

بررسی ناپایداری و چین خوردگی در خمش قطاع استوانه با روش دلبیوکیبی

علیرضا هادی پور^۱، مرتضی سنجرانی پور^{۲*}

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>خمش یکی از حالت‌های تغییر شکل سازه‌های خمیده الاستیکی در مهندسی است که در علوم و طبیعت وجود دارد. در این مقاله خمش قطاع یک لوله استوانه‌ای باز به یک استوانه کامل مورد مطالعه قرار می‌گیرد که در سطح داخلی قطاع استوانه چین خوردگی‌های دامنه کوتاه ایجاد می‌شود. در این مقاله مسئله مقدار ویژه خمش قطاع استوانه‌ای برای ماده‌ای فوق الاستیک، تراکم‌ناپذیر، همگن و همسانگرد مدل‌بندی شده است و ناپایداری آن را برای تابع انرژی مونی‌ریولین به کمک نظریه تغییر شکل نموی (افزوده شده) و روش تحلیلی دلبیوکیبی بررسی می‌کنیم. مقادیر ویژه این مسئله از روش تحلیلی دلبیوکیبی باتوجه به شرایط مرزی و شرط خمش تعیین می‌شوند، این نتایج مجانبی به دست آمده از روش دلبیوکیبی نشان می‌دهند که شرط خمش به نسبت شعاع‌های داخلی بعد و قبل از تغییر شکل، زاویه قطاع استوانه‌ای قبل و بعد از تغییر شکل، عدد مد محیطی (تعداد چین‌خوردگی‌های سطح داخلی قطاع استوانه‌ای) و ضخامت قطاع وابسته است. روند تغییرات و وابستگی این پارامترهای هندسی با رسم نمودارها مورد بررسی قرار می‌گیرد.</p>	<p>نوع مقاله: پژوهشی دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۲۵ بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۰۴ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۱۱</p>
	<p>واژگان کلیدی: خمش، ناپایداری، روش دلبیوکیبی، الاستیسیته غیرخطی، روش کامپوند ماتریس.</p>

مقدمه

پایداری خمش به یک استوانه کامل کمتر بحث شده است [۸]. محققانی که مایل به مدل‌سازی تنش‌های پسماند در بافت‌های نرم لوله‌ای شکل هستند، اغلب از روش به اصطلاح زاویه باز شدن استفاده می‌کنند که در آن خم شدن قطاع استوانه‌ای و تبدیل آن به یک استوانه کامل موجب تنش‌های پسماند می‌گردد [۹]. از لحاظ ریاضی برای مسائل ریاضی مربوط به خمش‌های بزرگ قطاع استوانه الاستیکی غیرخطی، همسانگرد و تراکم‌ناپذیر جواب دقیق توسط ریولین [۱۰] ارائه گردیده است. در مدل‌سازی مهندسی بررسی تنش، خمش، کمانش و حل مسائل ریاضی مربوط به آنها با روش‌های تحلیلی به دلیل دقت بالاتر از اهمیت خاصی برخوردار است، البته روش‌های تقریبی و عددی ابزارهای مفیدی هستند که بسیار رایج است [۱۱-۱۵]. مدل‌سازی اجسام الاستیک تراکم‌ناپذیر تحت تغییر شکل های بزرگ منجر به مسائل مقدار ویژه خاصی می‌شود، برای

از آنجایی که مواد الاستیکی تغییر شکل‌های بزرگ را متحمل می‌شوند و با توجه به کاربردهای بیولوژیکی خمش‌های بزرگ، مطالعه و بررسی این موضوع مورد توجه افراد زیادی قرار گرفته است، به عنوان مثال رودیخ و بويس [۱] خمش‌های بزرگ بر بدن یک نمونه ماهی که ساختار چندلایه دارد را مورد مطالعه قرار داده‌اند. همچنین سیگاورا و همکاران [۲] با الهام از شاهرگ‌های قلب، خمش، خمش بدون بار و خمش معکوس قطاع‌های نرم را مطرح کردند، جینگ و همکاران [۳] بهبود عملکرد خمش محرک‌های ساخته شده از مواد سیلیکونی را بررسی کردند و یک ساختار هفت لایه سیلیکونی با سختی‌های متفاوت را پیشنهاد کردند، در سال‌های اخیر مطالعاتی درباره خمش بلوک مستطیلی به قطاع استوانه‌ای با چین‌خوردگی در سطح داخلی آن صورت گرفته است [۴-۷] اما در مورد

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: sanjarani@math.usb.ac.ir

۱. دانشجوی دکترای ریاضی، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

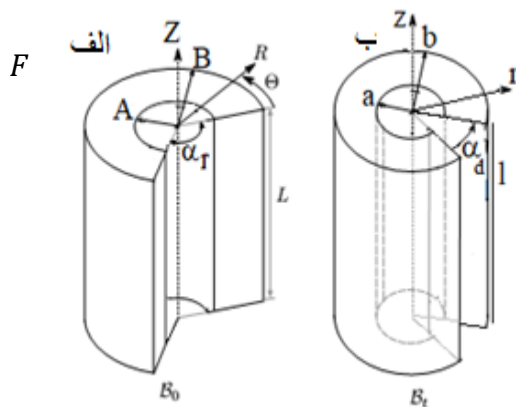
۲. دانشیار، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

$$r = r(R), \quad \theta = k \theta, \quad z = \lambda_z Z, \quad (2)$$

با فرض $k > 1$ ، این قطاع استوانه‌ای به یک قطاع استوانه‌ای بسته‌تر به طول l تبدیل می‌گردد (شکل) که $\lambda_z = \frac{l}{L}$ کشش محوری، $k = \frac{\alpha_r}{\alpha_d}$ تغییرات زاویه و $2\alpha_d$ زاویه تغییر شکل یافته قطاع استوانه‌ای را نشان می‌دهد. در این هیئت جاری B_t ، مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) با پایه‌های نرمال (e_r, e_θ, e_z) می‌باشد و قطاع استوانه‌ای تغییر شکل یافته فرم هندسی زیر را دارد:

$$a \leq r \leq b, \quad -\alpha_d \leq \theta \leq \alpha_d, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (3)$$

که $a = r(A)$ و $b = r(B)$ به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی استوانه هستند. تانسور گرادیان تغییر شکل خمش برای این مقطع به صورت زیر بیان می‌گردد:



شکل (۱-الف) پیکربندی قطاع استوانه‌ای قبل از تغییر شکل، (ب) پیکربندی قطاع استوانه‌ای بعد از تغییر شکل. مقادیر اصلی تانسور کشش (جزر مقادیر ویژه F^{FT}) عبارتند از:

$$\lambda_1 = \lambda_r = \frac{R}{k \lambda_z r}, \quad \lambda_2 = \lambda_\theta = \frac{k r}{R}, \quad \lambda_3 = \lambda_z. \quad (5)$$

شرط تراکم‌ناپذیری $det F = 1$ می‌باشد که با توجه به این شرط به راحتی معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{R^2 - A^2}{k \lambda_z}}, \quad b = \sqrt{a^2 + \frac{B^2 - A^2}{k \lambda_z}}, \quad (6)$$

باتوجه به معادلات بالا و میدان تغییر شکل به دنبال به‌دست‌آوردن نیروها و گشتاورهای مورد نیاز این تغییر شکل و معادلات تعادل هستیم. از آنجایی که تغییر شکل

حل این‌گونه از مسائل از روش‌های آشفتگی استفاده می‌شود. در گذشته روش‌های آشفتگی مختلف (در حالت خاص، روش دلبیوکیبی) به طور گسترده برای حل مسائل پایداری سیالات و ضمناً مکانیک کوانتوم و ... بکار برده شده است، اما محققین زیادی پس از سال‌های ۱۹۹۵ این روش جالب را روی مسائل الاستیسته محدود نیز بکار برده و نتایج بسیار خوبی به دست آورده‌اند. مثلاً فو [۱۶] نشان داد که روش مجانبی دلبیوکیبی را می‌توان بر روی مسئله آنالیز پایداری پوسته کروی، با ضخامت دلخواه، نیز بکار برد. از جمله کسانی که از این روش مجانبی استفاده کرده‌اند: فو و سنجرانی‌پور [۱۷] و فو و لین [۱۸] به ترتیب استوانه پشت‌ورو شده از جنس وارگا و نئوهاکین، سنجرانی‌پور [۱۹-۲۰] استوانه تحت فشار خارجی از جنس وارگا و نئوهاکین، عبدالعلیان و سنجرانی‌پور [۲۱] کره پشت‌ورو شده از جنس وارگا، سنجرانی‌پور و همکاران [۲۲] خمش مکعب از جنس نئوهاکین و وارگا را به کمک این روش مجانبی مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این مقاله قصد داریم به بررسی پایداری خمش قطاع استوانه‌ای به استوانه کامل و مطالعه چین‌خوردگی‌های سطح داخلی آن بپردازیم، برای این منظور ابتدا به مدل‌سازی آن پرداخته که مسئله‌ای مقدار ویژه شامل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم و شرایط مرزی مرتبط با آن به دست می‌آید؛ سپس با اعمال روش عددی کامپوند ماتریس (برای اعداد مد کوچک) و برای اولین بار با استفاده از روش دلبیوکیبی (برای اعداد مد بزرگ) مقادیر ویژه این مسئله را با نرم‌افزار متمتیکا محاسبه می‌شوند.

تعریف مسئله

قطاع استوانه‌ای الاستیک، همسانگرد، تراکم‌ناپذیری در نظر گرفته شده است که فرم هندسی آن بر حسب مختصات قطبی استوانه‌ای (R, θ, Z) در هیات مرجع B_0 با پایه‌های نرمال (E_R, E_θ, E_Z) به صورت:

$$A \leq R \leq B, \quad -\alpha_r \leq \theta \leq \alpha_r, \quad 0 \leq Z \leq L, \quad (1)$$

است که A و B به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی و L طول قطاع استوانه‌ای قبل از تغییر شکل هستند، $2\alpha_r$ زاویه تغییر شکل نیافته قطاع استوانه‌ای است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، B به عنوان مقیاس همه متغیرها و پارامترهای طولی در نظر گرفته شده و میدان تغییر شکل آن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۱- ایجاد چین و چروک در خمش قطاع استوانه

که در آن p ضریب لاگرانژ حاصل از فشار ماده تراکم پذیر است و معادلات تعادل در غیاب نیروهای حجمی عبارت‌اند از:

$$\text{div} \mathbf{S} = 0 \quad (11)$$

در اینجا عملگر دیورژانس نسبت به هیئت مرجع است، لازم به ذکر است رابطه بین تانسور نومینال و کوشی $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ است. اگر $\dot{\mathbf{X}} = u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta$ یک جابجایی کوچکی در هیئت مرجع باشد در این صورت تانسور تنش نموی به شکل زیر است:

$$\dot{\mathbf{S}}_0 = \mathbf{B}_0 \dot{\mathbf{F}} + p \dot{\mathbf{F}} - \dot{p} \mathbf{F}^{-1} \quad (12)$$

که در آن $\dot{\mathbf{F}}$ و \dot{p} نمو‌هایی از \mathbf{F} و p می‌باشند و $\mathbf{B}_0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}$ تانسور مرتبه چهارم مدول‌های الاستیکی می‌باشد و معادلات تعادل در فرم نموی $\text{div}(\dot{\mathbf{S}}_0) = 0$ است. فرض کنید \mathbf{X} میدان جابجایی از هیئت مرجع \mathbf{B}_0 به هیئت جاری \mathbf{B}_t باشد، در غیاب نیروهای حجمی، معادلات تعادل نموی در فرم اویلر به صورت:

$$\text{div}(\dot{\mathbf{S}}) = 0, \quad (13)$$

که $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} + p\boldsymbol{\Gamma} - \dot{p}\mathbf{I}$ ، تانسور تنش نموی، \dot{p} نموی از p ، \mathbf{B} مدول الاستیک مرتبه اول و $\boldsymbol{\Gamma}$ تانسور گرادیان جابجایی نموی به فرم زیر است:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} u_r & \frac{u_\theta - v}{r} & 0 \\ v_r & \frac{v_\theta + u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۲۳] مراجعه کرد. به دلیل تراکم‌ناپذیر بودن ماده داریم:

متقارن و کشش‌های اصلی مستقل از θ و z هستند، معادلات تعادل کوشی به معادله زیر تقلیل می‌یابد:

$$\frac{d}{dr} \sigma_{rr} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad (7)$$

که $i = r, \theta, z$ تنش‌های کوشی $\sigma_{ii} = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p$ اصلی و p تنش هیدروستاتیک وارد شده به ماده می‌باشد که در نتیجه شرط تراکم‌ناپذیری است. تابع انرژی کرنشی برای مواد موونی-ریولین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{C}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \frac{D}{2} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3), \quad (8)$$

که C و D ثابت‌های مادی هستند. با فرض اینکه سطوح داخلی و خارجی قطاع استوانه‌ای بدون تنش است، شرایط مرزی به صورت $\sigma_{rr}(a) = \sigma_{rr}(b) = 0$ خواهیم داشت. برای راحتی محاسبات و بی بعد سازی معادلات از تغییر متغیر $\lambda = \frac{k r \sqrt{\lambda_z}}{R}$ استفاده می‌شود. با انتگرال‌گیری از معادله تعادل (۷) و استفاده از شرایط مرزی مسئله رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{k} \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{\rho^2 \lambda_a^2 + k(1-\rho^2)}}{\lambda_a} \right) + \frac{(1-\rho^2)(k-\lambda_a^2)}{2 \lambda_a^2 (\rho^2 \lambda_a^2 + k(1-\rho^2))} + \frac{k^2-1}{k} \text{Ln} \rho = 0, \quad (9)$$

که $\rho = \frac{A}{B}$ و $\lambda_a = \frac{k a \sqrt{\lambda_z}}{A}$ هستند. با مشخص بودن مقادیر ρ ، λ_a و α_r به کمک این رابطه می‌توان زاویه تغییر شکل یافته α_d را محاسبه نمود.

معادلات حاکم

چین و چروک‌ها نشان‌دهنده شروع ناپایداری است و اغلب با پیشرفت آن به چین خوردگی می‌انجامد. در خمش قطاع استوانه‌ای تغییر شکل یافته (شکل ۱)، ناپایداری نموی^۱ باعث چین خوردگی در سطح داخلی قطاع استوانه‌ای می‌شود. این بحث با معادلات تعادل نموی^۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد [۲۳]. برای یک ماده الاستیک تراکم‌ناپذیر با تابع انرژی $W(\mathbf{F})$ تانسور نومینال بصورت زیر است:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-1} \quad (10)$$

¹ Incremental instability

² Incremental equilibrium equations

که $m = \frac{n\pi}{\alpha d}$ عددی حقیقی و n عدد مد محیطی (عددی صحیح) است، عدد مد محیطی تعداد چین خوردگی‌های ایجاد شده در سطح داخلی قطاع استوانه‌ای را نشان می‌دهد. با جایگذاری توابع (۱۹) و مدول‌های الاستیکی ماده موونی-ریولین در معادلات تعادل (۱۷) و حذف توابع $G(r)$ و $K(r)$ به کمک شرط تراکم‌ناپذیری (۱۵)، معادله دیفرانسیل مرتبه چهاری به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} & -(\lambda^3 - k\lambda)^4 F^{(4)}(\lambda) - 2\lambda^3(k - 7\lambda^2)(k - \lambda^2)^3 F'''(\lambda) + \lambda^2(k - \lambda^2)^2 (22\lambda^2 - 51\lambda^4 + k^2(3 + m^2(1 + \lambda^4))) F''(\lambda) + \lambda(\lambda^2 - k) (39k\lambda^4 - 45\lambda^6 + k^3(3 + m^2(1 - 3\lambda^4))) + k^2\lambda^2(m^2(1 + 5\lambda^4) - 1) F'(\lambda) - k^3(m^2 - 1)(k(3 + m^2\lambda^4) - 4\lambda^2) F(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

به همین ترتیب شرایط مرزی (۱۵) در $\lambda = \lambda_a, \lambda_b$ به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} & k^2(m^2 - 1)F(\lambda) + \lambda(k^2 - 4k\lambda^2 + 3\lambda^4)F'(\lambda) - \lambda(\lambda^2 - k)F''(\lambda) = 0, \\ & k^2(m^2 - 1)(k - 2\lambda^2)F(\lambda) + \lambda(k - \lambda^2)(7k\lambda^2 - 9\lambda^4 + k^2(1 + m^2(2 + \lambda^4))) F'(\lambda) + (7\lambda^2 - 2k)(k\lambda - \lambda^3)^2 F''(\lambda) - (k\lambda - \lambda^3)^3 F'''(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

در محاسبه معادله دیفرانسیل مرتبه چهار (۲۰) و شرایط مرزی (۲۱)، از تغییر متغیر $\lambda = \frac{k r \sqrt{\lambda_z}}{R}$ استفاده شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود، ثابت‌های مادی C و D حذف شده‌اند. در بخش بعد، مقادیر ویژه این مسئله مقدار ویژه به کمک روش مجانبی دلبیوکیبی بدست می‌آیند.

اعمال روش مجانبی دلبیوکیبی

در مدل‌سازی اجسام تحت تغییر شکل‌های بزرگ مانند استوانه و کره تحت فشار خارجی و داخلی، مسائل مقدار ویژه‌ای حاصل می‌شود که شامل معادله دیفرانسیل مرتبه چهار یا دستگامی از معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی خواهند بود. برای حل این نوع از مسائل مقدار ویژه می‌توانیم از روش دلبیوکیبی (ونتزل، کرامر، بریلوین) که

$$tr(\Gamma) = u_r + \frac{1}{r}(u + v_\theta) = 0. \quad (15)$$

با فرض اینکه هیچ کشش سطحی روی سطوح جانبی قطاع استوانه‌ای وجود ندارد، شرایط مرزی نمودی به صورت

$$\dot{S} \mathbf{n} = 0, \quad (r = a, b) \quad (16)$$

نوشته می‌شود که \mathbf{n} بردار نرمال واحد به سمت خارج است. از آنجایی که حالت دوبعدی مسئله در نظر گرفته شده است و بردارهای جابه‌جایی مستقل از Z هستند؛ با جای‌گذاری تانسورهای تنش نمودی (\dot{S}) و مولفه‌های تانسورگرادیان جابه‌جایی (Γ) در معادلات تعادل نمودی (۱۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r = & (r\dot{B}_{1111} + B_{1111} + r\dot{B}_{1212} - B_{2121} - B_{1212})\frac{u_r}{r} + (r\dot{B}_{1122} - B_{2222})\frac{u}{r^2} + (r\dot{B}_{1122} - B_{2222} - B_{2121})\frac{v_\theta}{r^2} + (B_{2112} - B_{1122})\frac{v_{r\theta}}{r} + (rB_{1122} - B_{2222})\frac{u}{r^2} + B_{2121}\frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + B_{1111}u_{rr}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta = & (r\dot{B}_{1212} + B_{1212})v_r + (r\dot{B}_{2112} - B_{1111} + B_{1122} + B_{2222} + B_{2112})\frac{u_\theta}{r} + (B_{1122} + B_{2112})u_{r\theta} - (r\dot{B}_{2112} - B_{1111} + B_{1122} + B_{2222} + B_{2112})\frac{v}{r} + B_{2222}\frac{v_{\theta\theta}}{r} + rB_{1212}v_{rr} - (r\dot{B}_{2112} - B_{1111} + B_{1122} + B_{2222} + B_{2112})\frac{v}{r} + B_{2222}\frac{v_{\theta\theta}}{r} + rB_{1212}v_{rr}, \end{aligned}$$

به همین ترتیب، شرایط مرزی (۱۶) در $r = a, b$ به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} & (B_{1111} + p)u_r + B_{1122}\frac{v_\theta + u}{r} + pu_r - \dot{p} = 0, \\ & B_{1212}v_r + (B_{2112} + p)\frac{u_\theta - v}{r} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

باتوجه به اینکه به دنبال جواب‌های تفکیک‌پذیر نسبت به θ و r هستیم، توابع جابه‌جایی بدین صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u &= F(r)\cos(m\theta), \\ v &= G(r)\sin(m\theta), \\ \dot{p} &= K(r)\cos(m\theta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$F^{(i)}(\lambda) = F_0^{(1)}(\lambda) + \frac{F_1^{(i)}(\lambda)}{n} + \frac{F_2^{(i)}(\lambda)}{n^2} + \dots, \quad (26)$$

$$E^{(i)}(\lambda) = \exp\left(n \int_{\lambda_a}^{\lambda} S^{(i)}(x) dx\right).$$

با جایگذاری جواب عمومی (۲۵) در شرایط مرزی (۲۱) معادله ماتریسی به صورت $\sum_{j=1}^4 Y_{ij} C_j = 0$ نتیجه می‌شود. این معادله ماتریسی در صورتی جواب غیربدیهی دارد که دترمینان ضرایب آن صفر گردد، یعنی $\det(Y_{ij}) = 0$ ، این همان شرط خمش است. به کمک نرم افزار ممتیکا این دترمینان را می‌توان به راحتی بسط داد. این بسط شامل جملات نمایی $E^{(i)}(\lambda)E^{(j)}(\lambda)$ برای $i, j = 1, 2, 3, 4$ می‌باشند. برای قطاع استوانه‌ای دیواره ضخیم جملات نمایی $E^{(1)}(\lambda_b)$ و $E^{(3)}(\lambda_b)$ بطور نمایی بزرگ و جملات نمایی $E^{(2)}(\lambda_b)$ و $E^{(4)}(\lambda_b)$ بطور نمایی کوچک هستند، بنابراین بسط دترمینان را به صورت زیر می‌توان بازنویسی نمود:

$$\frac{\det(Y_{ij})}{E^{(1)}(\lambda_b)E^{(3)}(\lambda_b)} = - \begin{vmatrix} \beta^{(1)}(\lambda_b) & \beta^{(3)}(\lambda_b) \\ \gamma^{(1)}(\lambda_b) & \gamma^{(3)}(\lambda_b) \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{vmatrix} \beta^{(2)}(\lambda_a) & \beta^{(4)}(\lambda_a) \\ \gamma^{(2)}(\lambda_a) & \gamma^{(4)}(\lambda_a) \end{vmatrix}$$

با تقریب و حذف مقادیر به طور نمایی کوچک سمت راست، معادله ماتریسی به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{vmatrix} \beta^{(2)}(\lambda_a) & \beta^{(4)}(\lambda_a) \\ \gamma^{(2)}(\lambda_a) & \gamma^{(4)}(\lambda_a) \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

با بسط دترمینان (۲۸) با استفاده از نرم‌افزار ممتیکا خواهیم داشت:

$$\frac{\pi(1-4\lambda_a^2+2\lambda_a^4+\lambda_a^8)}{\alpha_r^5} + \frac{1}{n} \frac{\pi^4(\alpha_d-\alpha_r\lambda^2)(1+2\lambda_a^2-2\lambda_a^4+2\lambda_a^6+\lambda_a^8)}{\alpha_r^5} + \dots = 0, \quad (29)$$

و با بسط λ_a در جملاتی از $\frac{1}{n}$ و جایگذاری در معادله (۲۹) مقدار ویژه λ_a بدست می‌آید:

بر اساس تحلیل مجانبی پایه‌گذاری شده است [۲۴] استفاده کنیم. در این روش فرم جواب مسئله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(\lambda) = \left(F_0(\lambda) + \frac{1}{n} F_1(\lambda) + \frac{1}{n^2} F_2(\lambda) + \frac{1}{n^3} F_3(\lambda) + \dots \right) \exp\left(n \int_{\lambda_a}^{\lambda} S(x) dx\right), \quad (22)$$

که در آن توابع $F_i(\lambda)$ ها و $S(\lambda)$ مجهول هستند و در ادامه کار تعیین می‌گردند. بدین صورت که بسط (۲۲) در معادله دیفرانسیل مرتبه چهار (۲۰) جایگذاری کرده و بعد از مرتب کردن بر حسب توان‌هایی از n ، معادلاتی برای $S(\lambda)$ و $F_i(\lambda)$ ها به دست می‌آید. از ضریب مرتبه پیشرو n ، معادله مرتبه چهاری بدست می‌آید که چهار جواب مستقل برای $S(\lambda)$ نتیجه می‌شود:

$$S^{(1)}(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda(\alpha_d-\alpha_r\lambda^2)},$$

$$S^{(2)}(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda(\alpha_d-\alpha_r\lambda^2)},$$

$$S^{(3)}(\lambda) = \frac{\pi\lambda}{(\alpha_d-\alpha_r\lambda^2)},$$

$$S^{(4)}(\lambda) = \frac{-\pi\lambda}{(\alpha_d-\alpha_r\lambda^2)}. \quad (23)$$

حال با مساوی صفر قراردادن ضریب مرتبه بعدی n معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی برای $F_0(\lambda)$ حاصل می‌گردد که با حل و ساده‌سازی این معادلات داریم:

$$F_0^{(1)}(\lambda) = F_0^{(2)}(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}}, \quad (24)$$

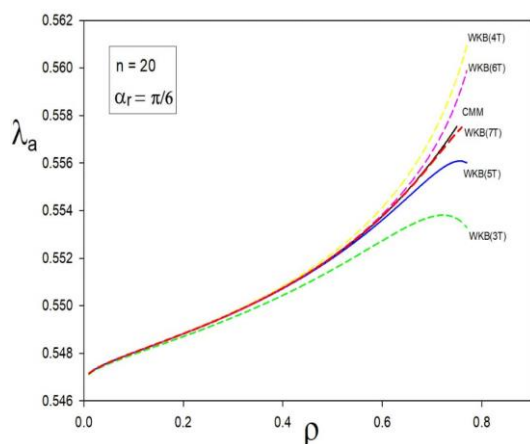
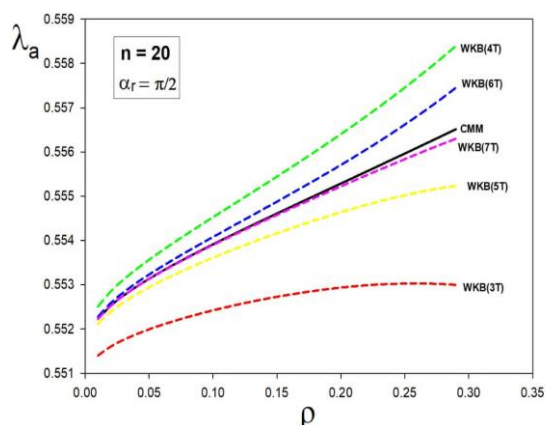
$$F_0^{(3)}(\lambda) = F_0^{(4)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^4}},$$

بالانویس جواب‌ها متناظر با (۲۳) هستند. به همین ترتیب از مرتبه بعدی n ، توابع دیگر $F_i(\lambda)$ به دست می‌آید. به دلیل طولانی بودن معادلات از آوردن آن‌ها در اینجا صرف‌نظر شده است. باتوجه به نتایج به دست آمده، جواب عمومی:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^4 C_i F^{(i)}(\lambda) E^{(i)}(\lambda), \quad (25)$$

در نظر گرفته می‌شود که C_i ها ضرایب دلخواه هستند و

برای n های بزرگ به مقدار 0.544 میل می کند که به کمک بسط مجانبی (۳۰) به راحتی نتیجه می شود.



شکل ۳- تغییرات λ_a نسبت به ρ برای $n=20$ و $\alpha_r = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

در (شکل ۴) تغییرات λ_a و α_d به ازای ρ در بازه (۰،۰۰۷۶۲۵۳) رسم شده است، چون در این بازه α_d کمتر از π می باشد، وقتی ρ به عدد 0.76253 میل می کند، زاویه α_d به مقدار 180 درجه میل می کند. به این ترتیب قطاع استوانه‌ای با ρ در بازه (۱، ۰.۷۶۲۵۳)، به استوانه کاملی تبدیل می شود که هیچ چین خوردگی در سطح داخلی آن وجود ندارد. به همین ترتیب در (شکل ۵) و (شکل ۶) تغییرات λ_a و α_d به ازای ρ به ترتیب در بازه های (۰،۰۰۶۴۵۱۴۹) و (۰،۰۰۳۰۹۰۳) رسم شده اند. با مقایسه (شکل ۴)، (شکل ۵) و (شکل ۶) می توان نتیجه گرفت که نمودار تغییرات λ_a نسبت به ρ برای n های بزرگ روند یکسانی را نشان می دهد، همه منحنی ها صعودی هستند اما برای n های کوچک این هماهنگی وجود ندارد. برای $\alpha_r = \frac{\pi}{6}$ و n های کوچک، تغییرات λ_a نسبت به ρ روند صعودی-نزولی دارد اما برای $\alpha_r = \frac{\pi}{2}$ و n های کوچک، روند نزولی مشاهده می گردد.

$$\lambda_a = 0.543689 + \frac{0.59155 \alpha_d - 0.047046 \alpha_r}{n} - \frac{0.600629 \alpha_d^2 + 0.292771 \alpha_d \alpha_r - 0.005368 \alpha_r^2}{n^2} + \dots$$

(۳۰)

هفت جمله از بسط مقدار ویژه محاسبه شده است که به خاطر طولانی شدن روابط از آوردن آن در اینجا صرف نظر شده است. بسط مجانبی (۳۰) نشان می دهد که مقدار ویژه λ_a به n ، α_r و α_d وابسته است. با قرار دادن بسط (۳۰) در رابطه (۹) بسطی برای α_d بدست می آید که به n ، α_r و ρ بستگی دارد.

تحلیل عددی

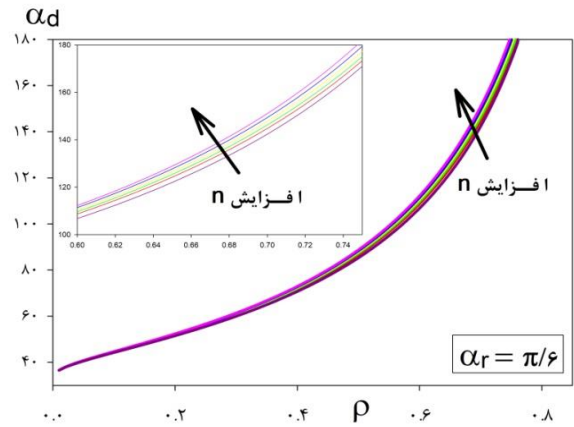
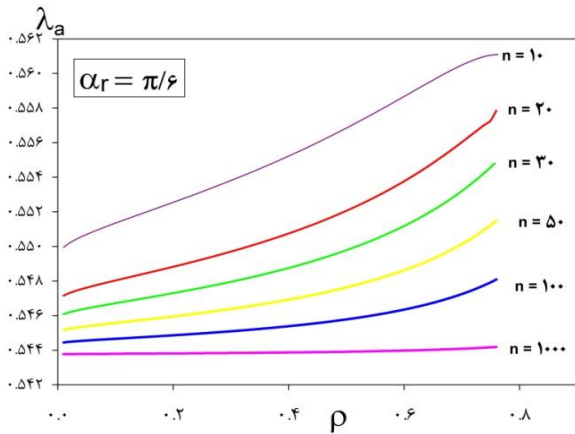
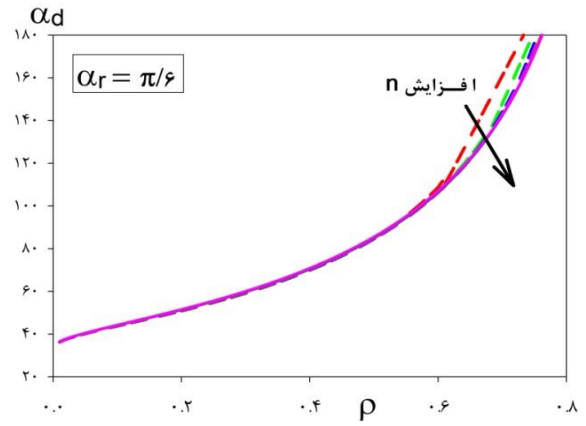
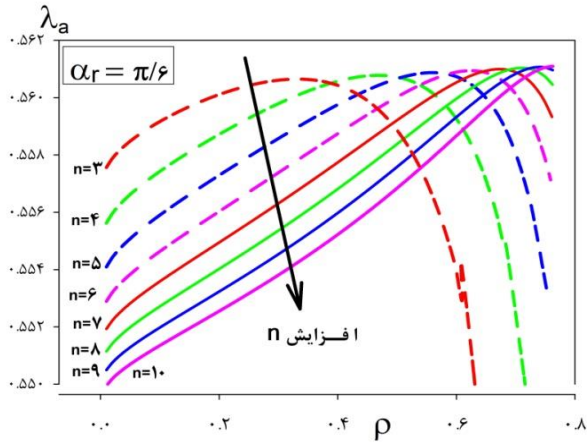
ابتدا دو حالت خاص را در نظر می گیریم حالت اول اینکه اگر قطاع استوانه در حالت مرجع بسیار نازک باشد، در این صورت $\rho = \frac{A}{B}$ به یک میل می کند و با توجه به رابطه (۹)، λ_a مقدار یک را می گیرد و در حالت دوم اگر قطاع استوانه بسیار ضخیم باشد، ρ مقداری نزدیک به صفر گرفته و این باعث می شود که در رابطه (۹) برای λ_a مقدار تقریبی زیر به دست آید:

$$\lambda_a \cong \sqrt{\frac{k}{w_0(e\rho^2(1-k^2))}} \quad (31)$$

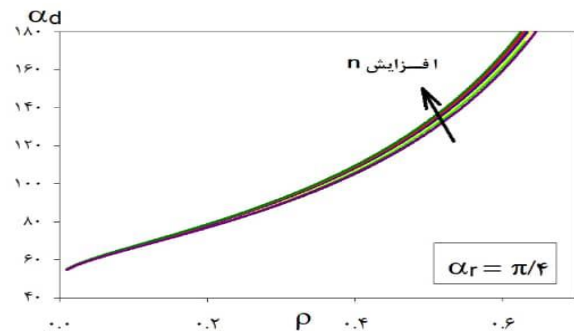
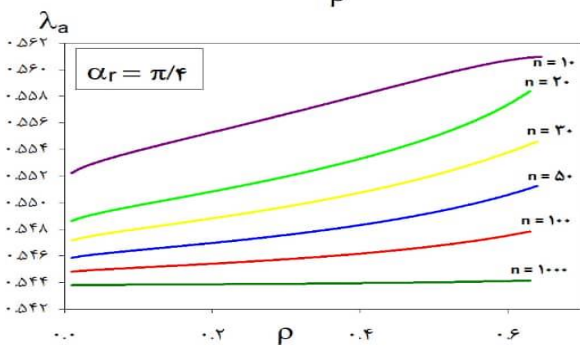
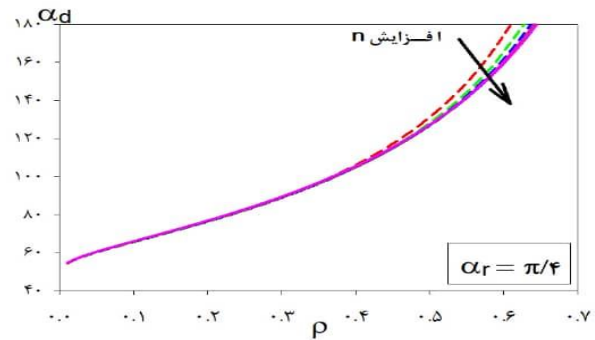
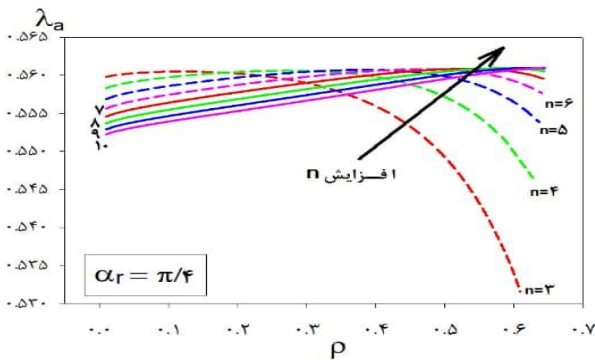
که در آن w_0 شاخه اصلی تابع حقیقی مقدار دلبیو لامبرت است و نشان می دهد با میل کردن ρ به صفر، λ_a نیز به صفر میل می کند. اگر هیچ یک از دو حالت قبل نباشد، نتایج به دست آمده از روش دلبیوکیبی را مورد بحث قرار می دهیم، برای مقایسه بهتر از روش عددی کامپوند ماتریس کمک گرفته ایم.

در (شکل ۳) منحنی های مقادیر ویژه λ_a نسبت به ρ برای $n = 20$ و دو مقدار α_r رسم شده است. منحنی های نقطه چین WKB، نتایج مجانبی بسط (۳۰) با تعداد جملات متفاوت و منحنی CMM نتایج روش عددی کامپوند ماتریس می باشند. نتایج مجانبی و عددی (شکل ۳) نشان می دهند که هرچه تعداد جملات بسط (۳۰) بیشتر باشد، نتایج روش دلبیوکیبی همگرایی بهتری دارند.

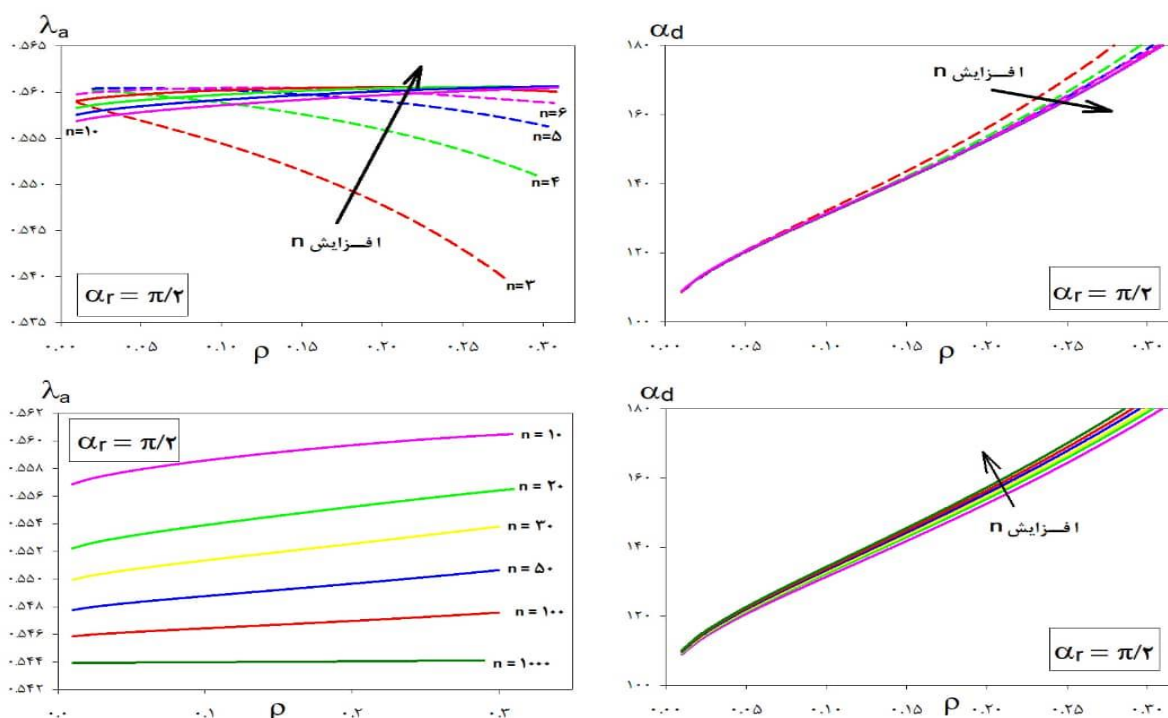
در (شکل ۴)، (شکل ۵) و (شکل ۶) تغییرات λ_a و α_d نسبت به ρ ، برای زاویه های $\alpha_r = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ و n های مختلف که مشخصه تعداد چین خوردگی های لبه داخلی می باشد، رسم شده است. منحنی ها نشان می دهند که مقدار ویژه λ_a



شکل ۴- تغییرات λ_a و α_d نسبت به ρ برای $\alpha_r = \frac{\pi}{6}$ و n های مختلف



شکل ۵- تغییرات λ_a و α_d نسبت به ρ برای $\alpha_r = \frac{\pi}{4}$ و n های مختلف



شکل ۶- تغییرات λ_a و α_d نسبت به ρ برای $\alpha_r = \frac{\pi}{2}$ و n های مختلف

علاوه بر این نتایج نشان می‌دهند که تغییرات λ_a و α_d نسبت به ρ در بازه‌های مختلف معتبر هستند. با توجه به جمله اول روش مجانبی دلبیوکیبی، λ_a مستقل از زاویه اولیه قطاع استوانه‌ای می‌باشد و با افزایش تعداد چین خوردگی‌ها به مقدار ثابتی میل می‌کند و هرچه زاویه اولیه قطاع استوانه‌ای α_r بیشتر باشد، دامنه تغییرات ρ کمتر می‌شود. همچنین روش مجانبی دلبیوکیبی از دقت خوبی برخوردار است به شرط اینکه تعداد جملات بیشتری از بسط مجانبی دلبیوکیبی در نظر گرفته شود و n بزرگ باشد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق خمش قطاع استوانه‌ای باز ابر الاستیک، همسانگرد و تراکم‌ناپذیر از جنس ماده موونی-ریولین به یک استوانه کامل با استفاده از روش مجانبی دلبیوکیبی مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج مجانبی نشان می‌دهند که با کاهش ضخامت قطاع استوانه‌ای ρ ، مقدار α_d افزایش می‌یابد. همچنین تغییرات کشش محیطی λ_a نسبت به ρ ، وقتی تعداد چین خوردگی‌ها کم است روندی نزولی و وقتی تعداد چین خوردگی‌های زیاد است روندی صعودی دارد.

مراجع

- [1] S. Rudykh and M. C. Boyce, "Analysis of Elasmoid Fish Imbricated Layered Scale-Tissue Systems and their Bio-inspired Analogues at Finite Strains and Bending", *IMA Journal of Applied mathematics*, Vol. 79, 2014, pp. 830-847.
- [2] T. Sigaeva, Mangan, L. Vergori, M. Destrade and L. Sudak, "Wrinkles and Creases in the Bending, Unbending and Eversion of Soft Sectors", *Proceedings of the Royal Society A*, 2018, DOI: 10. 1098/rspa.2017.0827.
- [3] X. Jing, S. Chen, C. Zhang and F. Xie, "Increasing Bending Performance of Soft Actuator by Silicon Rubbers of Multiple Hardness", *Machines* 2022, 10, 272. <https://doi.org/10.3390/machines10040272>.
- [4] D. M. Haughton, "Flexure and Compression of Incompressible Elastic Plates", *International Journal of Engineering Science*. Vol. 37, 1999, pp. 1693-1708.
- [5] C. D. Coman and M. Destrade, "Asymptotic Results for Bifurcations in Pure Bending of Rubber Blocks", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. Vol. 61, No. 18, 2008, pp. 395-414.

- [6] M. Destrade, A. Ni. Annaidh and C. D. Coman, "Bending Instabilities of Soft Biological Tissues", International Journal of Solids Structures, Vol. 46, 2009, pp. 4322-4330.
- [7] S. Roccabianaca, M. Gei and D. Bigoni, "Plane Strain Bifurcations of Elastic Layered Structures Subject to Finite Bending: Theory Versus Experiments", Journal of Applied mathematics. Vol. 75, 2010, pp. 525-548.
- [8] M. Destrade, J. Murphy and R. Ogden, "On Deforming a Sector of a Circular Cylindrical Tube into an Intact Tube: Existence, Uniqueness and Stability", International Journal of Engineering Science. Vol. 48, 2010, pp. 1212-1224.
- [9] R. S. Rivlin, "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials V: the problem of flexure", Proceedings of the Royal Society A, 1949, pp. 463-473.
- [10] L. A. Taber, Nonlinear Theory of Elasticity, Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2004.
- [11] A. R. Setoodeh, H. Farahmand, "Nonlinear Modeling of Crystal System Transition of Block Phosphorous Using Continuum-DFT Model", Journal of Physics: Condensed Matter, 2018, DOI: 10.1088/1361-648X/aa99f7.
- [۱۲] احسان زمانی، فاطمه عباس پور و سجاد صیفوری، "مطالعه اثر ضربه نانوذرات بر نانولوله‌های کربنی دوجداره با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته"، مجله مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۷، شماره ۵۸، پاییز ۱۳۹۸، صفحه ۳۱۷-۳۲۸.
- [۱۳] امیر نجیبی و رمضان علی حاجی قربانی، "بررسی تنش الاستیک در یک استوانه جداره ضخیم ساخته شده از مواد خواص گرادایانی دوبعدی با مدل ماده جدید"، مجله مدل‌سازی مهندسی، دوره ۱۷، شماره ۵۶، بهار ۱۳۹۸، صفحه ۱۱۱-۱۲۲.
- [۱۴] ابراهیم علیزاده، جواد بابایی، پویا دهستانی، رضا بطلبلویی و حسین بهروز، "بررسی تأثیر ضخامت و اغتشاشات هندسی اولیه پوسته‌های جدار نازک کامپوزیتی در وقوع پدیده کمانش تحت فشار محوری"، دوره ۱۶، شماره ۵۳، تابستان ۱۳۹۷، صفحه ۱۲۱-۱۳۴.
- [15] J. F. Louf, J. Knoblauch and H. Jensen, "Bending and Stretching of Soft Pores Enable Passive Control of Fluid Flows", Physical Review Letters, 2020, <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.098101>.
- [16] Y. Fu, "Some Asymptotic Results Concerning the Buckling of a Spherical Shell of Arbitrary Thickness", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 33, No. 10, 1998, pp. 1111-1122.
- [17] Y. Fu and M. Sanjaranipour, "WKB Method with Repeated Roots and its Application to the Stability Analysis of an Everted Cylindrical Tube, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 62, No. 14, 2002, pp. 1856-1871.
- [18] Y. Fu and Y. Lin, "A WKB Analysis of the Buckling of an Everted Neo-Hookean Cylindrical Tube". Mathematics and Mechanics of Solids, Vol. 7, No. 17, 2002, pp. 438-501.
- [19] M. Sanjaranipour, "A WKB Analysis of the Buckling Condition for a Cylindrical Shell of Arbitrary Thickness Subject to an External Pressure", IMA International Journal of Applied Mathematics, Vol. 70, No. 19, 2005, pp. 147-161.
- [20] M. Sanjaranipour, "WKB Analysis of the Buckling of a Neo-Hookean Cylindrical Shell of Arbitrary Thickness Subject to an External Pressure, International Journal of Applied Mechanics, Vol. 2, No. 4, 2010, pp. 852-870.
- [21] M. Sanjaranipour and N. Abdolalian, "Higher-order Asymptotic Results for the Wrinkling of an Everted Varga Spherical Shell", Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. 66, No. 4, 2015, pp. 1939-1947.
- [22] M. Sanjaranipour, A. Hatami and N. Abdolalian, "Another Approach of WKB Method for the Stability Analysis of the Bending of an Elastic Rubber Block", International Journal of Engineering Science, Vol. 62, No. 6, 2013, pp. 1-8.
- [23] R. W. Ogden, Non-Linear Elastic Deformation, Dover Publications, New York, 1997.
- [24] C. M. Bender and S. A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1978.