

## مدلسازی دینامیکی رابطه بین میزان ویسکوالاستیک بودن بافت نرم و حالت لحظه‌ای آن

سید ایوب میرطاوسی<sup>۱\*</sup> و سید سپهر طباطبائی<sup>۲</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۲۴	<p>در سال‌های اخیر یکی از مسائل چالشی مطرح شده در حوزه‌ی مدلسازی، تعیین و تبیین رفتار یک ماده ویسکوالاستیک مانند بافت نرم می‌باشد. به منظور بیان ارتباط میان تنش و کرنش بافت نرم از حسابان مرتبه کسری به عنوان یک ابزار مفید استفاده می‌گردد. تمایل رفتار بافت نرم به عنوان یک ماده ویسکوز خالص یا الاستیک خالص، توسط پارمتری به نام مرتبه بیان می‌گردد. هرچند تنش، کرنش و مرتبه نیز خود تابعی از زمان هستند، هدف از این مقاله شناسایی مرتبه کسری به عنوان تابعی از حالت ماده می‌باشد. لذا لازم است به نحوی تابعیت زمان بین مرتبه و زوج تنش و کرنش حذف و مرتبه کسری به عنوان تابعی از وضعیت لحظه‌ای تنش - کرنش بیان شود. برای نخستین بار این تابعیت به صورت دینامیکی پیشنهاد شده است. جهت اعتبارسنجی مدل پیشنهادی با استفاده از نتایج پژوهش‌های پیشین که مرتبه را به صورت تابع زمان تخمین زده‌اند، یک مدل فضای حالت آموزش داده می‌شود. سپس نتایج حاصل از مدل دینامیکی جدید با نتایج حاصل از آزمایش‌های دیگر مورد مقایسه قرار می‌گیرد. نتایج بدست آمده کارآمدی مدل پیشنهادی را به خوبی نشان می‌دهد.</p>
پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۱۸	
<p><b>واژگان کلیدی:</b> بافت نرم، ماده ویسکوالاستیک، شناسایی دینامیکی، رابطه تنش-کرنش، حسابان مرتبه کسری، PEM.</p>	

### ۱-مقدمه

کارآمدتر از یک مدل ایستا می‌باشد. برای مثال در عملیات کاشت دانه رادیو اکتیو، دانه باید در محل مشخصی کاشته شود. با تزریق سوزن، بافت نرم تغییر شکل یافته و لذا محل کاشت رادیو اکتیو نیز تغییر می‌یابد. پس تنها راه صحیح کاشت دانه رادیو اکتیو، استفاده از یک مدل پویای بافت است تا تغییر محل کاشت اولیه قابل پیش بینی باشد و کل فرآیند کاشت دانه رادیو اکتیو بدرستی انجام گردد [۴، ۵]. از منظر میکروسکوپی یک بافت نرم دو فاز دارد: مایعی مانند آب یا خون و سلول‌های غشایی. به همین دلیل از این منظر نمی‌توان بافت نرم را ماده ویسکوز خالص یا الاستیک خالص پنداشت. متداولترین راهکار در نظر گرفتن بافت نرم به عنوان ماده ویسکوالاستیک است [۶-۱۰] که برای مدل کردن آن روش‌های مختلفی نیز پیشنهاد شده است. برخی از روش‌ها از مدل کلویین-وویت استفاده می‌کنند و هر جزء

مدلسازی بافت نرم از مباحث به روز مورد بحث در مهندسی و پزشکی به شمار می‌رود. این موضوع نخستین بار برای استفاده در شبیه ساز جراحی پیشنهاد گردید [۱]. مدل دقیقی از بافت نرم که به خوبی رفتار بافت را مدل سازی نماید، کاملاً بر کیفیت یادگیری نوجراحان تاثیر گذار است. گذشته از این موضوع، مدل سازی بافت نرم کاربردهای متنوعی مانند تزریق سوزن [۲] نمونه‌گیری از خون [۳] کاشت دانه رادیو اکتیو [۴] و ... را شامل می‌شود که در تمامی موارد اخیر لازم است ابزاری در یک بافت نرم تزریق گردد و برهم کنش ابزار و محیط بافت بسیار مهم است. در بسیاری از کاربردهای کنونی نیاز به مدلی داریم تا در هر لحظه از فرآیند، حالت بافت را به عنوان تابعی از زمان مشخص نماید. به بیان دیگر نیاز به یک مدل پویا بسیار

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: a.mirtavoosi@shr.ui.ac.ir

۱. مربی، گروه مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، مرکز آموزش عالی شهرضا

۲. استادیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، مرکز آموزش عالی شهرضا

استفاده شد و مدل با داده‌های واقعی مقایسه شده است. در [۱۸] داده‌های مستخرج از یک سیستم رباتیکی به منظور مدلسازی تغییر شکل بکار رفته است. در این مدل مرتبه به عنوان تابعی از زمان در نظر گرفته شده (یعنی  $q = q(t)$ ) و با استفاده از توابع تکه‌ای ثابت، این مرتبه متغیر با زمان تخمین زده شده است. سپس یک الگوریتم ژنتیک، ضرائب ثابت را تخمین می‌زند. همگرایی روش تخمین مرتبه-پارامتر تطبیقی (AOPEM<sup>1</sup>) در [۱۳] اثبات شده است که در آن با یک مدل مرتبه کسری متغیر با زمان، تغییر حالت یک بعدی بافت نرم بیان شده است. نتایج این تخمین در شکل (۱) آمده است. در مقاله حاضر نیز برای مقایسه و اعتبار سنجی روش پیشنهادی مبتنی بر مدل دینامیکی از نتایج حاصل از رویکرد مرجع [۱۳] استفاده می‌شود.

در مقالات [۱۳ و ۱۸] مرتبه تابعی از زمان در نظر گرفته شده است. چون حالت ماده یعنی میزان تنش و کرنش در هر نقطه و در هر لحظه خود کمی متغیر با زمان است، پس در عمل فرض تابع زمان بودن مرتبه صحیح نیست، لذا، مرتبه (به عنوان تابعی صریحی از حالت ماده) می‌تواند خود تابع غیر صریحی از زمان باشد. اما در نظر گرفتن وابستگی زمانی مرتبه یک مشکل عمده دارد که نمی‌توان مرتبه را پیش بینی نمود. بر اساس دانش علم مکانیک، مقدار ویسکوالاستیک بودن ماده به حالت ماده وابسته است [۱۹].

پس موضوع اصلی این مقاله، حذف تابعیت نسبت به زمان و به دست آوردن رابطه‌ی بین مرتبه و زوج تنش و کرنش با یک رویکرد جدید است. به بیان دیگر به دنبال سیستمی هستیم که خروجی آن مرتبه و ورودی آن زوج تنش و کرنش است. اکنون مسأله دیگری مطرح است که چگونه این تابعیت بین مرتبه و زوج تنش-کرنش را بدست آوریم؟ به این منظور مدل یک بعدی مرتبه کسری اشاره شده در [۱۳] را به کار می‌بریم (AOPEM<sup>2</sup>). داده‌های بدست آمده از چند آزمایش انجام شده در [۱۳] نیز برای تشکیل مجموعه داده‌های آموزش و تست بکار می‌روند. AOPEM زوج تنش-کرنش و مرتبه کسری را به عنوان تابعی از زمان ارائه می‌کند. جهت حذف تابعیت زمان بین زوج تنش-کرنش و مرتبه دو رویکرد می‌توان در نظر گرفت.

توسط جرم-فنر معادل مدل می‌گردد [۱۱]. برای دستیابی به دقت بیشتر از روش اجزاء محدود نیز در [۱۲] استفاده شده است. نقطه مشترک تمامی روش‌های قبل در نظر گرفتن رفتار ماده ویسکوالاستیک "بین" ماده ویسکوز و الاستیک می‌باشد. با تکیه بر واژه‌ی "بین"، محاسبات مرتبه کسری به عنوان راهکار دیگری برای مدلسازی ویسکوالاستیک پیشنهاد شده است [۸، ۱۳].

محاسبات مرتبه کسری مبحثی دیرینه است که به تازگی در مدلسازی و مهندسی کاربرد دارد. مشتق مرتبه کسری از منظر کپوتو با مرتبه  $\alpha$  توسط رابطه زیر تعریف می‌گردد [۱۴]:

$${}^c D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha(t)} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$0 < \alpha(t) < 1, t > 0$$

که  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$  تعمیم عملگر فاکتوریل به مقادیر کسری است [۱۵].

مدلسازی رفتار ماده معادل با دانستن رابطه بین تنش-کرنش می‌باشد [۱۳]. در تعریف، تنش (که با  $\sigma$  نشان داده می‌شود) نیروی نرمالیزه شده روی هر بخش از ماده و کرنش (که با  $\epsilon$  نمایش داده می‌شود) جابجایی نسبی آن بخش از ماده می‌باشد. رابطه مرتبه کسری تنش-کرنش به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\sigma = p D^{\alpha} \epsilon \quad (2)$$

که  $p$  عددی ثابت است، اما مرتبه‌ی  $\alpha$  می‌تواند متغیر باشد [۱۳، ۱۶]. توجه داریم که در مکانیک مواد، برای یک ماده الاستیک خالص، تنش رابطه خطی مستقیم با کرنش دارد (به عبارت دیگر با مشتق مرتبه صفرم آن مرتبط است) یعنی  $\sigma = E \epsilon = E D_t^0 \epsilon$  تنش به صورت خطی با مشتق مرتبه اول کرنش در ارتباط است ( $\sigma = b \dot{\epsilon} = b D_t^1 \epsilon$ ).

پس در تفسیر واژه "بین" باید گفت در یک ماده ویسکوالاستیک، تنش رابطه خطی با مشتق  $q$ ام کرنش دارد. بدین صورت رابطه (۲) تعبیر می‌گردد. در نظر گرفتن این رویکرد مفهومی در مدلسازی سبب شده است تا پژوهشگران روش‌های متفاوتی برای تصدیق مدل ارائه شده را بکار برند. در [۱۷] از یک مدل مرتبه کسری برای مدلسازی تنش کابل

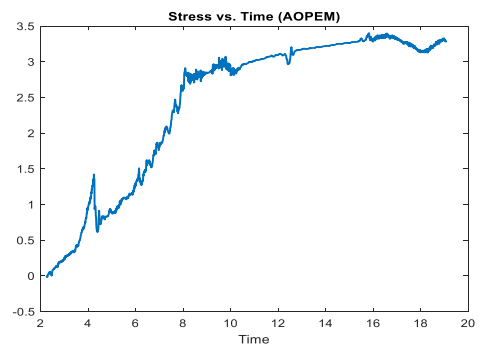
<sup>2</sup> Adaptive Order and Parameter Estimation Method

<sup>1</sup> Adaptive Order and Parameter Estimation Method

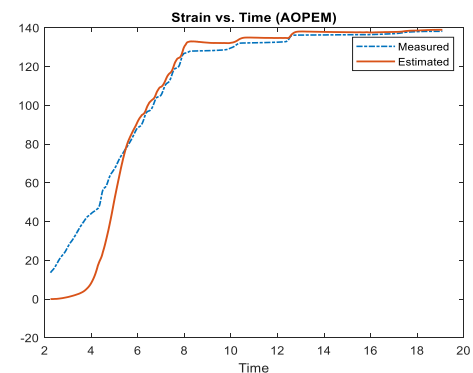
در رویکرد اول مانند آنچه در [۲۰] بیان شده است، از یک رابطه جبری ایستا استفاده می‌گردد. اما به نظر می‌رسد روند تغییرات حالت ماده بر مقدار لحظه‌ای مرتبه تاثیر گذار است. بدین معنی که مقدار لحظه‌ای مرتبه نه تنها تابعی از حالت ماده است، بلکه تابعی از نرخ تغییرات حالت ماده نیز می‌باشد و لذا در رویکرد دوم برای نخستین بار از یک مدل دینامیکی (PEM) استفاده می‌نماییم که در آن زوج تنش- کرنش مجموعه آموزش به عنوان ورودی و مرتبه کسری همان مجموعه (که پیشتر توسط الگوریتم تطبیقی بدست آمده‌اند) به عنوان خروجی آن تعریف می‌گردد. سپس داده های یک آزمایش دیگر به عنوان داده‌های تست به شبکه آموزش دیده اعمال گردیده و در نهایت میزان دقت فرآیند شناسایی سنجیده خواهد شد.

تفاوت رویکرد اتخاذ شده در این مقاله با روش‌های مشابه، بخصوص روندی که در مرجع [۱۳] برای شناسایی مرتبه به کار رفته مفروضاتی است که بر آن مبنا تابعیت مرتبه مشخص می‌شود. در واقع مرجع [۱۳] به این خاطر که هدف را شناسایی تطبیقی رفتار بافت قرار داده، به دنبال شناسایی دقیق مرتبه نرفته است. این مهم در مقاله حاضر متفاوت است. چراکه این مقاله نظر به کاربرد مدل بافت نرم در کاربردهایی نظیر جراحی دارد. به بیان دیگر، در مرجع [۱۳] مرتبه تابعیت زمان دارد و این تابعیت نیاز به شناسایی ندارد. اما اگر هدف پیش بینی جابجایی بافت باشد دیگر تابعیت از زمان معنا ندارد، چرا که این تابعیت صریح نیست و در واقع با واسطه حالت ماده (تنش و کرنش لحظه‌ای) معنا پیدا می‌کند. پس بدین منظور باید به اصل مطلب رجوع کرد، یعنی مرتبه را تابعی از حالت ماده دانست. اگر این حالت در بستر زمان تغییر کند، مرتبه نیز چنین خواهد بود. (چنان که در مرجع [۱۳] این تابعیت ضمنی از زمان مفروض است.) اما زمان در این میان متغیر مستقل اصلی نیست. پس باید تابعیت صریح از تنش و کرنش شناسایی شود تا بتوان مرتبه و به تبع آن جابجایی بافت را پیش بینی کرد.

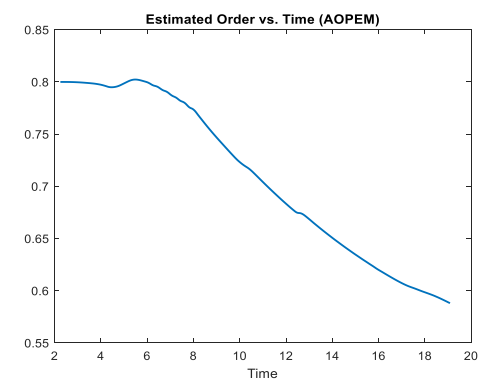
برای نخستین بار، رویکرد لحاظ شده برای شناسایی تابعیت مرتبه در این مقاله یک رویکرد دینامیکی است. در واقع فرض بر آن است که یک سیستم دینامیکی خطی دو ورودی-تک خروجی در فضای حالت وجود دارد که با داشتن تنش و کرنش مرتبه را تخمین می‌زند. رویکرد شناسایی دینامیکی پیشنهادی قویتر و منعطفتر از



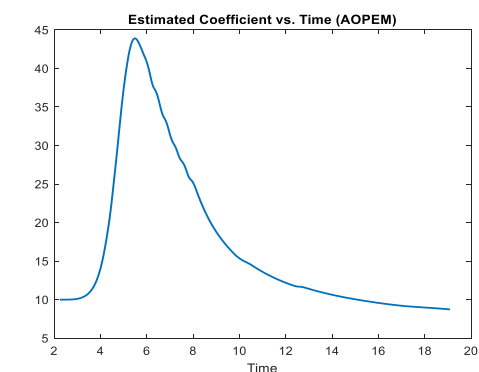
(الف)



(ب)



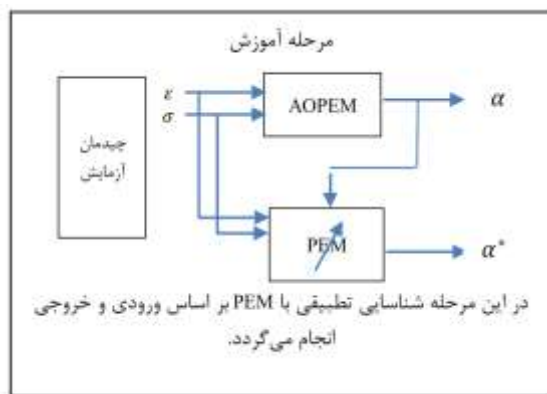
(ج)



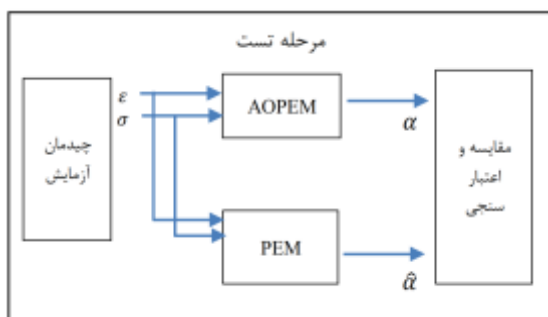
(د)

شکل ۱- (الف)، تنش (ب) کرنش تخمین شده شده با AOPEM (ج) مرتبه تخمین زده شده با AOPEM (د) ضریب تخمین زده شده با AOPEM. (آزمایش شماره ۳)

[۱۳]



شکل ۲ - فلوگراف مرحله آموزش



شکل ۳ - فلو گراف مرحله تست

با توجه به موارد فوق، ادامه مقاله به شرح زیر می باشد:

در بخش بعد به معرفی روش شناسایی مستقیم تطبیقی و روش شناسایی غیرمستقیم با روش PEM می‌پردازیم. در بخش سوم فرآیند تشخیص معرفی می‌شود. در بخش ۴ نتایج با انتخاب مختلف مجموعه‌های آموزش و تست ارائه می‌گردد. در نهایت بخش ۵ به نتیجه گیری مقاله اختصاص دارد.

## ۲- شناسایی مرتبه

شناسایی مرتبه چنان که گفته شد با لحاظ کردن دو فرضیه ممکن است: ۱- فرض کنیم مرتبه تابع مستقیم زمان است. ۲- فرض کنیم مرتبه تابع حالت سیستم است. اگر حالت یک را در نظر بگیریم، در هر بار جراحی باید عملیات شناسایی مرتبه را نیز به طور موازی اجرا کنیم و نتایج یک آزمایش در مورد آزمایش دیگر قابل اتکا نخواهد بود. اما رویکرد دوم تابعیت کلی مرتبه از تنش و کرنش را مدنظر قرار می‌دهد و با دانستن این تابعیت با اندازه‌گیری تنش و کرنش مرتبه قابل حد است. فرض نخست در [۱۳] در نظر گرفته شده و قضایایی برای تخمین مرتبه در آن مرجع اثبات شده است. در اینجا نیز برای آموزش مدل

فرض کردن یک تابعیت جبری بین ورودی و خروجی است و منجر به تخمین بهتری خواهد شد. ضمناً روش PEM<sup>۱</sup> در صورتی که اندازه گیری دستخوش نویز باشد، قادر به نویززدایی نیز هست.

از آزمایش‌های صورت گرفته در [۱۳] تعدادی آزمایش انتخاب شده‌اند که هر بار یکی از آنها به عنوان مجموعه آموزش و دیگری جهت مجموعه تست بکار می‌روند. با در نظر گرفتن ترکیب‌های مختلف نشان می‌دهیم که مفهوم وابسته بودن مرتبه کسری به زوج تنش-کرنش معقول است و فرآیند تخمین مرتبه کارایی لازم را داراست. با در اختیار داشتن چنین شبکه آموزش دیده‌ای به همراه زوج تنش-کرنش می‌توان مرتبه کسری را تخمین زد و بنابراین تغییر شکل بافت نرم قابل پیش بینی است.

در نهایت مراحل زیر برای تعیین مقدار ویسکو الاستیک ماده به عنوان تابعی از حالت ماده انجام می‌شود:

۱- با استفاده از داده های مستخرج از چیدمان آزمایش، زوج تنش-کرنش را با مرتبه متغیر در نظر می‌گیریم که این مرتبه متغیر مقدار ویسکو الاستیک بودن ماده را تعیین می‌کند.

۲- با توجه به آزمایش‌های مختلف، تنش و کرنش را به صورت توابعی از زمان بیان می‌نماییم. با استفاده از معادلات رابطه‌ی شماره (۸)، روش شناسایی تطبیقی AOPEM مرتبه نیز به صورت تابعی از زمان بیان می‌گردد و به عنوان خروجی و مرجعی برای بند ۳ لحاظ می‌شود (شکل شماره ۲)

۳- حالت ماده (تنش و کرنش لحظه‌ای) و میزان ویسکو الاستیک بودن ماده (مرتبه لحظه‌ای) به عنوان ورودی و خروجی به یک شبکه PEM داده می‌شود. این شبکه برای یادگیری رابطه بین ورودی و خروجی براساس معادلات موجود در رابطه (۱۲) آموزش می‌بیند (شکل شماره ۳).

۴- مطابق با گام‌های قبل، از آزمایش دیگری برای تشکیل داده‌های تست استفاده شده و خطای آزمایش محاسبه می‌گردد.

۵- با در نظر گرفتن ترکیب‌های مختلف داده‌های آموزش و آزمایش و تصدیق مدل بدست آمده، فرآیند پایان می‌پذیرد. روش استفاده شده در مراحل آموزش و تست بکار رفته در ادامه کار در فلوگراف‌های زیر نمایش داده شده است

<sup>1</sup> Prediction Error Estimation Method

حال مسئله به فرم مسئله کانونی تخمین کمترین مربعات با ضریب فراموشی در می‌آید. لازم به ذکر است که فرم (۳) بیان شده در صورت قضیه با فرم بسته زیر معادل است.

$$p(\beta, t) = P(\beta, t) \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} x^*(\tau) \phi(\beta, \tau) d\tau \quad (۶)$$

$$P(\beta, t) = \left( \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \phi(\beta, \tau) \phi^T(\beta, \tau) d\tau \right)^{-1}$$

خطای پارامتری را به صورت  $\tilde{p} = p^* - p$  در نظر بگیریم. داریم  $\dot{\tilde{p}} = -\dot{p} = -P(x^* - x)\phi$ . خطای سیگنالی  $\xi$  را نیز می‌توان به صورت  $\xi = x^* - x = \tilde{p}^T \phi$  بیان کرد. تابع کاندیدای لیاپانوف  $V = \frac{1}{2} \tilde{p}^T P^{-1} \tilde{p}$  را تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{p}}^T P^{-1} \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \dot{P}^{-1} \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{p}^T P^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= -\frac{1}{2} \phi^T \xi P P^{-1} \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{p}^T (-\lambda P + \phi \phi^T) \tilde{p} - \frac{1}{2} \tilde{p}^T P^{-1} P \phi \xi \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{p}^T \phi \phi^T \tilde{p} - \frac{\lambda}{2} \tilde{p}^T P \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \phi \phi^T \tilde{p} - \frac{1}{2} \tilde{p}^T \phi \phi^T \tilde{p} \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{p}^T \phi \phi^T \tilde{p} - \frac{\lambda}{2} \tilde{p}^T P \tilde{p} < 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

پس  $V < 0$  و  $\tilde{p} \rightarrow 0$  و  $\xi \rightarrow 0$  این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۱ [۱۳] - برای سیستم (۲) در بازه  $t \in [0, T]$  با مرتبه نامعلوم متغیر با زمان  $0 < \alpha^*(t) < 1$ ، بردار پارامتر نامعلوم  $\| \dot{\alpha}^* \| < M$  و پارامتر را با خطای به دلخواه کوچک تخمین می‌زنند.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} &= P(x^* - \hat{x})\phi(\hat{\alpha}, t) \\ P &= \lambda P - P\phi(\hat{\alpha}, t)\phi^T(\hat{\alpha}, t)P \\ \dot{\hat{\alpha}} &= \gamma \Lambda(x^* - \hat{x}) \\ {}^c_0 D_t^{\hat{\alpha}(t)} \hat{x}(t) &= \hat{p}^T u \end{aligned} \quad (۸)$$

که در این جا  $\gamma$  یک ثابت مثبت و  $0 < \lambda < 1$  ضریب فراموشی است و:

دینامیکی از این نتایج استفاده خواهیم کرد. بنابراین خلاصه‌ای از موارد اثبات شده در [۱۳] در ادامه ذکر می‌شود.

### ۲-۱- شناسایی تطبیقی

در این بخش به بررسی روش شناسایی تطبیقی که در [۱۳] استفاده شده است، می‌پردازیم. این روش در چارت ارائه شده در قسمت قبل و در محاسبه مرتبه به صورت تابعی از حالت ماده استفاده شد و در اعتبار سنجی روش پیشنهادی نیز نقش مهمی ایفا می‌کند. در واقع با تکیه بر نتایج بدست آمده از این روش، کارآمدی روش پیشنهادی شناسایی تطبیقی در فضای حالت تصدیق می‌گردد. در ادامه با بیان و اثبات یک لم و یک قضیه به بررسی شناسایی روش تطبیقی می‌پردازیم.

لم ۱ [۱۳] - مدل  ${}^c_0 D_t^{\alpha^*(t)} x(t) = p(\alpha^*, t)^T u$  را به عنوان تقریبی برای (۲) در حالی در نظر بگیرید که:

$$\begin{aligned} \dot{p}(\alpha^*, t) &= P(\alpha^*, t)(x^* - x)\phi(\alpha^*, t) \\ \dot{P}(\alpha^*, t) &= \lambda P(\alpha^*, t) - \\ &P(\alpha^*, t)\phi(\alpha^*, t)\phi^T(\alpha^*, t)P(\alpha^*, t) \end{aligned} \quad (۳)$$

که در رابطه (۳)  $0 < \lambda < 1$  را ضریب فراموشی<sup>۱</sup> می‌نامیم و:

$$\phi(\beta, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta(t))} \int_0^t (t-\tau)^{\beta(t)-1} u(\tau) d\tau \quad (۴)$$

در اینصورت در شرایطی که  $\phi(\alpha^*, t)$  عضو  $L_\infty$  مداوماً محرک<sup>۲</sup> باشد  $p \rightarrow p^*$  و مقدار  $T_\epsilon$  وجود دارد که برای هر مقدار دلخواه  $\epsilon$ ؛  $t > T_\epsilon \Rightarrow \|x - x^*\| < \epsilon$  یا به عبارتی  $(x - x^*) \rightarrow 0$ . اثبات: می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha^*(t)-1}}{\Gamma(\alpha^*(t))} p^{*T} u(\tau) d\tau \\ x(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha^*(t)-1}}{\Gamma(\alpha^*(t))} p^T u(\tau) d\tau \quad (۵) \\ \Rightarrow x^* &= p^{*T} \phi \\ x &= p^T(\alpha^*, t) \phi \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Persistent of Excitation

<sup>1</sup> Forgetting Factor

باشد.

## ۲-۲- روش شناسایی در فضای حالت (PEM)

روش PEM یک روش تخمین سیستم دینامیکی در فضای حالت است که برای تخمین سیستم‌های تصادفی آغشته به نویز که هم نویز پردازش و هم نویز اندازه‌گیری روی آن‌ها اثر می‌گذارد به کار می‌رود.

سیستم مورد تخمین به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + w(t) \\ y(t) &= C(\theta)x(t) + v(t) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن  $X$  حالت‌های سیستم،  $\mathcal{Y}$  خروجی آن است،  $A, B, C$  و  $\theta$  که تابع پارامترهای تخمینی هستند، ماتریس‌های توصیف کننده دینامیک هستند.  $V$  و  $W$  نیز دو نویز گوسی جداگانه می‌باشند که  $W$  نویز پردازش و  $V$  نویز اندازه‌گیری نامیده می‌شود. در مورد کوواریانس نویزها داریم:

$$\begin{aligned} E\{w(t)w^T(t)\} &= R_1(\theta) \\ E\{v(t)v^T(t)\} &= R_2(\theta) \\ E\{w(t)v^T(t)\} &= R_{12}(\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

عملیات تخمین به صورت کلی بدین ترتیب است که چون نویز پردازش را در اختیار نداریم، یک سیستم دیگر که معادل با سیستم (۱۲) است را به صورت تحقق در فضای حالت می‌سازیم. متغیرهای حالت این سیستم تخمینی نارباب از متغیرهای سیستم اصلی است. یعنی یک تخمین‌گر لوونبرگر نیاز داریم. (که در حالت بهینه می‌تواند فیلتر کالمن باشد). یک خروجی مجازی نیز برای این سیستم تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x(t+1, \theta) &= A(\theta)\hat{x}(t) + B(\theta)u(t) \\ &\quad + K(\theta)[y(t) - C(\theta)\hat{x}(t, \theta)] \\ \hat{y}(t | \theta) &= C(\theta)\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

می‌بینیم که پارامترهای این سیستم همان ماتریس‌های سیستم اصلی هستند. به جز  $K$  که بهره فیلتر کالمن است و به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} K(\theta) &= [A(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) \\ &\quad + R_{12}(\theta)][C(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_2(\theta)]^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

معادلسازی این دو سیستم با فرض دانستن کوواریانس نویزها است.  $\bar{P}$  در رابطه بالا (که اتفاقاً کوواریانس خطای

$$p(\beta, t) = P(\beta, t) \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} x^*(\tau) \phi(\beta, \tau) d\tau,$$

$$P(\beta, t) = \left( \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \phi(\beta, \tau) \phi^T(\beta, \tau) d\tau \right)^{-1}$$

$$\phi(\beta, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta(t))} \int_0^t (t-\tau)^{\beta(t)-1} u(\tau) d\tau$$

(۹)

و نیز:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left( p^T(\hat{\alpha}, t) \frac{\partial \phi(\beta, t)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\hat{\alpha}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial p^T(\beta, t)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\hat{\alpha}} \phi(\hat{\alpha}, t) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

اثبات: دو رابطه نخست، مربوطه به تخمین برخط پارامتر است طبق لم اخیر با تعریف خطای تخمین مرتبه به صورت

$$\tilde{\alpha} = \alpha^* - \hat{\alpha} \quad V = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^2$$

نظر بگیرید. داریم:

$$\dot{V} = \dot{\tilde{\alpha}}^T (\alpha^* - \hat{\alpha}) - \gamma \Lambda (\alpha^* - \hat{\alpha}) (x^* - \hat{x})$$

با جایگذاری  $x^* - \hat{x}$  وجود دارد  $T_\epsilon$  که برای  $t > T_\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq (M + \epsilon \gamma \|\Lambda\|) \|\alpha^* - \hat{\alpha}\| - \gamma \Lambda^2 (\alpha^* - \hat{\alpha})^2 \\ &\quad + \gamma \|\Lambda\| \|K(t)\| \|\alpha^* - \hat{\alpha}\|^3 \end{aligned} \quad (11)$$

فرض کنید  $\Lambda \neq 0$ . آن‌گاه عدد مثبت  $\Lambda_0$  وجود دارد که  $\|\Lambda\| > \Lambda_0$ .

با تعیین علامت  $\dot{V}$  در رابطه بالا بدست خواهد آمد که برای  $t > T_\epsilon$  در بازه  $\frac{\Lambda_0}{2M_K} < \|\alpha^* - \hat{\alpha}\| < \frac{\Lambda_0}{2M} + \epsilon_1$  مقدار  $\dot{V}$  منفی است.

یعنی خطای تخمین محدود می‌ماند. زیرا اگر  $\|\alpha^* - \hat{\alpha}\|$  بخواهد از حد  $\frac{2M}{\gamma \Lambda_0^2}$  بالاتر رود، چون در این ناحیه

$\dot{V} < 0$ ، باز به درون ناحیه کشیده می‌شود. این به معنای آن است که  $\|\alpha^* - \hat{\alpha}\|$  به طور محلی غایتاً محدود<sup>۱</sup> است

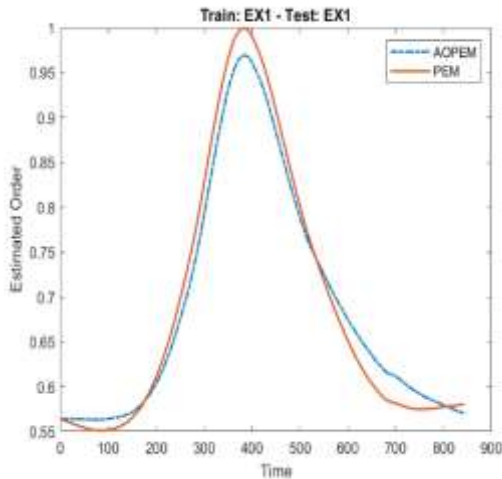
و باند این محدودیت مقدار  $\frac{2M}{\gamma \Lambda_0^2}$  می‌باشد. برای رسیدن

به این محدوده کافی است شرایط آغازین تخمین طوری انتخاب شود که در بازه  $\frac{2M}{\gamma \Lambda_0^2} \leq \|\alpha^* - \hat{\alpha}\| \leq \frac{\Lambda_0}{2M_K}$

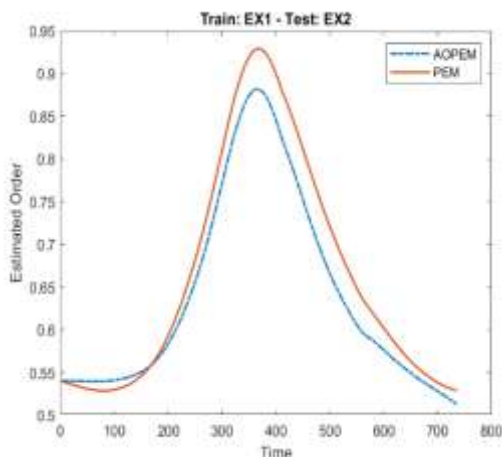
<sup>1</sup> Locally Ultimately Boundedness

آزمایش‌های مختلف به عنوان داده‌های آموزش و تست، در سایر اشکال نمایش داده شده است.

این نمودارها به خوبی فرضیه اصلی مقاله را تصدیق می‌کند. تابعیت معناداری بین مرتبه کسری و حالت ماده وجود دارد که این تابعیت توسط شبکه PEM آشکار شده است. از آنجا که خطای آموزش و خطای آزمایش هر دو به میزان مناسبی کم است، نتیجه موید فرضیه رابطه دینامیکی بین مرتبه و زوج تنش - کرنش است. این بدان معناست که تغییرات مرتبه (که مبین میزان ویسکوز یا الاستیک بودن ماده است) با حالت ماده رابطه خطی دارد این رابطه دینامیکی است. همچنین تعدد آزمایش‌ها و لحاظ کردن حالت‌های مختلف آموزش و تست رویکرد پیشنهادی را تصدیق می‌نماید.



شکل ۴- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۱)



شکل ۵- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۱ و تست با آزمایش شماره ۲)

تخمین ( $x - \hat{x}$ ) نیز هست) از حل معادله جبری ریکاتی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \bar{P}(\theta) = & A(\theta)\bar{P}(\theta)A^T(\theta) + R_1(\theta) \\ & - [A(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) \\ & + R_{12}(\theta)][C(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) \\ & + R_2(\theta)]^{-1}[A(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) \\ & + R_{12}(\theta)]^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{P}(\theta) = \bar{E} \{ (x(t) - \hat{x}(t, \theta))(x(t) - \hat{x}(t, \theta))^T \}$$

اما برای این که بتوان سیستم ساخته شده را با سیستم اصلی قیاس کرد، خروجی‌هایشان را با هم یکسان قرار می‌دهیم:

$$y(t) - C(\theta)\hat{x}(t, \theta) = C(\theta)[x(t) - \hat{x}(t, \theta)] + v(t) \quad (17)$$

و بنابراین سیستم تخمینگر به صورت زیر خواهد بود:

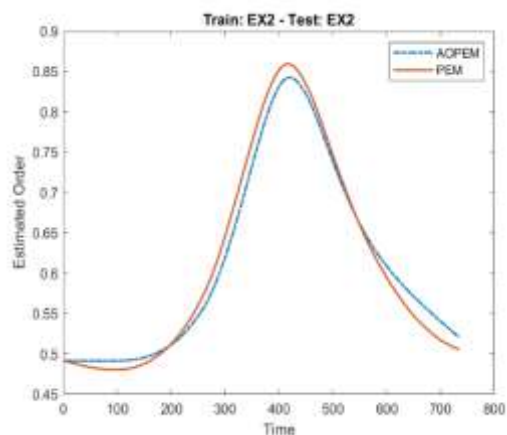
$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1, \theta) = & A(\theta)\hat{x}(t, \theta) + B(\theta)u(t) + K(\theta)e(t) \\ y(t) = & C(\theta)\hat{x}(t, \theta) + e(t) \end{aligned} \quad (18)$$

که  $e = y - C\hat{x}$  اگر سیستم اصلی نویزی باشد،  $e$  نیز از جنس نویز است.

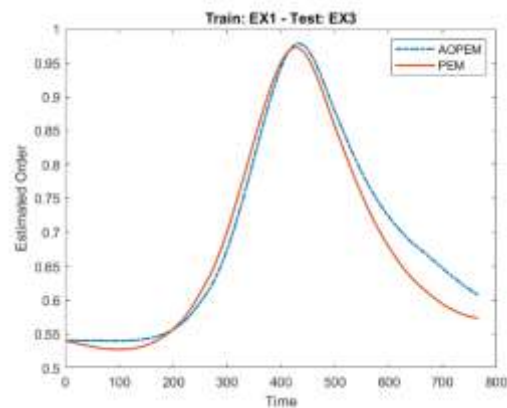
### ۳- فرآیند تشخیص

در این بخش که بخش اصلی مقاله به شمار می‌رود، سیگنال‌های تنش و کرنش آزمایش‌های مختلف به شبکه PEM که توضیحات آن در بخش قبل ارائه شد، تحویل می‌شود. خروجی این شبکه نیز سیگنال مرتبه کسری به عنوان تابعی از زمان است که قبلاً توسط AOPEM بدست آمده است. لازم به یادآوری است که سیگنال مرتبه کسری از مدل (۲) قابل اندازه‌گیری نیست و باید توسط الگوریتمی تخمین زده شود. AOPEM الگوریتم تخمین است که اثبات همگرایی آن در [۱۳] ارائه شده است. به همین دلیل خروجی این الگوریتم، در این مقاله به عنوان خروجی شبکه PEM در نظر گرفته شده است. در ادامه سعی داریم این فرضیه که مرتبه کسری تابع معنی‌داری از زوج تنش-کرنش در هر لحظه می‌باشد را تصدیق نماییم.

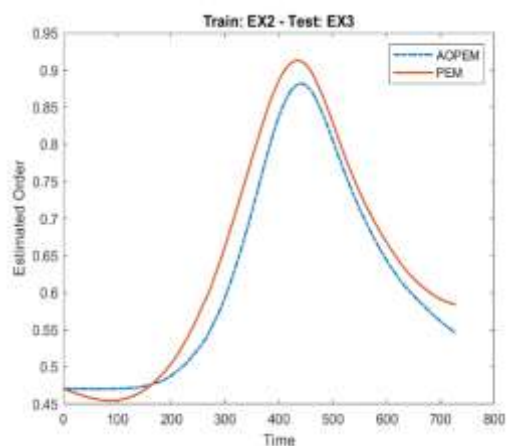
نتایج حاصل از آموزش شبکه در شکل‌های شماره (۴)، (۹) و (۱۴) نمایش داده شده است. با در نظر گرفتن داده‌های آزمایش شماره ۱ به عنوان داده‌های آموزش و داده‌های آزمایش شماره ۲ به عنوان داده‌های تست، روش بیان شده در بخش نخست اجرا شده و نتایج حاصل از آن در شکل شماره (۵) مشخص شده است. نتایج حاصل از انتخاب



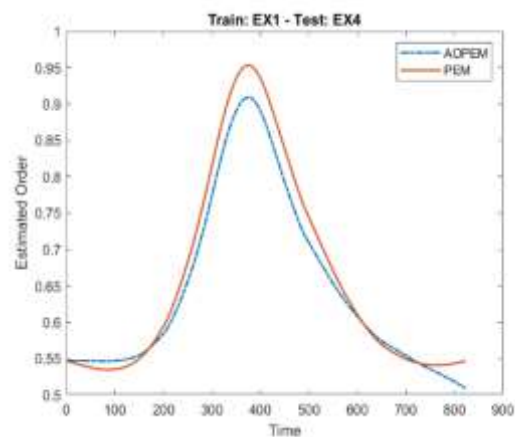
شکل ۹- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۲)



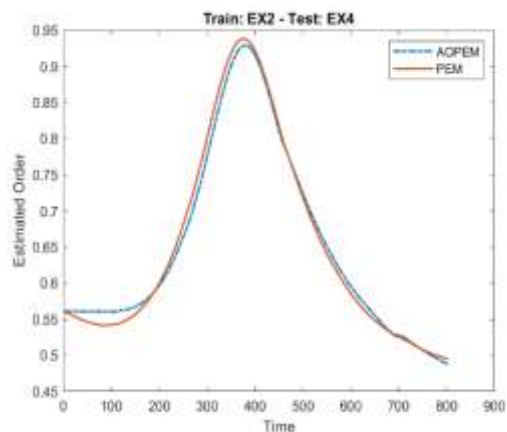
شکل ۶- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۱ و تست با آزمایش شماره ۳)



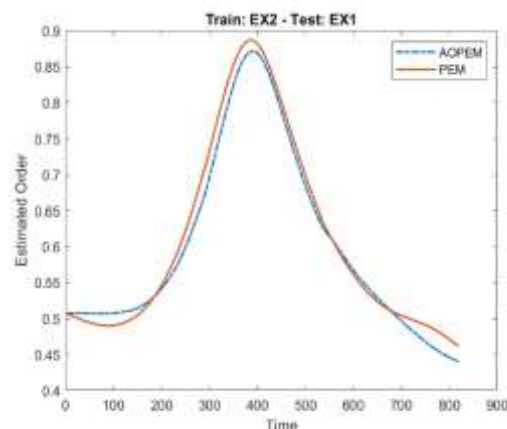
شکل ۱۰- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۲ و تست با آزمایش شماره ۳)



شکل ۷- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۱ و تست با آزمایش شماره ۴)

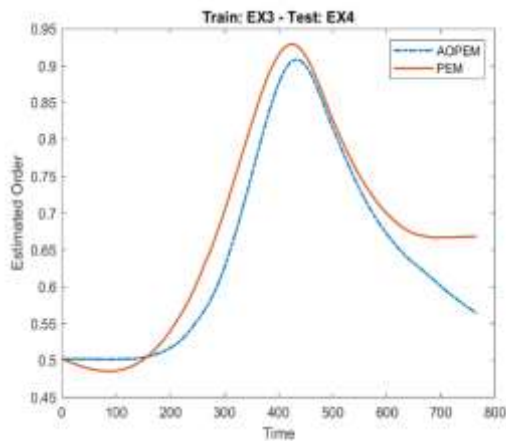


شکل ۱۱- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۲ و تست با آزمایش شماره ۴)



شکل ۸- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۲ و تست با آزمایش شماره ۱)





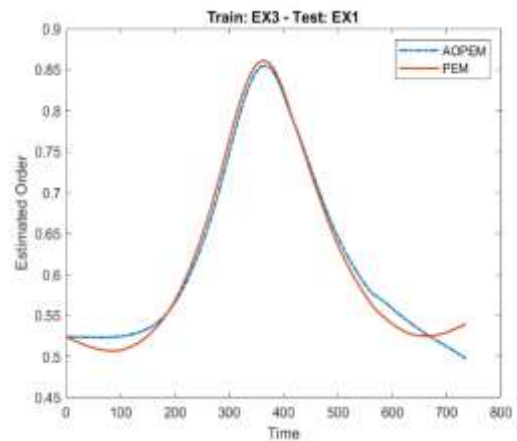
شکل ۱۵- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۳ و تست با آزمایش شماره ۴)

جدول ۱- ماتریس‌های حاصل از شناسایی و خطای آموزش

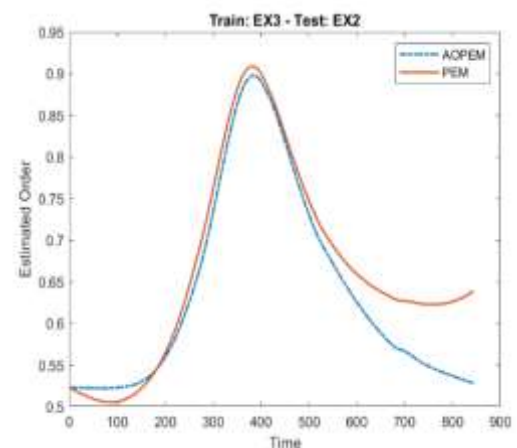
درصد خطای نسبی	ماتریس‌ها	شماره آزمایش
۲/۳۴۷۷	$A = \begin{bmatrix} -2/3 & -5/5 \\ 1/4 & 8/5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/1 & 2/3 \\ 0 & -4/4 \end{bmatrix}$ $C = [-9/3 \ 0/4], K = \begin{bmatrix} 11/4 \\ -8/6 \end{bmatrix}$	۱
۵/۴۳۹۰	$A = \begin{bmatrix} -1/7 & -4/5 \\ 0/9 & 9/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0/8 & 2/7 \\ -0/3 & -5/1 \end{bmatrix}$ $C = [-10/1 \ 0/2], K = \begin{bmatrix} 12/7 \\ -8/1 \end{bmatrix}$	۲
۱/۰۸۶۵	$A = \begin{bmatrix} -3 & -5/4 \\ 1 & 7/9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0/9 & 2/1 \\ -0/2 & -5/1 \end{bmatrix}$ $C = [-10/3 \ 0/4], K = \begin{bmatrix} 11/1 \\ -8/4 \end{bmatrix}$	۳
۲/۰۹۸۵	$A = \begin{bmatrix} -2/1 & -5/9 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/4 \\ -0/1 & -4/2 \end{bmatrix}$ $C = [-9/5 \ 0], K = \begin{bmatrix} 11/2 \\ -8/8 \end{bmatrix}$	۴

در جدول ۱ ماتریس‌های محاسبه شده توسط روش PEM در ۴ حالت استفاده از هر یک از آزمایش‌های چهارگانه برای آموزش و خطای آموزش سیستم تخمین نشان داده شده است.

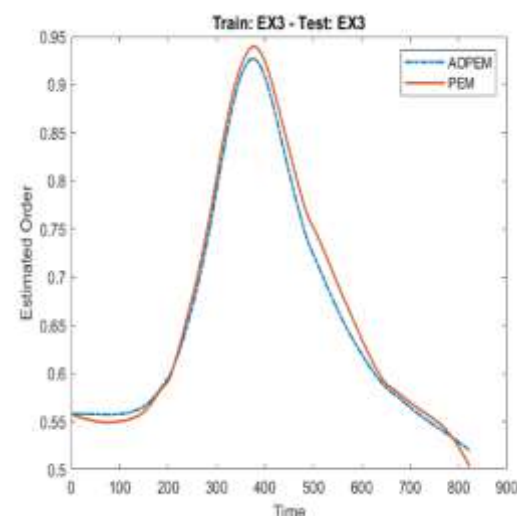
مشاهده می‌شود که در هر چهار حالت خطای نسبی اندک کمتر از ۱۱ درصد است و نیز حدود تغییرات درایه‌های ماتریس‌های متناظر کم است. برای تصدیق این مطلب با در نظر گرفتن آزمایش ۱ به عنوان مرجع، در جدول شماره ۲ خطای نسبی تغییرات تُرم هر ماتریس نسبت به ماتریس‌های حاصل از آزمایش ۱ آمده است. این جدول نشان می‌دهد که خطا زیاد نیست و به عبارتی این طور نیست که استفاده از هر آزمایش برای شناسایی به سیستمی با فاصله زیاد از سیستم مبنای منجر شود. در واقع این جدول



شکل ۱۲- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۳ و تست با آزمایش شماره ۱)



شکل ۱۳- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۳ و تست با آزمایش شماره ۲)



شکل ۱۴- مرتبه کسری تخمین زده شده توسط PEM و AOPEM (آموزش با آزمایش شماره ۳)

را تصدیق می‌کند و نشان می‌دهد که رویکرد مورد استفاده در این مقاله می‌تواند جهت مدلسازی و تخمین مرتبه به عنوان خروجی سیستمی که ورودی آن تنش و کرنش لحظه‌ای است به کار رود و این مدلسازی به نوبه خود می‌تواند در مدلسازی مواد ویسکوالاستیک و به خصوص بافت نرم در موارد گوناگون مورد استفاده قرار گیرد و جابجایی ماده را پیش بینی نماید.

#### ۴- نتیجه گیری

بحث اصلی این مقاله در مورد مدل مرتبه کسری توصیف کننده رابطه تنش-کرنش بافت نرم یک بعدی بود. به عنوان چالش اصلی مقاله، این فرض که در این مدل، مرتبه کسری تابعی از حالت ماده است (که منظور از حالت ماده مقادیر لحظه‌ای تنش و کرنش آن است)، مورد ارزیابی قرار گرفت. به منظور تخمین و استخراج تابع مفروض بین حالت ماده و مرتبه کسری برای نخستین بار از یک سیستم دینامیکی استفاده شد. بدین ترتیب که ابتدا مقادیر مرتبه که به صورت تابعی از زمان که قبلاً توسط یک روش تطبیقی شناسایی شده بود، به عنوان مبنای لحاظ شد. سپس مدل PEM به عنوان یک روش شناسایی دینامیک در فضای حالت برای شناسایی مورد استفاده قرار گرفت.

در واقع طی فرآیند شناسایی دینامیکی مرتبه به عنوان تابعی از حالت ماده، برای تخمین تابع صریح مرتبه کسری، آرگومان زمان از ورودی (سیگنال‌های تنش و کرنش) و خروجی (سیگنال مرتبه کسری) مدل خود به خود حذف شد. با توجه به این موضوع که رویکرد پیشنهادی با دقت بالایی به شناسایی سیستم منجر شد می‌توان این رویکرد را در کاربردهایی مانند جراحی، تزریق سوزن یا کاشت دانه رادیو اکتیو استفاده کرد و از آن طریق به تخمین لحظه‌ای مرتبه پرداخت و پس از آن جابجایی لحظه‌ای بافت نرم را پیش بینی نمود. این پیش بینی پویا باعث می‌شود که عملیات با دقت بیشتری انجام گیرد.

نشان می‌دهد که مقادیر ماتریس‌ها در حد کمی وابسته به انتخاب داده‌های آموزش است. این یعنی که ارتباط بین ورودی و خروجی در واقع وجود دارد و شناسایی دچار فرابرازش<sup>۱</sup> نیست.

جدول ۲- خطای نسبی تغییرات ماتریس‌های شناسایی شده نسبت به ماتریس‌های حاصل از آزمایش ۱

شماره آزمایش	A	B	C	K
۲	۱۱/۹۸	۱۶/۳۶	۸/۸۶	۹/۷۵
۳	۸/۲۱	۱۵/۴۳	۱۰/۷۴	۱/۵۲
۴	۴/۵۱	۴/۶۱	۴/۸۰	۱/۹۸

جدول زیر خطای ارزیابی شناسایی را وقتی که سیستم شناسایی شده با استفاده از یکی از آزمایش‌های ۱ تا ۴ به دست آمده و با دیگری مورد ارزیابی قرار گرفته است، نشان می‌دهد.

جدول ۳- خطای ارزیابی

شماره داده آموزشی	شماره داده ارزیابی	درصد خطای نسبی
۱	۲	۵/۴۲۲۶
	۳	۸/۵۱۱۲
	۴	۲/۰۰۴۶
۲	۱	۹/۸۴۳۷
	۳	۱/۳۲۷۹
	۴	۵/۷۱۳۰
۳	۱	۶/۶۵۵۵
	۲	۱/۴۱۹۹
	۴	۹/۲۸۹۰

می‌بینیم که خطای ارزیابی نیز کمتر از ۱۵ درصد و باز هم قابل قبول است و هر زوجی که برای آموزش و ارزیابی لحاظ کنیم به تخمین خوبی می‌رسیم. این روند در واقع فرضیه مورد بررسی در این مقاله و کیفیت روش شناسایی

## مراجع

- [۱] فرهاد طالبی، رحیم یار هریس، داوود اسدیان، "بررسی شرایط دمایی یک بافت زنده به منظور تشخیص تومورهای سرطانی"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۲، شماره ۱۶، ۱۳۸۷.
- [۲] میلاد مهدیان، علیرضا سیف زاده، علی مختاریان، فریده درودگر، "مشخصه یابی قرنیه انسان با بکار بردن مدل ناهمسانگرد تقویت شده با فیبر توسط روش اجزاء محدود معکوس"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۹، شماره ۶۵، تابستان ۱۴۰۰.

<sup>۱</sup> Over-fitting

- [3] Ates, Mutlu, and Yigit Akin. "Robotic bilateral partial adrenalectomy." *World Journal of Urology* (2021): 1-3.
- [4] N. Abolhassani, M. Moallem, "Needle insertion into soft tissue: A survey", *Medical Engineering & Physics*, Vol.29,2000, pp.413-431.
- [5] R. Alterovitz, et al., "Needle insertion and radioactive seed implantation in human tissues: Simulation and sensitivity analysis", In *Robotics and Automation, Proceedings. ICRA03, IEEE International Conference on*, Vol. 2, 2003, pp. 1793-1799
- [6] S. Telera, Laura Raus, Valerio Pipola, Federico De Iure, and Alessandro Gasbarrini. "Innovative Brachytherapy Techniques and Radiofrequency Ablation." In *Vertebral Body Augmentation, Vertebroplasty and Kyphoplasty in Spine Surgery*, pp. 211-230. Springer, Cham, 2021.
- [7] P. Andrikakou, K. Vickraman, H. Arora, "On the behavior of lung tissue under tension and compression", *Scientific reports*, Vol.6, 2016.
- [8] Z. Dai, "A model of lung parenchyma stress relaxation using fractional viscoelasticity", *Medical engineering & physics*, Vol.8, No.37, 2015, pp.752-758.
- [9] A. Emamian, Farzaneh Aghajani, Farzaneh Safshekan, and Mohammad Tafazzoli-Shadpour. "Nonlinear viscoelastic properties of human dentin under uniaxial tension." *Dental Materials* 37, no. 2 (2021): e59-e68.
- [10] A. Capilnasiu, Lynne Bilston, Ralph Sinkus, and David Nordsletten. "Nonlinear viscoelastic constitutive model for bovine liver tissue." *Biomechanics and modeling in mechanobiology* (2020): 1-22.
- [۱۱] روح اله زنگانه، علیرضا کرامت، احمد احمدی، "تاثیر مشخصات تکیه گاه ویسکوالاستیک مدلسازی شده با مدل جامع کلوین-ویت بر ارتعاش محوری میله"، نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره ۱۳، شماره ۴۱، تابستان ۱۳۹۴، صفحه ۹۳-۱۱۱.
- [۱۲] محمد رضا سلطانی صدرآبادی، بهمن وحیدی، روزبه ریاضی، "تحلیل جریان خون در حلقه‌ی ویلیس مغزی با استفاده از تصاویر سی تی اسکن و روش برهمکنش سیال-سازه"، نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره ۱۷، شماره ۷، ۱۳۹۸، صفحه ۲۸۵-۲۹۴.
- [13] S.S. Tabatabaei, A. Talebi, M. Tavakoli, "A novel adaptive order/parameter identification method for variable order systems application in viscoelastic soft tissue modeling", *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol.102, 2017, pp. 447-455.
- [14] A. Kilbas, S. Marzan, "Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions", *Differential Equations*, Vol.41, No.1, 2005, pp.84-89.
- [15] F. Ericson, and Jan-Åke Schweitz. "Mechanical properties of materials in microstructure technology." In *Handbook of Micro/Nano Tribology*, pp. 765-798. CRC Press, 2020.
- [16] S.S. Tabatabaei, et al, "An Adaptive Order/State Estimator for Linear Systems with Non-integer Time-Varying Order", *Automatica (A Journal of IFAC)*, Vol.84, 2017, pp.1-9.
- [17] Z. W. Fang, Hai-Wei Sun, and Hong Wang. "A fast method for variable-order Caputo fractional derivative with applications to time-fractional diffusion equations." *Computers & Mathematics with Applications* 80, no. 5 (2020): 1443-1458.
- [18] S.S. Tabatabaei, et al, "Non-integer Variable Order Dynamic Modeling and Identification of Soft Tissue Deformation", *American Control Conference*, Seattle, 2017.
- [19] R. Segev and Marcelo Epstein, eds. *Geometric Continuum Mechanics*. Vol. 42. Springer Nature, 2020.
- [۲۰] سید سپهر طباطبائی، مهدی توکلی، حیدرعلی طالبی، "استفاده از شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک در تشخیص مرتبه ناصحیح بافت نرم"، کنفرانس ملی سیستم های هوشمند و محاسبات سریع، ۱۳۹۹، صفحه ۱-۱۰.