مسئله ممانعت از بیشینه جریان در شبکه‌های پویای چند دوره‌ای در محیط دو ترکیبی تصادفی فازی

حمید بیگدلی[۱*]، سلیم باوندی[۲] و جواد طیبی[۳]

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: پژوهشی
دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۲۱
بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۱۸
پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۲۶

واژگان کلیدی:
ممانعت شبکه،
متغیر تصادفی فازی،
اندازه اعتبار،
اندازه احتمال،
تجزیه بندرز.

چکیده

بدون شک بهترین ابزار برای کمک به تصمیم‌گیرندگان و فرماندهان نظامی برای انتخاب یک راهبرد مناسب، فرمول‌بندی مدل‌هایی است که تا حد امکان به دنیای واقعی نزدیک باشند. این امر زمانی میسر می‌شود که این مسائل در شرایط عدم قطعیت ارائه شوند. هدف از انجام این پژوهش، ارائه یک مسئله ممانعت پویای چند دوره‌ای در شرایط عدم قطعیت دو ترکیبی تصادفی فازی است. به‌طورکلی، در مسائل ممانعت شبکه، منابع کمیابی برای تنزل کارایی دشمن اختصاص داده می‌شود که رفتار او به‌وسیله مسئله بهینه‌سازی شبکه قالب‌بندی شده است. در این مسئله، ممانعت‌کنندگان یا همان نیروهای مدافع درصدد کمینه کردن بیشینه جریان در طول T دوره زمانی هستند. از طرفی، در هر مرحله ممانعت کننده و دشمن به‌طور کامل از عملکرد طرف مقابل آگاه هستند. ظرفیت‌های یالی در این مدل به‌صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفته می‌شوند. برای حل مدل ارائه‌شده، ابتدا مسئله ممانعت پویای تصادفی فازی به کمک مفاهیم نظریه احتمال، اندازه اعتبار و برنامه‌ریزی محدودیت شانس به مسئله ممانعت پویای قطعی تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از دوگان‌گیری مسئله دوسطحی قطعی ایجادشده به یک مسئله تک سطحی تبدیل و سپس با استفاده از تعمیم الگوریتم تجزیه بندرز برای حل آن اقدام می‌شود. درنهایت اعتبار مسئله با ارائه یک نمونه عددی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. با توجه به نتایج بدست‌آمده، علیرغم اینکه وجود شاخص آگاهی μ در مراحل ابتدایی به نفع نیروهای مدافع نیست، اما استفاده از آن در مرحله‌های بعدی به دلیل کاهش مقدار تابع هدف به نفع آن‌ها خواهد بود. همچنین افزایش سطح اطمینان η موجب کاهش مقدار تابع هدف در هر دوره می‌شود که این مورد به تصمیم‌گیرندگان و فرماندهان نظامی برای اتخاذ سیاست‌های مناسب کمک شایانی خواهد کرد.

۱-مقدمه

امروزه، کاربرد مسئله ممانعت شبکه در بسیاری از مسائل نظیر مبارزه با تروریسم، کنترل مرزها برای جلوگیری از قاچاق و مهاجرت، کنترل شیوع بیماری‌های عفونی، ایجاد موانع جاده‌ای برای جلوگیری از مجرمین شناخته‌شده توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. مسئله ممانعت در شبکه یک مسئله بهینه‌سازی ترکیبیانی است که روش‌هایی را برای خنثی کردن فعالیت‌های مخرب دشمن ارائه می‌دهد. در این نوع از مسائل، همواره با یک شبکه سروکار داریم که در سطح اول کاربر شبکه (دشمن، مهاجم) سعی در بهینه نمودن تابع هدف خود دارد، درحالی که در سطح دوم ممانعت کننده با بودجه‌ی محدود خود

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: H.Bigdeli@casu.ac.ir
۱. استادیار، گروه مطالعات علم و فناوری، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران
۲. پژوهشگر، پژوهشکده عالی جنگ، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران
۳. استادیار، گروه مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی بیرجند، ایران

https://doi.org/10.22075/jme.2023.28685.2349

سعی دارد این مقدار بهینه را برای کاربر شبکه به حداقل برساند. این مسئله یکی از مهم‌ترین مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی است که برای اولین بار در دهه ۱۹۶۰ در جنگ ویتنام و به‌منظور ایجاد اختلال در جابجایی سربازان و تجهیزات جنگی ویتنامی‌ها [۱] و از حدود سال ۱۹۶۴ درزمینه تحقیق در عملیات موردبررسی قرارگرفته است[۲]. پس‌ازآن، کاربردهایی از قبیل مبارزه با قاچاق (مواد مخدر، سلاح، انسان و یا مواد هسته‌ای)[۳]، بررسی میزان آسیب‌پذیری شبکه‌های زیرساختی تحت حملات تروریستی [۴]، کنترل بیماری‌های عفونی نظیر آنفولانزای خوکی، ابولا [۵] و پایش شبکه‌های کامپیوتری [۶]، اهمیت این مسئله را در زمینه‌های نظامی، امنیت شبکه و سلامت برای پژوهشگران دوچندان کرده است [۷]. در سال‌های اخیر پژوهش‌های خوبی در این زمینه انجام‌شده است که در این بین می‌توان به پژوهش عبدالله‌زاده و همکاران [۸] اشاره نمود که یک مسئله ممانعت جدید به نام ممانعت از $s-t$ برش کمینه را موردبررسی قرار داد. در مدل آن‌ها، مهاجم سعی دارد با انتخاب کمترین $s-t$ برش، هر مسیر ممکن بین مبدأ و مقصد را قطع کند. درحالی‌که مدافع قصد دارد با افزایش ظرفیت کمان‌ها تحت بودجه مشخص، مقدار برش کمینه را تا حد امکان افزایش دهد. در پژوهشی دیگر، بیگدلی و همکاران[۹] کاربرد مسئله بازی ممانعت شبکه دونفره در شناسایی دشمن را موردمطالعه قرار دادند. در پژوهش آن‌ها، یک مدل ریاضی برای مسئله ممانعت شبکه دو نفره با چندین نوع نیروی شناسایی ارائه شد، سپس بر پایه مدل ریاضی یک شبکه نمونه مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفت. همچنین، آن‌ها در پژوهشی دیگر یک روش حل فرا ابتکاری برای مسئله ممانعت از بیشینه ظرفیت با چندین مهاجم را ارائه نمودند. در این پژوهش، ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی دو سطحی صفر و یک برای مسئله مورد نظر بیان و سپس با توجه به پیچیدگی حل مسائل دو سطحی، یک الگوریتم ترکیبی شامل الگوریتم دایجسترا اصلاح‌شده و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید برای حل مسئله پیشنهاد شده است[۱۰]. یک مدل دوهدفه برای مسئله ممانعت از کوتاه‌ترین مسیر شبکه با ممانعت از گره نیز توسط شیائو[1] و همکاران [۱۱] ارائه شد. فرقانی و همکاران [۱۲] یک مدل دوهدفه برای مسئله ممانعت جزئی روی تسهیلات سلسله مراتبی ظرفیت دار پیشنهاد دادند. مدل آن‌ها بیشتر روی پیش‌بینی و رسیدگی به اثرات مخرب یک حمله عمدی به تأسیسات سلسله مراتبی تودرتو ظرفیت دار تمرکز داشت. کبیری و همکاران [۱۳] کاربردی از مسئله ممانعت از بیشینه جریان در بازی جنگ زمینی را به‌منظور جلوگیری از انتقال حداکثر نیرو و تجهیزات دشمن ارائه دادند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اکثر پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه مربوط به ممانعت‌های قطعی، تصادفی و بررسی قالب ممانعت از طریق نظریه بازی است که با عنوان ممانعت پویا نیز شناخته می‌شود. در ممانعت‌های قطعی، ممانعت کننده تمامی اطلاعات و مشخصات مرتبط با یک شبکه را به‌طور کامل در اختیار دارد؛ اما در ممانعت تصادفی برخی از اطلاعات نظیر ظرفیت‌های یالی برای ممانعت کننده به‌طور دقیق مشخص نیست. در ممانعت پویا، به‌طورمعمول نظریه بازی مورداستفاده قرار می‌گیرد و عامل زمان نیز در مدل‌سازی این نوع از ممانعت‌ها در نظر گرفته می‌شود. پژوهش انجام‌شده توسط لندی و شرلی[2] [۱۴] را می‌توان یکی از پژوهش‌های بسیار موفق در زمینه ممانعت پویا دانست که در آن عامل زمان پاسخ را به‌صورت بازه‌های زمانی گسسته دخالت دادند. لیم و اسمیت[3] [۱۵] نیز مسئله ممانعت شبکه را با این فرض موردبررسی قرار دادند که مؤلفه‌های شبکه در طول زمان تغییر می‌کند. افشاری‌راد و تقی‌زاده [۱۶] نیز مسئله ممانعت پویا را بر روی مسئله ممانعت حداکثر جریان موردمطالعه قرار دادند. در مدل آن‌ها مهاجم یا دشمن قصد دارد تا مشروط به ظرفیت‌های یالی، حداکثر جریان در شبکه را در بازه زمانی $[0,T]$ انتقال دهد.

با بررسی ادبیات موضوع در زمینه ممانعت شبکه پویا، مشاهده می‌شود که پژوهش‌های زیادی در شرایط عدم قطعیت صورت نگرفته است. از معدود مطالعات انجام‌شده در این زمینه، می‌توان به پژوهش سلیمانی و همکاران [۱۷] اشاره نمود که یک مسئله ممانعت در شبکه‌های با بیشینه جریان را در حالت پویا با داده‌های غیرقطعی موردبررسی قرار دادند. آن‌ها یک مسئله ممانعت شبکه چند دوره‌ای با ظرفیت یال‌های نامشخص را بعد از تبدیل به فرم معادل قطعی به‌وسیله تجزیه بندرز حل نمودند. نوع عدم قطعیت بکار گرفته‌شده در پژوهش آن‌ها، عدم قطعیت معرفی‌شده

[1] Xiao
[2] Lunday and Sherali
[3] Lim and Smith

توسط لیو[1] [۱۸] بوده است. اخیراً، بیگدلی و باوندی [۱۹] یک مسئله ممانعت پویای چند دوره‌ای را در شرایط فازی پیشنهاد نمودند. در این مسئله، نیروهای مدافع در نقش ممانعت کننده سعی در کمینه کردن بیشینه جریان در طول دوره زمانی دارند به‌طوری‌که در هر مرحله ممانعت کننده و دشمن به‌طور کامل از عملکرد طرف مقابل آگاه هستند. ظرفیت‌های یالی در این مدل به‌صورت متغیرهای فازی در نظر گرفته‌شده است.

به طور کلی، علی‌رغم تمام ویژگی‌های مطلوبی که رویکردهای ممانعت در شبکه در شرایط قطعی با خود دارند، در این رویکردها اندازه‌گیری به روش سنتی و محاسبه‌ها در یک محیط قطعی صورت می‌پذیرد. در حالیکه، جدی‌ترین مسئله در دنیای واقعی وجود عدم قطعیت در داده‌ها است[۲۱-۲۰]. یکی از رویکردها در چنین شرایطی، استفاده از مدل‌های تصادفی است که برای هر یک از پارامترهای آن یک تابع توزیع احتمال مناسب در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم توزیع احتمال یک متغیر تصادفی باید از طریق تحلیل آماری و استنباط مبتنی بر داده‌های قطعی با اندازه مناسب باشد. با این وجود، در بسیاری از موقعیت‌ها، چنین داده‌هایی یافت نمی‌شوند و در نتیجه نظر خبرگان به‌صورت نادقیق جایگزین می‌شود. همچنین، در برخی از موارد داده‌های جمع‌آوری‌شده خود دقیق نیستند. در این حالت‌ها، ما با پدیده فازی در بین مقادیر تصادفی مواجه می‌شویم. در این دسته از موارد، ازآنجایی‌که توزیع پارامترها هم‌زمان عناصر تصادفی و فازی را شامل می‌شود، متغیرهای تصادفی به‌وضوح بهترین روش برای توصیف عدم قطعیت دو ترکیبی تصادفی فازی نیستند. مفهوم متغیرهای تصادفی فازی[2] در ابتدا توسط کاوکرناک[3] [۲۲] بحث شد ازلحاظ ریاضی، یک متغیر تصادفی فازی به‌عنوان نگاشتی از یک فضای احتمال به مجموعه‌ای از متغیرهای فازی است. به بیانی دیگر، می‌توان آن را یک متغیر تصادفی در نظر گرفت که مقادیری نادقیق یا فازی می‌پذیرد. در این پژوهش، یک مدل جدید برای مسئله ممانعت پویا به‌صورت مسئله ممانعت چند دوره‌ای در شرایط تصادفی فازی موردبررسی قرار می‌گیرد. در این مدل، ارسال بیشینه جریان و عملیات ممانعت در طول چند دوره اتفاق می‌افتد، درحالی‌که بودجه موردنیاز برای اجرای عملیات ممانعت محدود است. درواقع ما با یک مسئله ممانعت از بیشینه جریان در شبکه در حالت پویا سروکار داریم که در آن ممانعت کننده و دشمن در هر دوره زمانی روش‌های متفاوتی را بر اساس اطلاعات به‌دست‌آمده از طرف مقابل اتخاذ می‌کنند؛ بنابراین، هدف نهایی این مسئله چند دوره‌ای، کمینه کردن بیشینه جریان در طول T دوره زمانی است. ازآنجایی‌که این مسئله به‌طور هم‌زمان در محیط تصادفی و فازی بررسی می‌شود، لذا از رویکرد احتمال-اعتبار[4] برای تبدیل آن به حالت قطعی استفاده می‌کنیم. سپس، با مهیاکردن شرایط موردنیاز برای تعمیم تجزیه بندرز، یک رویکرد حل برای این مسئله ارائه می‌شود. درنهایت، به دلیل عدم دسترسی به نمونه‌های واقعی مناسب، یک گروه از نمونه‌های تولیدشده به‌صورت تصادفی برای بررسی کارایی مدل پیشنهادی به کار گرفته می‌شود. این نمونه‌ها با نام مسائل کاند[5] توسط برنارد گندرون[6] [۲۳] در ادبیات موضوع رواج یافته است.

بخش‌های مختلف این پژوهش به شرح زیر سازمان‌دهی شده‌اند: در بخش ۲، تعاریف و پیش‌نیازها ارائه‌شده است. در بخش ۳، مسئله ممانعت چند دوره‌ای در حالت قطعی موردبررسی قرار می‌گیرد. حالت تصادفی فازی این مسئله در بخش ۴ شرح داده می‌شود. برای نشان دادن کارایی مدل ارائه‌شده یک مثال عددی در بخش ۵ گنجانده‌شده است. سرانجام، برخی نتایج استخراج‌شده از این پژوهش در بخش ۶ بیان می‌شود.

۲-مفاهیم مقدماتی

در این بخش، برخی از مفاهیم و قضایای اساسی مربوط به نظریه مجموعه‌های فازی شامل اندازه اعتبار، متغیر تصادفی فازی بیان می‌شوند.

۲-۱-اندازه اعتبار و فضای اعتبار

فرض کنید Θ یک مجموعه ناتهی، $P(\Theta)$ مجموعه توانی از Θ شامل تمام زیرمجموعه‌های ممکن باشد. هر عضو از $P(\Theta)$ پیشامد نامیده می‌شود. به‌منظور بیان یک تعریف اصولی از اندازه اعتبار، نیاز است تا برای هر پیشامد A، یک مقدار $Cr(A)$ اختصاص داده شود که بیانگر اعتبار رخ دادن پیشام A است. برای اطمینان از اینکه مقدار $Cr(A)$ دارای

[1] Liu
[2] Fuzzy Random Variable
[3] Kwakernoak
[4] Probability- credibility
[5] Canad
[6] Bernard Gendron

ویژگی‌های ریاضیاتی مشخصی است که انتظار داریم یک اعتبار داشته باشد، چهار اصل زیر را می‌پذیریم:

۱. اصل نرمال بودن: $Cr(\theta)=۱.۰$

۲. اصل یکنواختی: $Cr(A)\le Cr(B)$ زمانی که $A\subset B$.

۳. اصل خود-دوگانی: $Cr(A)+Cr(A^c)=۱$ برای هر $A\in P(\Theta)$.

۴. اصل حداکثر سازی:

$$Cr\left\{\bigcup_i A_i\right\}\le ۰.۵=\sup_i Cr\{A_i\}$$

برای هر $\{A_i\}$ با $Cr\{A_i\}\le ۰.۵$.

سه اصل اول از اصول بدیهی هستند. اصل چهارم این موضوع را بیان می‌کند که اگر اندازه اعتبار یک پدیده فازی برابر ۱ (و یا صفر) باشد، هیچ عدم اطمینانی در آن پدیده وجود ندارد، زیرا این باور وجود دارد که آن رویداد به‌طورقطع اتفاق می‌افتد (یا نمی‌افتد)[۲۴]. با این تفاسیر، به مجموعه توابع Cr اندازه اعتبار گفته می‌شود، اگر ۴ اصل اشاره‌شده در بالا را برآورده نمایند.

قضیه ۱: (قضیه گسترش اعتبار[۲۵]) فرض کنید Θ یک مجموعه نا تهی و $Cr\{\theta\}$ یک تابع نامنفی روی Θ باشد که شرط گسترش اعتبار را برآورده می‌کند

$$\begin{aligned}&\sup_{\theta\in\Theta} Cr\{\theta\}\ge ۰.۵,\\ &Cr\{\theta^*\}+\sup_{\theta\in\Theta} Cr\{\theta\}=۱ \text{ if } Cr\{\theta^*\}\ge ۰.۵\end{aligned} \qquad (۱)$$

در این صورت $Cr\{\theta\}$ دارای یک گسترش منحصربه‌فرد برای یک اندازه اعتبار روی $P\{\Theta\}$ به‌صورت زیر است:

$$Cr\{A\}=\begin{cases}\sup_{\theta\in A} Cr\{\theta\}, & \text{if } \sup_{\theta\in A} Cr\{\theta\}<۰.۵,\\ ۱-\sup_{\theta\in A^c} Cr\{\theta\}, & \text{if } \sup_{\theta\in A} Cr\{\theta^*\}\ge ۰.۵\end{cases} \qquad (۲)$$

به کمک این قضیه قادر خواهیم بود تا اندازه‌های اعتبار عددی را ارائه دهیم. درواقع، بدون قضیه گسترش اعتبار، نمی‌توانیم یک اندازه اعتبار غیر بدیهی را تعیین کنیم، زیرا لیست کردن مقادیر اعتبار همه زیرمجموعه‌های Θ برای ما غیرممکن است.

تعریف ۱: [۲۶] فرض کنید Θ یک مجموعه نا تهی، $P\{\Theta\}$ مجموعه توانی Θ و Cr یک اندازه اعتبار باشد. در این صورت سه‌تایی $(\Theta,P(\Theta),Cr)$ یک فضای اعتبار نامیده می‌شود.

تعریف ۲: [۲۶] متغیر فازی ξ، یک تابع از یک فضای اعتبار $(\Theta,P(\Theta),Cr)$ به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که با یک تابع عضویت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(x)=(۲Cr\{\xi=x\})\wedge ۱,\quad x\in\mathbb{R} \qquad (۳)$$

هر متغیر فازی دارای یک تابع عضویت منحصربه‌فرد است. در عمل، یک متغیر فازی ممکن است با یک تابع عضویت مشخص شود. در این حالت، فرمولی برای محاسبه مقدار اعتبار یک پیشامد فازی لازم است. به این منظور، قضیه معکوس اعتبار در ادامه ارائه می‌شود.

قضیه ۳: (قضیه معکوس اعتبار[۱۴]) فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ باشد. در این صورت، برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی، داریم:

$$Cr\{\xi\in B\}=\frac{۱}{۲}\left(\sup_{x\in B}\mu(x)+۱-\sup_{x\in B^c}\mu(x)\right) \qquad (۴)$$

در حالت خاص می‌توان نشان داد (برای هر $r\in\mathbb{R}$):

$$Cr\{\xi\le r\}=\frac{۱}{۲}\left(\sup_{x\le r}\mu(x)+۱-\sup_{x>r}\mu(x)\right) \qquad (۵)$$

البته بر اساس اندازه امکان[۱] و اندازه الزام[۲] نیز می‌توان نشان داد:

$$Cr\{\xi\le r\}=\frac{۱}{۲}\left(Pos\{\xi\le r\}+Nec\{\xi\le r\}\right) \qquad (۶)$$

که در آن $Pos(.)$ و $Nec(.)$ به ترتیب نشان‌دهنده اندازه امکان و اندازه الزام هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Pos\{\xi\ge r\}=\sup_{u\ge r}\mu(u)$$

$$Nec\{\xi\ge r\}=۱-\sup_{u<r}\mu(u)$$

توجه داشته باشید که اگر یک متغیر فازی به‌صورت یک تابع روی یک فضای اعتبار تعریف‌شده باشد، آنگاه می‌توان تابع عضویت آن را با استفاده از (۳) به دست آورد. در مقابل، اگر یک متغیر فازی با یک تابع عضویت داده‌شده باشد، آنگاه می‌توان مقدار اعتبار آن را با استفاده از (۴) یافت.

تعریف ۴: (توزیع اعتبار[۲۶]) توزیع اعتبار $\Phi:\mathbb{R}\to[۰,۱]$ برای یک متغیر فازی ξ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x)=Cr\{\theta\in\Theta\,|\,\xi(x)\le x\} \qquad (۷)$$

مفهوم مهم بعدی، استقلال متغیرهای فازی است که توسط لیو و گائو[۳] در سال ۲۰۰۷ به‌صورت زیر تعریف شد.

[۱] Possibility measure
[۲] Necessity measure
[۳] Gao

تعریف ۵: (استقلال متغیر فازی[۲۷]) به متغیرهای فازی $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ مستقل گفته می‌شود اگر و تنها اگر برای هر مجموعه $B_1,B_2,...,B_n\in\mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$Cr\left\{\bigcap_{i=1}^{m}\xi_i\in B_i\right\}=\min_{1\le i\le m}Cr\ \xi_i\in B_i \tag{8}$$

در این پژوهش فرض می‌کنیم که ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای مستقل تعریف‌شده به‌صورت $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ است.

تعریف ۶: (عدد فازی LR [۲۸]) یک بازه فازی از نوع LR به‌صورت $\xi=(\alpha,m_1,m_2,\beta)_{LR}$ نمایش داده می‌شود که در آن α و β اعداد نامنفی و به ترتیب گستره چپ و راست[1] هستند. همچنین، m_1 و m_2 مقادیر میانی عدد فازی ξ می‌باشند. تابع عضویت ξ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mu_\xi(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m_1-x}{\alpha}\right), & x\le m_1\\ 1 & m_1\le x\le m_2\\ R\left(\dfrac{x-m_2}{\beta}\right), & x\ge m_2\end{cases}$$

که L و R به ترتیب توابع پیوسته غیر صعودی چپ و راست از R به $[0,1]$ هستند. اگر $m_1=m=m_2$ باشد، آنگاه عدد فازی LR به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

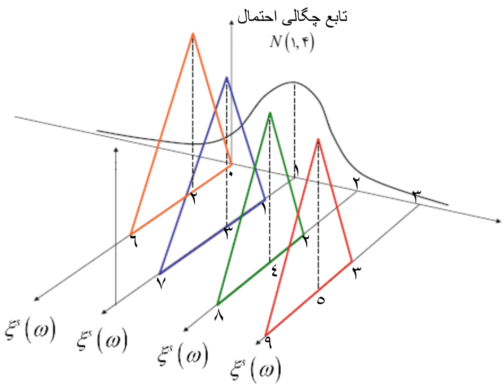
$$\mu_\xi(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x\le m\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x\ge m\end{cases} \tag{9}$$

همچنین، $L(0)=R(0)=1$.

۲-۲-متغیرهای تصادفی فازی

تعریف۷: [۲۹] فرض کنید $(\Omega,\Sigma,\Pr)$ یک فضای احتمال باشد که در آن Ω فضای نمونه، Σ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های Ω است. متغیر تصادفی فازی ξ^s تابعی از فضای احتمال $(\Omega,\Sigma,\Pr)$ به مجموعه‌ای از متغیرهای فازی است به قسمی که برای هر مجموعه بورل[2] B از $\Re$، $Pos\{\xi^s(w), w\in B\}$ یک تابع اندازه‌پذیر از باشد.

با توجه به تعریف بالا، متغیر تصادفی فازی نگاشتی از فضای احتمال به مجموعه‌ای از متغیرهای فازی است. شکل (۱) متغیر تصادفی فازی را نمایش می‌دهد.



شکل ۱- متغیر تصادفی فازی [۳۰]

۳-مسئله ممانعت چند دوره‌ای در حالت قطعی

یک گراف جهت‌دار $G=(N,A)$ را در نظر بگیرید که در آن N مجموعه رئوس و A مجموعه یال‌های آن هستند. u_{ij} را به‌عنوان ظرفیت یال (i,j) و x_{ij}^t را به‌عنوان جریان روی این یال در دوره T تعریف کنید که $t=1,...,T$. بودجه کلی ممانعت کننده را با R و بودجه لازم برای ممانعت یال در دوره t را با r_{ij}^t نشان می‌دهیم. فرض کنید y_{ij}^t متغیر تصمیم دودویی باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_{ij}^t=\begin{cases}1, & \text{اگر یال } (i,j) \text{ در دوره } t \text{ ممانعت شود}\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

بنابراین، مسئله ممانعت چند دوره‌ای در حالت قطعی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

مسئله ۱:

$$\begin{aligned}
&\underset{y\in Y}{Min}\ \underset{x}{Max}\ \sum_{t=1}^{T}x_{ds}^t\\
s.t.\quad &\sum_{j:(i,j)\in A'}x_{ij}^t-\sum_{j:(j,i)\in A'}x_{ji}^t=0, && \forall i\in N, t=1,...,T && (c_1)\\
&0\le x_{ij}^1\le u_{ij}\left(1-y_{ij}^1\right), && && (c_2)\\
&0\le x_{ij}^t\le\left(u_{ij}-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^l\right)\left(1-y_{ij}^t\right), && \forall(i,j)\in A, t=2,...,T && (c_3)\\
&0\le x_{ij}^t\le\left(u_{ij}-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^l\right)\left(1-\mu y_{ij}^{t-1}\right), && \forall(i,j)\in A, t=2,...,T && (c_4)
\end{aligned}$$

[1] Left and Right Spread

[2] Borel

https://doi.org/10.22075/jme.2023.28685.2349

که در آن $x_{ij}^{\cdot}=0$، $y_{ij}^{\cdot}=0$، $A' = A\cup\{(d,s)\}$ و (d,s) یک یال مصنوعی با $u_{ds}=\infty$ و $r_{ds}^{t}=\infty$ است. همچنین محدودیت (c_1)، محدودیت بقای جریان است. محدودیت (c_2) و (c_3) بیان می‌کند که جریان در یک یال نمی‌تواند از ظرفیت آن در T دوره تجاوز کند و نیز جریان روی یک یال در یک دوره داده‌شده توسط ظرفیت باقی‌مانده در آن دوره محدود می‌شود. محدودیت (c_4) بیانگر این نکته است که ممانعت یک یال در یک دوره، ظرفیت آن را برای دوره‌های بعدی کاهش می‌دهد. در این محدودیت شاخص μ به‌عنوان شاخص آگاهی خطر تعریف‌شده است که در بازه $[0,1]$ قرار دارد. این شاخص زمانی تعریف می‌شود که دشمن سعی می‌کند جریان روی یال ممانعت‌شده در یک دوره را تا جایی که می‌تواند در مرحله بعدی به کمینه برساند. در این پژوهش، بدون از دست دادن کلیت مسئله، مقدار شاخص μ در دوره‌های t بدون تغییر در نظر گرفته می‌شود. از طرفی دیگر، اگر یک یال در دوره $t-1$ ممانعت شود، در این صورت مقدار بودجه لازم برای ممانعت مجدد این یال در دوره‌های بعدی به‌صورت کسری از بودجه تخصیص‌یافته در مرحله آغازین برای ممانعت این یال در نظر گرفته می‌شود. لذا، ممانعت کننده سعی می‌کند تا میزان بودجه این یال را کاهش دهد. با این تفاسیر، مجموعه فضای شدنی مسئله ممانعت کننده را با Y نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = \left\{ y_{ij}^{t} \,\middle|\, \sum_{t=1}^{T}\sum_{(i,j)} r_{ij}^{t} y_{ij}^{t} \le R,\ r_{ij}^{t} = \left(1+(\lambda-1)\,y_{ij}^{t-1}\right) r_{ij}^{1},\ y_{ij}^{t}\in\{0,1\} \right\} \quad (8)$$

که در آن $0 \le \lambda \le 1$. در نتیجه، اگر $y_{ij}^{t-1}=1$، آنگاه خواهیم داشت $r_{ij}^{t}=\lambda r_{ij}^{1}$. زیرا دشمن پس از مشاهده ممانعت یال در یک دوره زمانی، بیشتر حالت احتیاط را به کار می‌برد و تا حد امکان از استفاده مجدد از این یال در دوره‌های آتی خودداری می‌کند. بنابراین تخصیص کامل بودجه برای ممانعت این یال در دوره‌های آتی به نوعی اتلاف منابع برای ممانعت کننده خواهد بود. بنابراین، ممانعت کننده میزان بودجه این یال را کاهش می‌دهد ولی آن را برای گمراه‌کردن دشمن به صفر نمی‌رساند. در واقع، با به صفر نرساندن این مقدار، دشمن گمان می‌کند که این یال هنوز به‌صورت کامل ممانعت نشده است.

با توجه به صحیح بودن برخی از ورودی‌ها، مسئله ۱ یک مسئله ممانعت صحیح آمیخته است که در دسته مسائل NP سخت قرار می‌گیرد، زیرا نمی‌توان این مسئله را در زمان چندجمله‌ای حل نمود.

۴-مسئله ممانعت چند دوره‌ای در حالت تصادفی فازی

مدل‌های قطعی زیادی با هزاران متغیر و محدودیت در عمل وجود دارند که جواب تولیدی این مدل‌ها در بیشتر مواقع به این علت که احتمالات آتی در آن‌ها لحاظ نشده است، توسط مدیران و تصمیم‌گیرندگان به کار گرفته نمی‌شوند. از دهه ۱۹۵۰ میلادی، تکنیک‌های زیادی برای واردکردن عدم قطعیت در ضرایب، پارامترها و فرمول‌بندی مدل‌ها ارائه‌شده است. در تمامی این روش‌ها، هدف تعیین جواب بهینه مسئله‌ای است که پارامترهای آن در زمان تصمیم‌گیری به‌طور قطعی مشخص نیستند، اما توزیع احتمال آن‌ها بر اساس داده‌های تاریخی برآورد و شناخته‌شده است. این مدل‌ها که موسوم به مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی هستند، ساختاری مشابه با مدل‌های قطعی دارند، با این تفاوت که در این مدل‌ها به‌جای ثابت فرض کردن پارامترها، یک توزیع احتمال برای آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. هدف گرفتن تصمیمی بود که برای برخی یا همه حالات ممکن شدنی باشد. اما گاهی از اوقات، ممکن است برخی از اطلاعات در مپرد یک متغیر تصادفی غیردقیق باشد. به‌طور مثال، تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته که برخی از پارامترهای آن غیردقیق باشد. در این بین، نظریه مجموعه‌های فازی راهکار مناسبی برای چنین وضعیت‌های نادقیقی است. در واقع، ما با یک محیط عدم قطعیت دو ترکیبی تصادفی فازی سروکار داریم. معمولاً، روش‌های فازی و تصادفی در حل مدل‌های مربوطه متفاوت هستند. اما رویکرد مشترکی که هر دو در حل مسئله بهینه‌سازی خود از آن بهره می‌برند، رویکرد مبتنی بر اندازه است. اندازه امکان، الزام و اعتبار در محیط فازی و اندازه احتمال در محیط تصادفی. از این ابزار در قالب برنامه‌ریزی محدودیت شانس برای حل مدل‌های احتمالی و فازی استفاده می‌شود. در این پژوهش ما از اندازه اعتبار و احتمال بهره می‌بریم. با این تفاسیر، فرض کنید $\xi_{ij}^{s}=\left(u_{ij}^{\alpha},u_{ij}^{s},u_{ij}^{\beta}\right)$ یک متغیر تصادفی فازی متناظر با ظرفیت u_{ij} برای یال (i,j) باشد

که در آن $u_{ij}^{s}:N\left(u_{ij},\sigma_{ij}^{2}\right)$. در این صورت مسئله ۱ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

مسئله ۲:

$$\underset{y\in Y}{Min}\ \underset{x}{Max}\ \sum_{t=1}^{T}x_{ds}^{t}$$

$$s.t.\quad \sum_{j:(i,j)\in A'}x_{ij}^{t}-\sum_{j:(j,i)\in A'}x_{ji}^{t}=0,\qquad \forall i\in N,t=1,\dots,T \qquad (c_1)$$

$$\Pr\left(Cr\left(x_{ij}^{1}\le \xi_{ij}(1-y_{ij}^{1})\right)\ge\delta\right)\ge\eta, \qquad (c_2')$$

$$\Pr\left(Cr\left(x_{ij}^{t}\le\left(\xi_{ij}-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^{l}\right)(1-y_{ij}^{t})\right)\ge\delta\right)\ge\eta,\quad \forall(i,j)\in A,t=2,\dots,T \qquad (c_3')$$

$$\Pr\left(Cr\left(x_{ij}^{t}\le\left(\xi_{ij}-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^{l}\right)(1-\mu y_{ij}^{t-1})\right)\ge\delta\right)\ge\eta,\quad \forall(i,j)\in A,t=2,\dots,T \qquad (c_4')$$

$$x_{ij}^{t}\ge 0,\qquad \forall(i,j)\in A,t=1,\dots,T$$

که در آن δ و η سطوح اطمینان از پیش تعیین‌شده هستند که به‌عنوان یک حاشیه مناسب توسط افراد خبره تعیین می‌شود. از آنجایی‌که نمی‌توان ناحیه مشخصی را برای محدودیت‌های $c_2'-c_4'$ در مسئله ۲ تعیین کرد، لذا این محدودیت‌ها خوش تعریف نیستند و نیاز است که به فرم معادل قطعی تبدیل شوند. به این منظور، از دو قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه۴: [۳۱] فرض کنید ξ یک بردار تصادفی فازی و $g_i, j=1,\dots,n$ توابع پیوسته حقیقی مقدار باشند. در این صورت اعتبار $Cr\left\{g_j\left(\xi(\omega)\right)\le 0,\ j=1,\dots,n\right\}$ یک متغیر تصادفی است.

قضیه۵:[۳۰] فرض کنید $\xi_1=\left(u_1^{\alpha},u_1^{s},u_1^{\beta}\right)$ و $\xi_2=\left(u_2^{\alpha},u_2^{s},u_2^{\beta}\right)$ دو عدد فازی مستقل از نوع LR باشند. برای $\delta\in[0,1]$ داریم:

الف) اگر $\delta\le 0.5$، آنگاه داریم:

$$Cr\left\{\xi_1\ge\xi_2\right\}\ge\delta$$
$$\Rightarrow u_1^{s}+u_1^{\beta}R^{-1}(2\delta)\ge u_2^{s}-u_2^{\alpha}R^{-1}(2\delta)$$

ب) اگر $\delta>0.5$، آنگاه داریم:

$$Cr\left\{\xi_1\ge\xi_2\right\}\ge\delta$$
$$\Rightarrow u_1^{s}-u_1^{\alpha}L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)\ge u_2^{s}+u_2^{\beta}L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)$$

اثبات: طبق حساب فازی $\hat{\xi}=\xi_1-\xi_2$ که در آن نیز یک عدد فازی از نوع LR است، معادل است با $\left(\hat{\xi}^{\alpha}=u_1^{\alpha}+u_2^{\beta},\hat{\xi}^{s}=u_1^{s}-u_2^{s},\hat{\xi}^{\beta}=u_2^{\alpha}+u_1^{\beta}\right)$ و در نتیجه اعتبار پیشامد فازی $Cr\left\{\hat{\xi}\ge 0\right\}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$Cr\left\{\hat{\xi}\ge 0\right\}=\begin{cases}1, & 0\le\hat{\xi}^{s}-\hat{\xi}^{\alpha},\\ 1-\dfrac{1}{2}L\left(\dfrac{\hat{\xi}^{s}}{\hat{\xi}^{\alpha}}\right), & \hat{\xi}^{s}-\hat{\xi}^{\alpha}\le 0\le\hat{\xi}^{s},\\ \dfrac{1}{2}R\left(\dfrac{-\hat{\xi}^{s}}{\hat{\xi}^{\beta}}\right), & \hat{\xi}^{s}\le 0\le\hat{\xi}^{s}+\hat{\xi}^{\beta}\\ 0, & 0>\hat{\xi}^{s}+\hat{\xi}^{\beta}\end{cases}$$

اکنون، فرض کنید $Cr\left\{\hat{\xi}\ge 0\right\}\ge\delta$ را در نظر بگیریم. اگر $\delta\le 0.5$، در این صورت

$$\delta\le\frac{1}{2}R\left(\frac{-\hat{\xi}^{s}}{\hat{\xi}^{\beta}}\right)\Leftrightarrow R^{-1}(2\delta)\ge\frac{-\hat{\xi}^{s}}{\hat{\xi}^{\beta}}$$
$$\Leftrightarrow\left(u_2^{\alpha}+u_1^{\beta}\right)R^{-1}(2\delta)\ge-\left(\hat{u}_1^{s}-u_2^{s}\right)$$
$$\Leftrightarrow u_1^{s}+u_1^{\beta}R^{-1}(2\delta)\ge u_2^{s}-u_2^{\alpha}R^{-1}(2\delta)$$

و اگر $\delta>0.5$، در این صورت

$$\delta\le 1-\frac{1}{2}L\left(\frac{\hat{\xi}^{s}}{\hat{\xi}^{\alpha}}\right)\Leftrightarrow 2(1-\delta)\ge L\left(\frac{\hat{\xi}^{s}}{\hat{\xi}^{\alpha}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(u_1^{\alpha}+u_2^{\beta}\right)L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)\ge\left(u_1^{s}-u_2^{s}\right)$$
$$\Leftrightarrow u_1^{s}-u_1^{\alpha}L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)\ge u_2^{s}+u_2^{\beta}L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)$$

بنابراین، اثبات کامل می‌شود.□

با توجه به دو قضیه اخیر و مفاهیم احتمال، مسئله ۲ را برحسب مقدار δ می‌توان به‌صورت دو مدل زیر بازنویسی کرد:

مسئله ۳:

$$\underset{y\in Y}{Min}\,\underset{x}{Max}\;\sum_{t=1}^{T}x_{ds}^{t}\,(\delta\le 0.5)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{j:(i,j)\in A'}x_{ij}^{t}-\sum_{j:(j,i)\in A'}x_{ji}^{t}=0, && \forall i\in N,t=1,\dots,T && (c_1)\\
& x_{ij}^{1}\le\left(u_{ij}+R^{-1}(2\delta)u_{ij}^{\beta}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)\left(1-y_{ij}^{1}\right), && && (c_2'')\\
& x_{ij}^{t}\le\left(\left(u_{ij}+R^{-1}(2\delta)u_{ij}^{\beta}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^{l}\right)\left(1-y_{ij}^{t}\right), && \forall(i,j)\in A,t=2,\dots,T && (c_3'')\\
& x_{ij}^{t}\le\left(\left(u_{ij}+R^{-1}(2\delta)u_{ij}^{\beta}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^{l}\right)\left(1-\mu y_{ij}^{t-1}\right), && \forall(i,j)\in A,t=2,\dots,T && (c_4'')\\
& x_{ij}^{t}\ge 0, && \forall(i,j)\in A,t=1,\dots,T
\end{aligned}$$

و

مسئله ۴:

$$\underset{y\in Y}{Min}\,\underset{x}{Max}\;\sum_{t=1}^{T}x_{ds}^{t}\,(\delta> 0.5)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{j:(i,j)\in A'}x_{ij}^{t}-\sum_{j:(j,i)\in A'}x_{ji}^{t}=0, && \forall i\in N,t=1,\dots,T && (c_1)\\
& x_{ij}^{1}\le\left(u_{ij}-L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)u_{ij}^{\alpha}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)\left(1-y_{ij}^{1}\right), && && (c_2'')\\
& x_{ij}^{t}\le\left(\left(u_{ij}-L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)u_{ij}^{\alpha}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^{l}\right)\left(1-y_{ij}^{t}\right), && && (c_3'')\\
& x_{ij}^{t}\le\left(\left(u_{ij}-L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)u_{ij}^{\alpha}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)-\sum_{l=1}^{t-1}x_{ij}^{l}\right)\left(1-\mu y_{ij}^{t-1}\right), && \forall(i,j)\in A,t=2,\dots,T && (c_4'')\\
& x_{ij}^{t}\ge 0, && \forall(i,j)\in A,t=1,\dots,T
\end{aligned}$$

ازآنجایی‌که $x=0$ یک جواب شدنی برای مسئله بیشینه‌سازی درونی است و ناحیه شدنی مسئله ۳ و ۴ کران‌دار است، لذا به استناد قضیه قوی دوگانی[۳۲]، مقدار تابع هدف مسئله اولیه و دوگان مسئله درونی در نقطه بهینه یکسان خواهند بود؛ بنابراین، با جایگزین کردن مسئله بیشینه‌سازی درونی با دوگان آن، می‌توان مسئله دوسطحی ۳ و ۴ را به یک مسئله تک سطحی تبدیل کرد. بدین منظور، فرض کنید π، β و γ به ترتیب بردارهای دوگان متناظر با محدودیت‌های c_1، c_3'' و c_4'' باشند. در این صورت، با دوگان‌گیری از مسئله بیشینه‌سازی درونی مسئله ۳ و ۴ و با استفاده از رابطه بیشینه جریان-کمینه برش در بهینگی، مسئله تک سطحی ۵ و ۶ را خواهیم داشت:

مسئله ۵:

$$\underset{y,\beta,\pi,\gamma}{Min}\;\sum_{t=1}^{T}\sum_{(i,j)\in A}\left(u_{ij}+R^{-1}(2\delta)u_{ij}^{\beta}+\Phi^{-1}(1-\eta)\sigma_{u_{ij}}\right)\left(\beta_{ij}^{t}\left(1-y_{ij}^{t}\right)+\gamma_{ij}^{t}\left(1-\mu y_{ij}^{t-1}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & \pi_i^t-\pi_j^t+\beta_{ij}^t+\gamma_{ij}^t+\sum_{l=t+1}^{T}\left(\beta_{ij}^{l}\left(1-y_{ij}^{l}\right)+\gamma_{ij}^{l}\left(1-\mu y_{ij}^{l-1}\right)\right)\ge 0, && \forall(i,j)\in A,t=1,\dots,T\\
& \pi_d^t-\pi_s^t\ge 1, && t=1,\dots,T\\
& \gamma_{ij}^{t},\beta_{ij}^{t}\ge 0, && \forall(i,j)\in A,t=2,\dots,T\\
& y\in Y,
\end{aligned}$$

و

مسئله ۶:

$$
\begin{aligned}
&\underset{y,\beta,\pi,\gamma}{Min}\ \sum_{t=1}^{T}\sum_{(i,j)\in A}\left(u_{ij}-L^{-1}\left(2(1-\delta)\right)u_{ij}^{\alpha}+\Phi^{-1}(1-\eta)\,\sigma_{u_{ij}}\right)\left(\beta_{ij}^{t}\left(1-y_{ij}^{t}\right)+\gamma_{ij}^{t}\left(1-\mu y_{ij}^{t-1}\right)\right)\\
&s.t.\quad \pi_i^t-\pi_j^t+\beta_{ij}^t+\gamma_{ij}^t+\sum_{l=t+1}^{T}\left(\beta_{ij}^{l}\left(1-y_{ij}^{l}\right)+\gamma_{ij}^{l}\left(1-\mu y_{ij}^{l-1}\right)\right)\ge 0,\qquad \forall (i,j)\in A, t=1,\dots,T\\
&\qquad\qquad \pi_d^t-\pi_s^t\ge 1,\qquad\qquad t=1,\dots,T\\
&\qquad\qquad \gamma_{ij}^t,\beta_{ij}^t\ge 0,\qquad\qquad \forall (i,j)\in A, t=2,\dots,T\\
&\qquad\qquad y\in Y,
\end{aligned}
$$

دو مسئله اخیر یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته هستند. یکی از روش‌ها برای حل چنین مسائلی، روش تجزیه بندرز است. به همین دلیل، از تعمیم این روش برای حل این مسئله استفاده می‌شود (الگوریتم ۱). بدین منظور مسئله ۵ (این فرآیند به‌طور مشابه برای مسئله ۶ هم رقم می‌خورد) را به‌صورت مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

مسئله۷:

$$
\underset{y,\beta,\pi,\gamma}{Min}\left\{ f\left(\beta,\pi,\gamma,y\right)\middle| g\left(\beta,\pi,\gamma,y\right)\le 0,\ \left(\beta,\pi,\gamma\right)\in\Omega, y\in\bar{Y}\right\}
$$

که در آن $f(\beta,\pi,\gamma,y)$ و $g_i(\beta,\pi\ \gamma,y)$ ($i=1,\dots,T(m+2)$) توابعی مشتق‌پذیر برحسب (β,π,γ,y) هستند که به ترتیب تابع هدف مسئله و تمامی محدودیت‌های آن را نشان می‌دهند. همچنین، Ω یک مجموعه فشرده شامل β، π و γ و $\bar{Y}=\{0,1\}^{mT}$ یک مجموعه دودویی متناهی است.

برای هر $y\in\bar{Y}$، زیر مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

مسئله ۸: (زیر مسئله)

$$
\left\{Min\ f\left(\beta,\pi,\gamma,y\right)\middle| g\left(\beta,\pi,\gamma,y\right)\le 0, \left(\beta,\pi,\gamma\right)\in\Omega\right\}
$$

مسئله ۸ همان دوگان مسئله بیشینه‌سازی درونی و هر جواب بهینه برای این مسئله، یک جواب شدنی و درواقع یک کران بالا برای مسئله ۷ است.

اگر λ مضارب لاگرانژی متناظر با زیر مسئله ۸ باشد، در این صورت می‌توان دوگان لاگرانژی آن را به‌صورت $\underset{\lambda\in\mathbb{R}_+}{Max}\ d_y\ \ \lambda$ تعریف کرد، که در آن

$$
\begin{aligned}
d_y(\lambda)&=\min_{(\beta,\pi,\gamma)\in\Omega}L\left(\beta,\pi,\gamma,y,\lambda\right)\\
&=f\left(\beta,\pi,\gamma,y\right)+\lambda^T g\left(\beta,\pi,\gamma,y\right)
\end{aligned}
$$

که در آن $L(.)$ بیانگر تابع لاگرانژ است. هم‌اکنون با انتخاب $\mu=\max_{\lambda\in\mathbb{R}_+} d_y(\lambda)$ مسئله اصلی زیر را خواهیم داشت:

مسئله ۹:

$$
\begin{aligned}
&Min\quad \mu\\
&s.t.\quad \mu\ge\min_{(\beta,\pi,\gamma)\in\Omega}L\left(\beta,\pi,\gamma,y,\lambda\right),\quad \forall\lambda\ge 0,\\
&\qquad\ \ y\in\bar{Y}
\end{aligned}
$$

مسئله ۹ دارای تعداد نامتناهی محدودیت است. لذا برای برون‌رفت از این وضعیت، آن را به‌صورت مسئله برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته حل‌شدنی زیر بازنویسی می‌کنیم که شکل تبدیل یافته‌ای از آن است:

مسئله ۱۰: (مسئله اصلی)

$$
\begin{aligned}
&\Big\{min\,\mu\Big|\mu\ge L\left(\beta^i,\pi^i,\gamma^i,y^i,\lambda^i\right)+\\
&\qquad\nabla_y^T L\left(\beta^i,\pi^i,\gamma^i,y^i,\lambda^i\right)\left(y-y^i\right),\\
&\qquad\qquad i\in I^p, y\in\bar{Y}, i=1,\dots,p\Big\}
\end{aligned}
$$

که در آن $\left(\beta^i,\pi^i,\gamma^i,\lambda^i\right)$ جواب بهینه جفت اولیه-دوگان از مسئله ۸، تعداد تکرار الگوریتم تجزیه بندرز تعمیم‌یافته و I^p مجموعه اندیس در تکرار p از الگوریتم است. در این روش، دو مسئله در سطوح متفاوت حل می‌شوند. مسئله اصلی محدودشده در یک سطح و یک زیر مسئله در سطحی دیگر. مسئله ۸ و مسئله ۱۰ به‌طور متوالی حل می‌شوند و در هر مرحله کران‌های بالا و پایینی به ترتیب به‌صورت LB و UB برای تابع هدف مسئله ۷ تولید می‌کنند. این فرآیند زمانی خاتمه می‌یابد که فاصله بین دو کران به‌اندازه کافی کم باشد.

الگوریتم ۱: الگوریتم تجزیه بندرز تعمیم‌یافته

ورودی: $G(N,A)$، u_{ij}، r_{ij}، تعداد کل مراحل: T و بودجه کلی برای ممانعت: R .

خروجی: زیرمجموعه‌ای از یال‌ها که دارای هزینه ممانعت کمتر یا مساوی R هستند.

۱: انتخاب کنید $y^1 \in \bar{Y}$. قرار بده $LB^0 = -\infty$ و $UB^0 = +\infty$ و نیز $I^0 = \varnothing$ و $p = 1$.

۲: مسئله ۸ را حل کنید. جواب بهینه (β^p, π^p, γ^p) و نیز بردار مضارب بهینه λ^p را بدست آورید.

۳: قرار دهید $I^p = I^{p-1} \cup \{p\}$ و $UB^p = \min\left\{UB^{p-1}, f\left(\beta^p, \pi^p, \gamma^p, y^p\right)\right\}$.

۴: **اگر** $UB^p = f\left(\beta^p, \pi^p, \gamma^p, y^p\right)$ **آنگاه**

۵: $\left(\beta^*, \pi^*, \gamma^*, y^*\right) = \left(\beta^p, \pi^p, \gamma^p, y^p\right)$؛

۶: **در غیر اینصورت**

۷: مسئله ۱۰ را حل کنید.

۸: قرار بده $LB^p = \mu^p$.

۹: **اگر** $LB^p \geq UB^p$ **آنگاه**

۱۰: توقف کنید. $\left(\beta^*, \pi^*, \gamma^*, y^*\right) = \left(\beta^p, \pi^p, \gamma^p, y^p\right)$ جواب بهینه برای مسئله ۷ است؛

۱۱: **در غیر اینصورت**

۱۲: $p \leftarrow p+1$ و به گام ۲ بروید.

۵- نتایج عددی

در یک میدان نبرد نیروهای دشمن با حداکثر توان درصدد تصرف خاک کشور مدافع هستند. دشمن طی چند دوره زمانی فنون و روش‌های مختلفی را در نظر می‌گیرد که بر اساس اطلاعات به‌دست‌آمده از طرف مقابل، در هر دوره زمانی اتخاذ می‌شوند. در این شرایط، نیروهای مدافع باید تلاش کنند تا با منابع و تجهیزات محدودی که در اختیار دارند از این تجاوز جلوگیری کنند. اگر هر منطقه جنگی به‌عنوان گره‌های شبکه و مسیرهای مستقیم بین آن‌ها به‌عنوان کمان‌های شبکه در نظر گرفته شود، در این صورت این موضوع را می‌توان با توجه به مدل ریاضی پیشنهادشده در بخش قبل روی نمونه عددی ارائه شده در مرجع [۲۱] موسوم به مسائل کاند بررسی نمود. این نمونه شامل ۲۲ گره و ۲۳۱ یال است که برای ارزیابی مدل‌های مختلف مرتبط با مسائل شبکه جریان مورد استفاده قرار می‌گیرد. پارامترهای مسئله به همراه مقادیرشان به‌طور خلاصه در جدول ۱ ارائه شده است.

مقدار تابع هدف مسئله پیش از ممانعت با ظرفیت یالی قطعی برابر با ۲۷۰۶۸ و در صورت وجود عدم قطعیت با فرض $\delta = ۰.۵$ و $\eta = ۰.۹$ برابر با ۲۵۵۵۷٫۶۰ است. همان‌طور که عنوان شد، سطوح اطمینان δ و η بر اساس نظر افراد خبره مرتبط با زمینه مطالعاتی تعیین می‌شود. در این پژوهش، این مقادیر برای نمایش بهتر گستره تغییرات در بازه $[۰.۱, ۰.۹]$ $\eta \in$ برای $\mu \in [۰.۱, ۰.۹]$ اختیار شدند. میزان تغییرات تابع هدف در طول دوره‌های دوم تا چهارم به ازای مقدارهای مختلفی از η و μ به ترتیب در جدول ۲ و ۳ ارائه شده است. محاسبات در نرم‌افزار GAMS 24.1.2 انجام شده است.

جدول ۱- داده‌های مسئله

پارامتر	مقدار
u_{ij}^{α}	$u_{ij} - ۳۰۰$
u_{ij}^{β}	$u_{ij} + ۳۰۰$
r_{ij}^{1}	۱
r_{ij}^{t}	r_{ij}^{1}
R	۵۰
λ	۱

https://doi.org/10.22075/jme.2023.28685.2349

جدول-۲ مقادیر بهینه تابع هدف به ازای $\delta = ۰.۵$ و مقادیر مختلف η

η	$\mu = ۰.۴$		$\mu = ۰.۵$		$\mu = ۰.۶$	
	$T = ۳$	$T = ۴$	$T = ۳$	$T = ۴$	$T = ۳$	$T = ۴$
۰,۱	۸۱۹۰,۰۰	۱۶۴۵۵,۰۶	۶۸۲۵,۰۰	۱۵۱۷۲,۷۵	۵۴۶۰,۰۰	۹۰۶۲,۶۲
۰,۲	۸۰۴۱,۶۵	۱۶۱۶۳,۶۱	۶۷۰۱,۳۷	۱۴۹۰۴,۰۰	۵۳۶۱,۱۰	۸۹۰۱,۴۶
۰,۳	۷۹۳۱,۲۵	۱۵۹۴۶,۷۱	۶۶۰۹,۳۷	۱۴۷۰۴,۰۰	۵۲۸۷,۵۰	۸۷۸۱,۵۲
۰,۴	۷۸۸۳,۱۰	۱۵۷۶۳,۷۱	۶۵۳۱,۷۵	۱۴۵۳۵,۲۵	۵۲۲۵,۴۰	۸۶۸۰,۳۳
۰,۵	۷۷۴۸,۴۰	۱۵۵۸۷,۴۸	۶۴۵۷,۰۰	۱۴۳۷۲,۷۵	۵۱۶۵,۶۰	۸۵۸۲,۸۸
۰,۶	۷۶۵۸,۷۰	۱۵۴۱۱,۲۵	۶۳۸۲,۲۵	۱۴۲۱۰,۲۵	۵۱۰۵,۸۰	۸۴۸۵,۴۳
۰,۷	۷۵۶۵,۵۵	۱۵۲۲۸,۲۵	۶۳۰۴,۶۲	۱۴۰۴۱,۵۰	۵۰۴۳,۷۰	۸۳۸۴,۲۴
۰,۸	۷۴۵۵,۱۵	۱۵۰۱۱,۳۵	۶۲۱۲,۶۲	۱۳۸۴۱,۵۰	۴۹۷۰,۱۰	۸۲۶۴,۳۰
۰,۹	**۷۳۰۶,۸۰**	**۱۴۷۱۹,۹۰**	**۶۰۸۹,۰۰**	**۱۳۵۷۲,۷۵**	**۴۸۷۱,۲۰**	**۸۱۰۳,۱۴**

جدول ۳- مقادیر تابع هدف به ازای مقادیر مختلف μ و $\eta = ۰.۹$

μ	$T = ۲$		$T = ۳$		$T = ۴$	
	OFV	FSOFV	OFV	FSOFV	OFV	FSOFV
۰,۱	۱۱۶۲۲,۶۰	۱۰۹۶۰,۲۰	۱۱۶۲۲,۶۰	۱۰۹۶۰,۲۰	۱۸۹۲۸,۴۰	۱۷۸۷۶,۵۳
۰,۲	۱۰۳۳۱,۲۰	۹۷۴۲,۴۰	۱۰۳۳۱,۲۰	۹۷۴۲,۴۰	۱۷۸۶۵,۳۰	۱۶۸۷۱,۷۸
۰,۳	۹۰۳۹,۸۰	۸۵۲۴,۶۰	۹۰۳۹,۸۰	۸۵۲۴,۶۰	۱۶۷۵۱,۷۰	۱۵۸۱۹,۵۷
۰,۴	۷۷۴۸,۴۰	۷۳۰۶,۸۰	۷۷۴۸,۴۰	۷۳۰۶,۸۰	۱۵۵۸۷,۵۰	۱۴۷۱۹,۹۰
۰,۵	۶۴۵۷,۰۰	۶۰۸۹,۰۰	۶۴۵۷,۰۰	۶۰۸۹,۰۰	۱۴۳۷۲,۷۰	۱۳۵۷۲,۷۵
۰,۶	۵۱۶۵,۶۰	۴۸۷۱,۲۰	۵۱۶۵,۶۰	۴۸۷۱,۲۰	۸۵۸۲,۹۰	۸۱۰۳,۱۴
۰,۷	۳۸۷۴,۲۰	۳۶۵۳,۴۰	۳۸۷۴,۲۰	۳۶۵۳,۴۰	۵۰۹۵,۸۰	۴۸۰۸,۱۵
۰,۸	۲۵۸۲,۸۰	۲۴۳۵,۶۰	۲۵۸۲,۸۰	۲۴۳۵,۶۰	۳۴۴۷,۷۰	۳۲۵۲,۹۰
۰,۹	**۱۲۹۱,۴۰**	**۱۲۱۷,۸۰**	**۱۲۹۱,۴۰**	**۱۲۱۷,۸۰**	**۲۲۲۱,۵**	**۲۰۹۶,۹۹**

۵-۱- تجزیه و تحلیل نتایج

بر اساس مدل ارائه شده و ساختار حاکم بر آن، همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار η در هر دوره، مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد. در واقع بهترین جواب در $\eta = ۰.۹$ بدست می‌آید. به همین خاطر در جدول ۳، جواب بهینه تابع هدف (که با FSOFV) به ازای مقادیر مختلف μ برای $\eta = ۰.۹$ و دوره‌های دوم تا چهارم ارائه و با مقدار بهینه تابع هدف بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت (که با OFV) مقایسه شده است. با ادامه فرآیند (یعنی بررسی مقدار بهینه تابع هدف برای دوره‌های بالاتر) پس از دوره ۷، مقدار FSOFV برابر با حداکثر جریان یعنی ۲۵۵۵۷,۶۰ است. بنابراین، در ادامه این مقدار برای سایر دوره‌های نیز تکرار می‌شود. این مورد برای تصمیم‌گیرندگان و فرماندهان نظامی بسیار حائز اهمیت است، زیرا با این اطلاعات می‌توانند راهبرد مناسبی را در برابر اقدامات دشمن اتخاذ نمایند. از طرفی دیگر، همین موضوع برای μ نیز صادق است. شاید در ابتدا شرایط به نفع دشمن باشد ولی در ادامه این ممانعت کننده است که با افزایش مقدار μ و درنتیجه کاهش مقدار تابع هدف در هر دوره سود خواهد برد.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، یک مسئله ممانعت پویای چند دوره‌ای در شرایط دو ترکیبی تصادفی فازی موردبررسی قرار گرفت. در این مسئله، ممانعت کننده سعی در کمینه کردن بیشینه جریان در طول T دوره زمانی داشتند. ظرفیت‌های یالی در این مدل به‌صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفته شدند. برای حل مدل ارائه‌شده، ابتدا مسئله ممانعت پویای تصادفی فازی به کمک مفاهیم اندازه اعتبار و اندازه احتمال به مسئله ممانعت پویای قطعی تغییر شکل داد. سپس با استفاده از دوگان‌گیری مسئله دوسطحی قطعی ایجادشده به یک مسئله تک سطحی تبدیل و سپس با استفاده از تعمیم الگوریتم تجزیه بندرز برای حل آن اقدام شد. از نتایج بدست‌آمده از نمونه عددی این‌طور برداشت شد که هرچند وجود شاخص آگاهی μ در مراحل ابتدایی به نفع نیروهای

مدافع نیست، اما استفاده از آن در مرحله‌های بعدی به دلیل کاهش مقدار تابع هدف به نفع آن‌ها است. همچنین با افزایش سطح اطمینان η با کاهش مقدار تابع هدف در هر دوره مواجه بودیم که این مورد به افسران و فرماندهان برای اتخاذ سیاست‌های مناسب کمک شایانی می‌کند. به‌عنوان پیشنهادهای آتی، بررسی مدل در محیط‌های غیرقطعی فازی شهودی، خاکستری و مقایسه آن با مدل تصادفی فازی می‌تواند صورت پذیرد.

منابع

[1] L. Bingol, A Lagrangian Heuristic for Solving Network Interdiction Problem. NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CA, 2001.

[2] R. Wollmer, "Removing Arcs from a Network". Operations Research, Vol.12, December 1964, pp. 934-940.

[3] C. A. Phillips, The network inhibition problem. In Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing, 1993.

[4] J. Salmeron, K. Wood and R. Baldick, "Analysis of electric grid security under terrorist threat". IEEE Transactions on Power Systems, Vol.19, May 2004, pp. 905-912.

[5] N. Assimakopoulos, "A network interdiction model for hospital infection control". Computers in Biology and Medicine, Vol.17, 1987, pp. 413-422.

[6] A. Gutfraind, New Models of Interdiction in Networked Systems on JSTOR. Military Operations Research Society, 2010.

[7] R.A. Collado, and D. Papp, Network interdiction–models, applications, unexplored directions. Rutcor Res Rep, RRR4, Rutgers University, New Brunswick, NJ, 2012.

[8] A. Abdolahzadeh, M. Aman, and J. Tayyebi, "Minimum st-cut interdiction problem". Computers and Industrial Engineering, Vol.148, October 2020, pp. 106708.

[۹] حمید بیگدلی، مهدی کبیری و جواد طیبی، "کاربرد مسئله بازی ممانعت شبکه دونفره در شناسایی دشمن"، آینده‌پژوهی دفاعی، دوره ۶، شماره ۲۱، تابستان ۱۴۰۰، صفحه ۶۹-۸۳.

[۱۰] حمید بیگدلی، سید محمد صادق میردامادی و جواد طیبی، "یک روش حل فرا ابتکاری برای مسئله ممانعت از بیشینه ظرفیت با چندین مهاجم"، مدل سازی در مهندسی، دوره ۲۰، شماره ۷۰، پاییز ۱۴۰۱، صفحه ۱۳۳-۱۴۶.

[11] K. Xiao, C. Zhu, W. Zhang, and X. Wei, "The Bi-Objective Shortest Path Network Interdiction Problem: Subgraph Algorithm and Saturation Property". IEEE Access, Vol.8, July 2020, pp, 146535–146547.

[12] A. Forghani, F. Dehghanian, M. Salari, and Y. Ghiami, "A bi-level model and solution methods for partial interdiction problem on capacitated hierarchical facilities". Computers and Operations Research, Vol.114, February 2020, pp. 104831.

[۱۳] مهدی کبیری و جواد طیبی، "کاربرد مسأله ممانعت از حداکثر جریان در بازی جنگ زمینی". فصلنامه بازی جنگ، دوره ۳، شماره ۶، تابستان ۱۳۹۹، صفحه ۳۰-۵۳.

[14] B. J. Lunday, and H. D. Sherali, "A dynamic network interdiction problem". Informatica, Vol.21, July 2010, pp. 553-574.

[15] C. Lim, and J. C. Smith, "Algorithms for discrete and continuous multicommodity flow network interdiction problems". IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers), Vol.39, April 2007, pp. 15-26.

[16] M. Afshari Rad, and H. T. Kakhki, "Maximum dynamic network flow interdiction problem: New formulation and solution procedures". Computers and Industrial Engineering, Vol.65, August 2013, pp. 531-536.

[17] M. Soleimani-Alyar, M. and A. Ghaffari-Hadigheh, "Dynamic Network Interdiction Problem with Uncertain Data". International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowlege-Based Systems, Vol.26, 2018, pp. 327-342.

[18] D.B. Liu, Uncertainty Theory. Uncertainty Theory, 2007.

[۱۹] حمید بیگدلی و سلیم باوندی، "تصمیم‌گیری بهینه در مواجهه با عملیات‌های تخریبی دشمن با استفاده از مسئله ممانعت از بیشینه جریان در شبکه‌های پویای چند دوره‌ای در شرایط فازی". آینده‌پژوهی دفاعی، دوره ۷، شماره ۲۴، بهار ۱۴۰۱، صفحه ۶۱-۷۹.

[۲۰] مهسا زارعی، مهدی نصراللهی و امیر یوسفلی، "توسعه شبکه زنجیره تامین سبز حلقه بسته در فضای غیرقطعی". مدل سازی در مهندسی، دوره ۲۰، شماره ۶۸, صفحه ۱۶۵-۱۸۷.

[۲۱] مجتبی رادمهر و حسن زرآبادی پور، "کنترل مد لغزشی فازی برای ردیابی پروفایل بهینه سرعت قطار با وجود نامعینی". مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۲۰، شماره ۶۸، فروردین ۱۴۰۱، صفحه ۱۳۹-۱۵۲.

[22] H. Kwakernaak, "Fuzzy random variables—I. Definitions and theorems". Information Sciences, Vol.15, July 1978, pp. 1–29.

[23] T.G. Crainic, A. Frangioni, and B. Gendron, "Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design". Discrete Applied Mathematics, Vol.112, September 2001, pp. 73-99.

[24] B. Liu, and Y.K. Liu, "Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.10, August 2002, pp. 445-450.

[25] X. Li, and B. Liu, "A Sufficient and necessary condition for credibility measures". International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowlege-Based Systems, Vol.14, 2006, pp. 527-535.

[26] B. Liu, "A survey of credibility theory". In Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol.5, October 2006, pp. 387-408.

[27] Y.-K. Liu, and J. Gao, "The independence of fuzzy variables with applications to fuzzy random optimization". International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol.15, 2007, pp. 1-20.

[28] D. Dubois, and H.M. Prade, Fuzzy sets and systems : theory and applications. Academic press, 1980.

[29] Y.-K. Liu, and B. Liu, "Fuzzy random variables: A scalar expected value operator". Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol.2, June 2003, pp. 143–160.

[30] S. Wang, and J. Watada, Fuzzy Random Variable. In Fuzzy Stochastic Optimization. Springer, Boston, MA, 2012.

[31] Y.-K. Liu, and B. Liu, "On minimum-risk problems in fuzzy random decision systems". Computers and Operations Research, Vol. 32, February 2005, pp. 257–283.

[32] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, and H.D. Sherali, Linear programming and network flows. John Wiley & Sons, 2011.