. 42, No. 32, 2017, pp. 20759–20771.
- [5] F. Chao, D. Zhou, C. M. Lin, L. Yang, C. Zhou, and C. Shang, "Type-2 fuzzy hybrid controller network for robotic systems", IEEE transactions on cybernetics, July 2019.
- [6] H. Wang, C. Luo, and X. Wang, "Synchronization and identification of nonlinear systems by using a novel self-evolving interval type-2 fuzzy LSTM-neural network", Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 81, 2019, pp. 79-93.
- [7] K. Dahal, K. Almejalli, M. A. Hossain, and W. Chen, "GA-based learning for rule identification in fuzzy neural networks", Applied Soft Computing, Vol. 35, 2015, pp. 605–617.
- [8] N. Togun, and S. Baysec, "Nonlinear identification of a spark ignition engine torque based on ANFIS with NARX method", Expert Systems, Vol. 33, No. 6, 2016, pp. 559–568.
- [۹] فرزانه میراخورلو و ابراهیم نجفی کانی، "بررسی و پیش‌بینی خواص فیزیکی و مکانیکی کامپوزیت کاه و گچ به کمک مدل شبکه استنتاج عصبی فازی تطبیقی"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۷، شماره ۵۸، پاییز ۱۳۹۸، صفحه ۲۶۷–۲۷۸.
- [۱۰] حسین قنادزاده گیلانی، الهیار داغبندان، محمد اکبری زاده و میثم آزادیان، "مدل‌سازی سیستم‌های تعادلی بخار-مایع و مایع-مایع با استفاده از مدل‌های ترمودینامیکی، ساختارهای فازی و شبکه‌های عصبی نوع GMDH، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۶، شماره ۵۵، زمستان ۱۳۹۷، صفحه ۱۹–۳۳.
- [۱۱] نعیمه باقری راد و جواد بهنامیان، "انتخاب تأمین‌کننده با استفاده از رویکرد ترکیبی ANP-DEMATEL-VIKOR فازی"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۸، شماره ۶۰، بهار ۱۳۹۹.
- [12] S. Hassan, M. A. Khanesar, E. Kayacan, J. Jaafar, and A. Khosravi, "Optimal design of adaptive type-2 neuro-fuzzy systems: A review", Applied Soft Computing, Vol. 44, 2016, pp. 134–143.
- [13] W. Zhao, K. Li, and G. W. Irwin, "A new gradient descent approach for local learning of fuzzy neural models", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 21, No. 1, 2013, pp. 30–44.
- [14] S. Huang, and M. Chen, "Constructing optimized interval type-2 TSK neuro-fuzzy systems with noise reduction property by quantum inspired BFA", Neurocomputing, Vol. 173, 2016, pp. 1839–1850.
- [15] J. F. De Canete, A. Garcia-Cerezo, I. García-Moral, P. Del Saz, and E. Ochoa, "Object-oriented approach applied to ANFIS modeling and control of a distillation column", Expert Systems with Applications, Vol. 40, No. 14, 2013, pp. 5648–5660.
- [16] J. S. R. Jang, and E. Mizutani, "Levenberg-Marquardt method for ANFIS learning", Proceedings of North American Fuzzy Information Processing, Biennial Conference of the North American IEEE, June 1996, pp. 87-91.
- [17] A. A. Ibrahim, H. B. Zhou, S. X. Tan, C. L. Zhang, and J. A. Duan, "Regulated Kalman filter based training of an interval type-2 fuzzy system and its evaluation", Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 95, 2020, p. 103867.
- [18] I. Eyoh, R. John, G. De Maere, and E. Kayacan, "Hybrid learning for interval type-2 intuitionistic fuzzy logic systems as applied to identification and prediction problems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 26, No. 5, 2018, pp. 2672-2685.

- [19] A. Sarkheyli, A. M. Zain, and S. Sharif, "Robust optimization of ANFIS based on a new modified GA", *Neurocomputing*, Vol. 166, 2015, pp. 357–366.
- [20] M. Elloumi, M. Krid, D. S. Masmoudi, "Neuro-fuzzy system based on particle swarm optimization algorithm for image denoising application", *International Conference on Advances in Biomedical Engineering (ICABME)*, International Conference on IEEE, September 2015, pp. 9-12.
- [21] V. S. Ghomsheh, M. A. Shoorehdeli, and M. Teshnehlab, "Training ANFIS structure with modified PSO algorithm", *Proceedings of Mediterranean Conference on Control and Automation*, July 2007, pp. 1-6.
- [22] Y. Maldonado, O. Castillo, and P. Melin, "Particle swarm optimization of interval type-2 fuzzy systems for FPGA applications", *Applied Soft Computing*, Vol. 13, No. 1, 2013, pp. 496–508.
- [23] A. Bagis, and M. Konar, "Comparison of Sugeno and Mamdani fuzzy models optimized by artificial bee colony algorithm for nonlinear system modelling", *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2016.
- [24] C. F. Juang, C. W. Hung, and C. H. Hsu, "Rule-based cooperative continuous ant colony optimization to improve the accuracy of fuzzy system design", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 22, No. 4, 2014, pp. 723–735.
- [25] M. Almarashi, R. John, A. Hopgood, and S. Ahmadi, "Learning of interval and general type-2 fuzzy logic systems using simulated annealing: Theory and practice", *Information Sciences*, Vol. 360, 2016, pp. 21–42.
- [26] S. M. A. Pahnehkolaei, A. Alfi, A. Sadollah, and J. H. Kim, "Gradient-based water cycle algorithm with evaporation rate applied to chaos suppression", *Applied Soft Computing*, Vol. 53, 2017, pp. 420–440.
- [27] Q. Liang, and J. M. Mendel, "Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 8, No. 5, 2000, pp. 551–563.
- [28] E. Kayacan, E. Kayacan, and M. A. Khanesar, "Identification of nonlinear dynamic systems using type-2 fuzzy neural networks—A novel learning algorithm and a comparative study", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 62, No. 3, 2015, pp. 1716–1724.
- [29] M. A. Shoorehdeli, M. Teshnehlab, and A. K. Sedigh, "Identification using ANFIS with intelligent hybrid stable learning algorithm approaches", *Neural Computing and Applications*, Vol. 18, No. 2, 2009, pp. 157–174.
- [30] J. Tavoosi, A. A. Suratgar, and M. B. Menhaj, "Stable ANFIS2 for nonlinear system identification", *Neurocomputing*, Vol. 182, 2016, pp. 235-246.
- [31] J. Tavoosi, A. A. Suratgar, and M. B. Menhaj, "Stability analysis of recurrent type-2 TSK fuzzy systems with nonlinear consequent part", *Neural Computing and Applications*, Vol. 28, No. 1, 2017, pp. 47-56.
- [32] G. M. M. De Los Angeles Hernández, "Hybrid learning mechanism for interval A2-C1 type-2 non-singleton type-2 Takagi–Sugeno–Kang fuzzy logic systems", *Information Sciences*, Vol. 220, 2013, pp. 149-169.
- [33] C. H. Lu, and C. C. Tsai, "Generalized predictive control using recurrent fuzzy neural networks for industrial processes", *Journal of Process Control*, Vol. 17, No. 1, 2007, pp. 83–92.
- [34] M. A. Shoorehdeli, M. Teshnehlab, and A. K. Sedigh, "Training ANFIS as an identifier with intelligent hybrid stable learning algorithm based on particle swarm optimization and extended Kalman filter", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 160, No. 7, 2009, pp. 922-948.
- [35] Y. Y. Lin, J. Y. Chang, and C. T. Lin, "A TSK-type-based self-evolving compensatory interval type-2 fuzzy neural network (TSCIT2FNN) and its applications", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 61, No. 1, 2013, pp. 447–459.
- [36] M. M. Zabihi Shesh Poli, M. Aliyari Shoorehdeli, and A. Moarefianpour, "Stability analysis in identification of interval type-2 adaptive neuro-fuzzy inference system: Contribution to a novel Lyapunov function", *Expert Systems*, Vol. 36, No. 6, 2019, p. e12457.
- [37] M. B. Begian, W. W. Melek, and J. M. Mendel, "Stability analysis of type-2 fuzzy systems", *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*, 2008, pp. 947-953.
- [38] J. Mendel, H. Hagrass, W. W. Tan, W. W. Melek, and H. Ying, "Introduction to type-2 fuzzy logic control: theory and applications", *John Wiley and Sons*, 2014.
- [39] J. M. Mendel, R. I. John, and F. Liu, "Interval type-2 fuzzy logic systems made simple", *IEEE transactions on fuzzy systems*, Vol. 14, No. 6, 2006, pp. 808-821.

[40] D. Wu, and J. M. Mendel, "Enhanced karnik--Mendel algorithms", IEEE transactions on fuzzy systems, Vol. 17, No. 4, 2008, pp. 923-934.

[41] M. A. Khanesar, E. Kayacan, M. Teshnehlav, and O. Kaynak, "Levenberg marquardt algorithm for the training of type-2 fuzzy neuro systems with a novel type-2 fuzzy membership function", IEEE symposium on advances in type-2 fuzzy logic systems, 2011, pp. 88-93.

[42] M. C. Mackey, and L. Glass, "Oscillation and chaos in physical control system. Science", Vol. 197, July 1977, pp. 287-289.