



Semnan University

Research Article

# Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>



## Modeling and numerical analysis of viscoelastic fluid flow in a permeable channel

Seyed Ebrahim Ghasemi<sup>1</sup>

1. Department of Engineering Sciences, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

\*Corresponding Author: [se.ghasemi@hsu.ac.ir](mailto:se.ghasemi@hsu.ac.ir)

### PAPER INFO

#### Paper history:

Received: 29 June 2022

Revised: 17 September 2022

Accepted: 26 February 2023

#### Keywords:

Fluid flow,  
Numerical modeling,  
Permeable channel,  
Momentum equation.

### ABSTRACT

In this article, the laminar flow of an incompressible and viscoelastic fluid inside a channel with porous walls has been investigated using optimal asymptotic homotopy method (OHAM). The flow inside the channel is considered steady and the Darcy model is used to simulate the effects of drag on the flow caused by the porous medium. The governing equations of the problem are converted into non-linear ordinary differential equations and solved. To prove the correctness of the solution, some of the results have been compared with the obtained numerical results. The effects of Darcy number, Deborah number and Reynolds number on the velocity distribution are analyzed. Based on the comparison, the ability and high accuracy of this method to solve the problem has been determined. Finally, it can be concluded that this method can be used as a reliable method to solve the internal flow of fluid inside a channel with a porous wall.

© 2023 Published by Semnan University Press.

DOI: <https://doi.org/10.22075/Jme.2023.27603.2295>

### How to cite this article:

Ghasemi, S.E. (2023). Modeling And Numerical Analysis Of Viscoelastic Fluid Flow In A Permeable Channel. Journal Of Modeling In Engineering, 21(73), 255-262 . Doi: 10.22075/Jme.2023.27603.2295

## مدلسازی و تحلیل عددی جریان سیال ویسکوالاستیک در یک کانال نفوذپذیر

سید ابراهیم قاسمی<sup>۱\*</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: پژوهشی            دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۰۸            بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۲۶            پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۰۷</p>	<p>در این مقاله، جریان آرام یک سیال تراکم‌ناپذیر و ویسکوالاستیک داخل یک کانال با دیواره‌های متخلخل با استفاده از روش هوموتوپي مجانبی بهینه تحت بررسی قرار گرفته است. جریان داخل کانال به صورت پایا در نظر گرفته شده و از مدل داری برای شبیه‌سازی اثرات درگ روی جریان ناشی از محیط متخلخل استفاده شده است. معادلات حاکم بر مسئله به معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی تبدیل شده و حل میگردند که برای اثبات درستی حل، بخشی از نتایج با نتایج عددی بدست آمده مقایسه شده است. اثرات عدد داری، عدد دوبرا و عدد رینولدز روی توزیع سرعت مورد تحلیل قرار میگیرند. بر اساس مقایسه صورت گرفته، توانایی و دقت بالای این روش برای حل مسئله مورد نظر مشخص گردیده است. در نهایت، می‌توان نتیجه گرفت که این روش را می‌توان به عنوان روشی قابل اعتماد برای حل جریان داخلی سیال درون کانالی با دیواره متخلخل به کار گرفت.</p>
<p><b>واژگان کلیدی:</b>            جریان سیال،            مدل سازی عددی،            کانال نفوذ پذیر،            معادله مومنتوم.</p>	

### ۱-مقدمه

در دهه‌های گذشته، روشهای عددی و تحلیلی گوناگونی برای حل مسائل مربوط به جریان سیال درون کانال های نفوذ پذیر به کار گرفته شده است. با توجه به کاربرد وسیع این قبیل مسائل در صنایعی همچون نفت و گاز، صنایع هوایی، بیومکانیک و غیره [۳-۱]، لازم است که روشهای مورد اعتمادتر و دقیق تری برای حل این قبیل مسائل به کار گرفته شوند. روشهای گوناگون بسیاری مانند روش تفاضل محدود [۴]، روش المان محدود [۵] و دیگر روشهای عددی موجود برای حل مسائل مختلف مهندسی به کار گرفته شده اند. تمامی این روشها دارای مزایا و معایبی هستند که آنها را برای به کارگیری در مسائل خاصی محدود می‌کند. علاوه بر روشهای عددی گوناگونی که تعدادی از آنها ذکر گردید، روشهای تحلیلی مختلفی مانند روش اغتشاش هوموتوپي (HPM) [۶ و ۷]، روش اغتشاش هوموتوپي اصلاح شده (MHPM) [۸ و ۹]، روش تجزیه آدومیان (ADM) [۱۰]، روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) [۱۱-۱۳]، روش حداقل مربعات (LSM) [۱۴] و روش تکرار تغییرات

(VIM) [۱۵] برای حل مسائل مختلف موجود در شاخه های مختلف مهندسی ارائه شده است. یکی از روشهای تحلیلی ارائه شده در دو قرن اخیر، روش آنالیز هوموتوپي (HAM) بوده است که در سال ۱۹۹۲، لیائو [۱۶ و ۱۷] این روش را برای بررسی مسائل غیر خطی ارائه داد. با استفاده از خاصیت خطی این روش، کاربر می‌تواند یک مسئله غیر خطی را به تعداد نامحدودی مسئله خطی تبدیل کند [۱۸]. با وجود مزایای بسیار بالای روش آنالیز هوموتوپي در مقایسه با دیگر روشهای تحلیلی، این روش را می‌توان برای مسائل پیوسته به کاربرد که محدودیتی مهم برای این روش محسوب می‌شود. بنابراین، روش هوموتوپي مجانبی بهینه (OHAM) توسط مارینکا و هریسانو [۱۹-۲۲] ارائه گردید که می‌توان آنرا برای حل مسائل پیچیده چه از نظر هندسه و چه از نظر خواص فیزیکی مواد مورد نظر (مثلا سیال) به کار برد. با توجه به بررسی مطالعات قبلی که در بالا ذکر شد، نوآوری اصلی مقاله حاضر بررسی جریان آرام سیال ویسکوالاستیک درون یک کانال نفوذپذیر با استفاده از روش هوموتوپي

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: se.ghasemi@hsu.ac.ir  
 ۱. استادیار گروه علوم مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری.

$y$  هستند،  $\lambda_1$  ثابت زمانی ماکسول و  $K$  نفوذپذیری محیط متخلخل است. شرایط مرزی مسئله بصورت زیر خواهد بود: [۲۳]

$$v=0 \quad \text{at } y=0 \quad (۳)$$

$$u=0 ; v=V/2 \quad \text{at } y=H/2 \quad (۴)$$

که در آن  $V/2$  سرعت مکش در صفحات است. مطابق مرجع [۲۳]، برای ساده‌سازی معادلات از تبدیل‌های زیر استفاده میشود:

$$X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H} \quad (۵)$$

$$u = -\nabla X \frac{dF(Y)}{dY}, v = \nabla F(Y)$$

در نهایت معادله مومنتوم بصورت زیر ساده میگردد:

$$\frac{d^3 F}{dY^3} + \text{Re}_T \left[ \left( \frac{dF}{dY} \right)^2 - F \frac{d^2 F}{dY^2} \right] + \quad (۶)$$

$$\text{De} \left[ 2F \left( \frac{dF}{dY} \right) \left( \frac{d^2 F}{dY^2} \right) - F^2 \frac{d^3 F}{dY^3} \right] +$$

$$\frac{1}{\text{Da}} \left( \frac{dF}{dY} \right) = 0$$

شرایط مرزی تبدیل شده نیز بصورت زیر بدست می‌آیند: [۲۳]

$$F=0 \quad \text{at } Y=0 \quad (۷)$$

$$F = 0.5, \quad \frac{dF}{dY} = 0 \quad \text{at } y=0.5 \quad (۸)$$

که  $\text{Re}_T = HV/v$  عدد رینولدز مکشی،  $\text{De} = \lambda_1 V^2/v$  عدد دپورا و  $\text{Da} = K/H^2$  عدد دارسی هستند. در اینجا  $v$  بیانگر لزجت سینماتیکی سیال است.

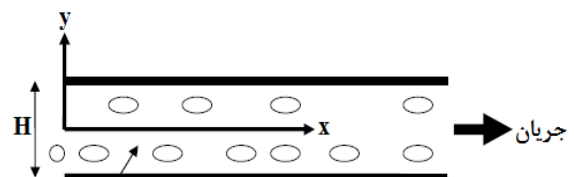
### ۳- حل مسئله

توسعه‌ی روش‌های جدید عددی و تحلیلی برای بررسی معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی موجود در شاخه‌های مختلف مهندسی بسیار قابل اهمیت می‌باشد. در این بخش، روش هوموتوبی مجانبی بهینه جهت به کارگیری برای حل معادلات پایای حاکم بر مسئله حاضر ارائه شده است. مراحل مختلف فرآیند به کارگیری روش برای حل معادلات و تابع کمکی موجود در روش برای کنترل سرعت همگرایی و دقت حل در این بخش ارائه و معرفی میگردند. ابتدا معادله دیفرانسیل به صورت زیر فرض می‌شود

مجانبی بهینه به عنوان روشی جدید برای حل این قبیل مسائل است. جریان داخلی سیال موجود در کانال در حالت پایا بررسی خواهد شد. برای ارزیابی درستی حل و صحت سنجی، نتایج به دست آمده در این مقاله و نتایج عددی مقایسه میگردند. در نهایت، اثرات فیزیکی پارامترهای بی بعد از جمله عدد دارسی، عدد دپورا و عدد رینولدز مورد تحلیل قرار خواهند گرفت.

### ۲- مدل‌سازی

موضوع این مقاله تحلیل جریان پایا، آرام و کاملاً توسعه یافته مربوط به سیالی ویسکوالاستیک درون یک کانال نفوذپذیر می‌باشد. مدل فیزیکی جریان مورد مطالعه در شکل (۱) نشان داده شده است، که شامل یک کانال صفحه موازی با دیواره‌های متخلخل در یک سیستم مختصات  $(X, Y)$  است. در این شکل ناحیه بین صفحه‌ای حاوی یک سیال ویسکوالاستیک تراکم ناپذیر همراه با مواد متخلخل است که بین صفحاتی که با فاصله  $H$  از هم قرار دارند. محور  $X$  در امتداد خط مرکزی کانال، موازی با هر دو صفحه و محور  $Y$  عمود بر آن است. جریان در هر دو محور متقارن فرض می‌شود [۲۳].



شکل ۱- مدل فیزیکی مسئله [۲۳]  
سیال ویسکوالاستیک-محیط متخلخل

معادلات حاکم در دستگاه دکارتی و برای جریان دوبعدی سیال غیر قابل تراکم به صورت زیر است [۲۳]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \quad (۲)$$

$$\lambda_1 \left( u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) =$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - v \frac{u}{K}$$

معادله (۱) بیانگر معادله پیوستگی سیال و معادله (۲) معادله مومنتوم می‌باشد.

که در این معادلات  $u$  و  $v$  مولفه‌های سرعت در جهت  $X$  و

$$F_0(Y) = -2Y^2 + 2Y, \quad [19-22]$$

$$F_1(Y) = 4c_1 \left( \frac{1}{15} Y^6 - \frac{1}{30} Y^5 - \frac{5}{24} Y^4 \right) +$$

$$3c_1 Y^3 - \frac{287}{120} c_1 Y^2 + \frac{11}{20} c_1 Y,$$

$$F_2(Y) = -\frac{16}{675} c_1^3 Y^{10} + \frac{32}{945} c_1^3 Y^9 + \frac{10}{63} c_1^3 Y^8 - \frac{46}{35} c_1^3 Y^7 -$$

$$\frac{1}{7200} (-1920c_2 - 1920c_1 - 14368c_1^2) Y^6 -$$

$$\frac{1}{3600} (480c_1 + 480c_2 + 4160c_1^2) Y^5 -$$

$$\frac{1}{1440} (1200c_2 + 1200c_1 + 367c_1^2) Y^4 +$$

$$\frac{1}{6} (18c_2 + 18c_1 - \frac{151}{20} c_1^2) Y^3 +$$

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{287}{60} c_2 - \frac{287}{60} c_1 + \frac{986689}{302400} c_1^2 \right) Y^2 +$$

$$\left( \frac{11}{20} c_2 + \frac{11}{20} c_1 - \frac{17749}{40320} c_1^2 \right) Y,$$

...

(۱۴)

ثابت های  $c_1$  و  $c_2$  نیز به کمک روش حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آیند:

$$c_1 = 1.189123573, \quad c_2 = 0.02450313080 \quad (15)$$

بنابراین با جایگذاری ثابت های فوق در رابطه (۱۴) پاسخ نهایی بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$F(Y) = F_0(Y) + F_1(Y) + F_2(Y) + \dots \quad (16)$$

#### ۴- اعتبار سنجی

در این بخش به منظور اعتبارسنجی روش حل بکار رفته، نتایج بدست آمده از روش هوموتوبی مجانبی بهینه با پاسخ های عددی روش رانگ-کوتا مقایسه می گردند. مقادیر سرعت مربوط به نتایج روش هوموتوبی مجانبی بهینه و اختلاف آنها با حل عددی در جدول ۱ ارائه شده است. با بررسی این جدول میتوان دریافت که روش هوموتوبی مجانبی بهینه از دقت بسیار بالایی برخوردار بوده و نتایج حاصل با پاسخ های عددی مطابقت بسیار خوبی دارند.

جدول ۱- مقایسه نتایج روش هوموتوبی مجانبی بهینه با پاسخ های عددی

Y	FOHAM	FNUM	Error
0	0	0	0
0.1	0.145644	0.146268	0.000624
0.2	0.281131	0.281665	0.000534
0.3	0.393824	0.393975	0.000151
0.4	0.471115	0.471056	0.000059
0.5	0.5	0.5	0

$$(9) A[v(x)] + f(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

با شرایط مرزی:

$$B(v) = 0,$$

که در اینجا  $f(x)$  یک تابع معین است، و در  $A(v) = L(v) + N(v)$ ،  $L$  و  $N$  قسمت های غیر خطی و خطی هستند، همچنین  $\Omega$  مسئله دامنه میباشد.

$$(10) (1-p)[L(\varphi(x;p) + f(x))] - H(p)[A(\varphi(x;p) + f(x))] = 0$$

با شرط مرزی:

$$B[\varphi(x,p)] = 0$$

که در آن فاکتور  $p$  در بازه  $0 \leq p \leq 1$  تعبیه شده است، همچنین  $H(p) = \sum_{k=1}^m p^k C_k$  یک تابع کمکی است که همگرایی حل به طور قابل ملاحظه ای با آن مرتبط است.  $H(p)$  دامنه و ناحیه همگرایی را تنظیم و کنترل می کند

[۱۹-۲۲].

با بسط  $\varphi(x;p, C_j)$  در سری تیلور خواهیم داشت:

$$\varphi(x;p, C_j) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, C_j) p^k, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

با در نظر گرفتن  $C_j, (j = 1, 2, \dots, m)$  می توانیم به دست آوریم:

$$\tilde{v} = v_0(x) + \sum_{k=1}^m v_k(x; C_j) \quad (12)$$

با جایگزین کردن معادله (۱۲)، تابع باقیمانده بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$R(x; C_j) = L(\tilde{v}(x; C_j)) + f(x) + N(\tilde{v}(x; C_j)) \quad (13)$$

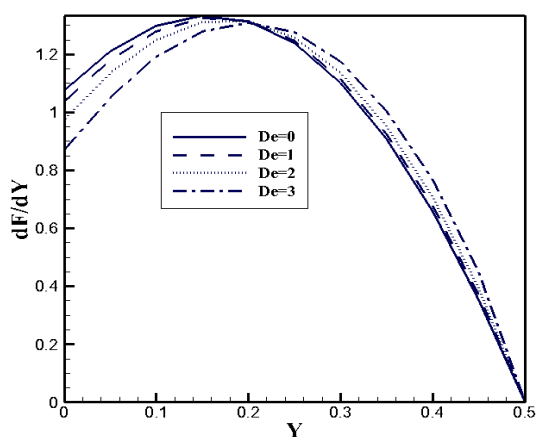
با در نظر گرفتن معادله  $R(x; C_j) = 0$ ، جواب معادله خواهد بود.

برای تعیین  $C_j, (j = 1, 2, \dots, m)$  می توان از روش هایی از جمله گلرکین، ریتز یا حداقل مربعات استفاده کرد.

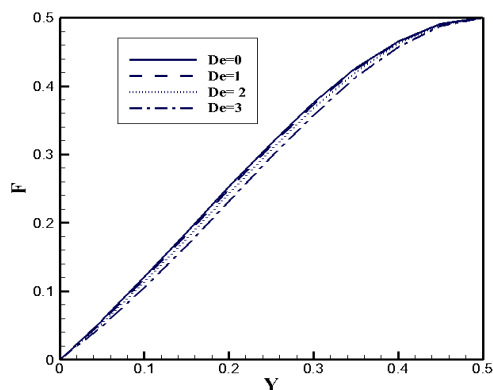
در نهایت، با جایگذاری ثابت های بدست آمده پاسخ تقریبی حاصل خواهد شد.

با بکارگیری اصول روش هوموتوبی مجانبی بهینه برای حل این مسئله مطابق با روند فوق الذکر و با قرار دادن  $p=1$  خواهیم داشت:

بر تغییرات سرعت‌های محوری و عرضی نمایش داده شده اند. عدد دبور (De) یک عدد بدون بعد است که اغلب در رئولوژی برای مشخص کردن سیالیت مواد در شرایط جریان خاص استفاده می‌شود. در واقع این عدد تعیین می‌کند که با توجه به زمان کافی، حتی یک ماده جامد مانند ممکن است جریان داشته باشد، یا یک ماده سیال مانند زمانی که به اندازه کافی سریع تغییر شکل می‌دهد، می‌تواند بصورت جامد عمل کند. هرچه عدد دبور کوچکتر باشد، ماده سیال تر به نظر می‌رسد. مقادیر بالاتر De دلالت بر یک رفتار بسیار کشسان دارد. سیالات نیوتنی زمان استراحت ندارند یعنی  $De=0$ . برای  $De=1$  زمان استراحت و مقیاس زمانی مشخصه برابر است. با توجه به شکل (۴)، با افزایش اثرات الاستیک، یعنی با افزایش De از ۰ به ۱، ۲، ۳، کاهش قابل توجهی در سرعت در مرکز کانال مشاهده می‌شود. همچنین از شکل (۵) می‌توان دریافت که سرعت عرضی در کل دامنه با افزایش عدد دبور کاهش می‌یابد.



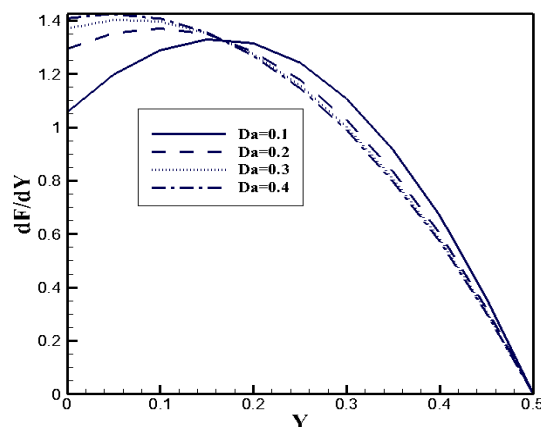
شکل ۱- تغییرات سرعت محوری برای مقادیر مختلف عدد دبور



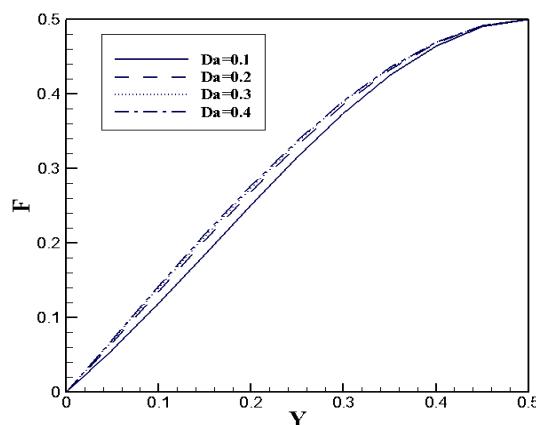
شکل ۲- تغییرات سرعت عرضی برای مقادیر مختلف عدد دبور

## ۵- نتایج و بحث

پس از حل مسئله به کمک روش هوموتوپیک مجانبی بهینه و اعتبارسنجی نتایج، در این بخش از مطالعه حاضر تأثیر سه پارامتر کلیدی بر توزیع سرعت مورد بررسی قرار خواهند گرفت: عدد دبور (De)، عدد رینولدز مکشی ( $Re_T$ ) و عدد دارسی (Da).  
شکل‌های (۲) و (۳) به ترتیب تغییرات سرعت‌های محوری و عرضی را برای مقادیر مختلف عدد دارسی نشان می‌دهند. همانطور که از شکل (۲) قابل مشاهده است، در خط مرکزی کانال ( $Y=0$ ) سرعت با افزایش عدد دارسی، یعنی با نفوذپذیری بیشتر، به شدت شتاب می‌گیرد. همچنین از شکل (۳) می‌توان دریافت که سرعت عرضی در کل دامنه با افزایش عدد دارسی افزایش می‌یابد.



شکل ۲- تغییرات سرعت محوری برای مقادیر مختلف عدد دارسی



شکل ۳- تغییرات سرعت عرضی برای مقادیر مختلف عدد دارسی

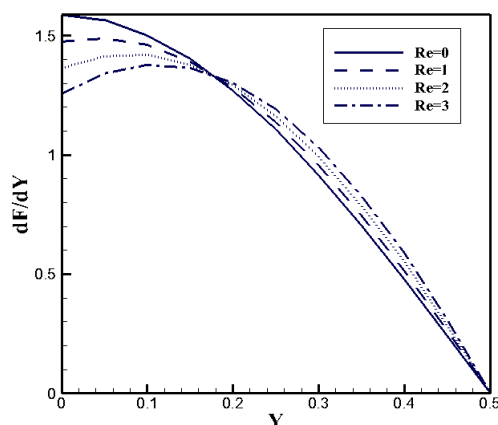
در شکل‌های (۴) و (۵) اثر مقادیر مختلف عدد دبور به ترتیب

### ۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

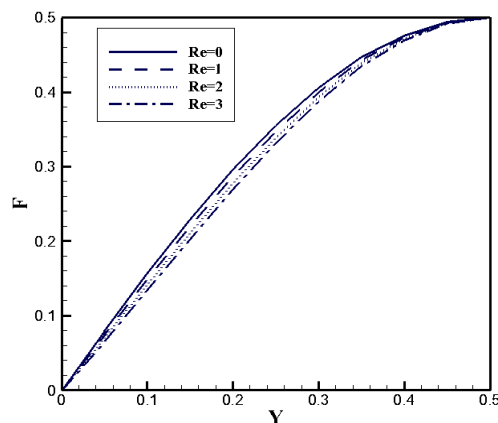
هدف اصلی مطالعه حاضر استفاده از روش هوموتوپي مجانبی بهینه برای ارزیابی رفتار جریان کاملاً توسعه‌یافته پایا و تراکم‌ناپذیر یک سیال ویسکوالاستیک در کانالی با محیط متخلخل است. این مطالعه کاربردهای بالقوه‌ای در شبیه‌سازی فرآوری پلیمری، مهندسی شیمی و همچنین آلودگی محیطی دارد. نتایج به‌دست‌آمده با توجه به تغییرات پارامترهای فیزیکی مهم و تاثیر گذار ارائه شده است. یافته‌های مهم به شرح زیر خلاصه می‌شود:

- نتایج روش هوموتوپي مجانبی بهینه تطابق بسیار خوبی را با نتایج عددی نشان می‌دهد.
- سادگی و کارایی این تکنیک جهت یافتن جواب‌های تحلیلی برای مسائل جریان سیال در محیط‌های متخلخل سودمند است.
- با افزایش عدد داری (افزایش نفوذپذیری) در خط مرکزی کانال سرعت محوری افزایش چشمگیری دارد.
- با افزایش عدد دورا (افزایش خاصیت الاستیک)، سرعت محوری در مرکز کانال بصورت محسوسی کاهش می‌یابد.
- در مرکز کانال با افزایش عدد رینولدز مکشی، سرعت محوری کمتر می‌شود.
- برای تحقیقات آینده، بررسی اثرات گذرا، محیط‌های متخلخل پیچیده و استفاده از دیگر روش‌های تحلیلی یا عددی پیشنهاد می‌گردد.

شکل‌های (۶) و (۷) تأثیر عدد رینولدز مکشی ( $Re$ ) را بر توزیع سرعت‌های محوری و عرضی نشان می‌دهند.  $Re_T = HV/v$  همیشه مثبت است زیرا ما فقط مورد مکش یعنی حذف مواد از دیواره کانال را مطالعه می‌کنیم. همانطور که از شکل (۶) مشخص است در مرکز کانال ( $Y=0$ ) با افزایش  $Re_T$  کاهش محسوسی در سرعت ( $dF/dY$ ) مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به شکل (۷) میتوان دریافت که با افزایش عدد رینولدز، سرعت عرضی در کل دامنه کاهش می‌یابد.



شکل ۳- نمودار تغییرات سرعت محوری برای مقادیر مختلف عدد رینولدز



شکل ۴- نمودار تغییرات سرعت عرضی برای مقادیر مختلف عدد رینولدز

## مراجع

- [1] G. Hou, J. Wang, and A. Layton, "Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction— A Review", *Commun. Comput. Phys.*, vol. 12, no. 1, 2012, pp. 337-377.
- [2] F. Gao and T. Matsuzawa, "FSI within Aortic Arch Model over Cardiac Cycle and Influence of Wall Stiffness on Wall Stress in Layered Wall", *Engineering Letters*, vol. 13, no. 2, Aug. 2006, 13\_2\_15.
- [3] D.V. Le, B.C. Khoo, and J. Peraire, "An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries", *Journal of Computational Physics*, vol. 220, 2006, pp. 109–138.
- [۴] حبیب الله سایه وند و رضا نعمتی، "حل عددی اثر افزایش دمای دیواره بر جریان و انتقال حرارت در لوله حرارتی نوسانی"، نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره ۱۸، شماره ۶۰، خرداد ۱۳۹۹، صفحه ۱۳-۲۵.
- [۵] رسول محبی، "بررسی جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد حفره مربعی با وجود مانع گرم مثلثی با روش المان محدود"، نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره ۱۶، شماره ۵۵، دی ۱۳۹۷، صفحه ۳۶۱-۳۷۳.
- [۶] مازیار دهقان، یوسف رحمانی، سیف الله سعدالدین، محمدصادق ولیپور و داوود دومیری گنجی، "بررسی انتقال حرارت در فوم‌های فلزی در حضور جابجایی اجباری و تشعشع حرارتی به روش اغتشاش هموتوبی"، نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره ۱۴، شماره ۴۶، مهر ۱۳۹۵، صفحه ۹-۱.
- [7] J. Mandeep Singh, "An iterative technique based on HPM for a class of one dimensional Bratu's type problem", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 200, 2022, pp. 50-64.
- [8] S. Momani, G.H. Erjaee, and M.H. Alnasr, "The modified homotopy perturbation method for solving strongly nonlinear oscillators", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 58, no. 11–12, 2009, pp. 2209-2220.
- [9] A.M. Siddiqui, T. Haroon, and S. Irum, "Torsional flow of third grade fluid using modified homotopy perturbation method", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 58, no. 11–12, 2009, pp. 2274-2285.
- [10] S. Bhatti, M. Zahid, R. Ali, A. Sarwar, and H.A. Wahab, "Blade coating analysis of a viscoelastic Carreau fluid using Adomian decomposition method", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 190, 2021, pp. 659-677.
- [11] K. M. Ewis, "A New Approach in Differential transformation method with application on MHD flow in non-Darcy medium between porous parallel plates considering hall current", *Advances in Water Resources*, vol. 143, 2020, p. 103677.
- [12] R. Abazari, A. Borhanifar, "Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method", *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 8, 2010, pp. 2711-2722.
- [13] J.W. Zhou, W. Zhang, X. Jiang, and E.D. Zhai, "Investigation on dynamics of rotating wind turbine blade using transferred differential transformation method", *Renewable Energy*, vol. 188, 2022, pp. 96-113.
- [14] W. Alhejaili, R.S. Varun Kumar, E. Roshdy El-Zahar, G. Sowmya, B.C. Prasannakumara, M. Ijaz Khan, K.M. Yogeasha, and S. Qayyum, "Analytical solution for temperature equation of a fin problem with variable temperature dependent thermal properties: Application of LSM and DTM-Pade approximant", *Chemical Physics Letters*, vol. 793, 2022, p. 139409.
- [15] O. Doeva, P. Khaneh Masjedi, P. M. Weaver, "A semi-analytical approach based on the variational iteration method for static analysis of composite beams", *Composite Structures*, vol. 257, 2021, p. 113110.
- [16] S. J. Liao, "The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems", Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [17] S.J. Liao, "Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method", Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [18] S.J. Liao, "On the homotopy analysis method for nonlinear problems", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, 2004, pp. 499–513.
- [19] V. Marinca, N. Herisanu, and I. Nemes, "Optimal homotopy asymptotic method with application to thin film flow", *Central European Journal of Physics*, vol. 6, 2008, pp. 648–653.

- [20] V. Marinca, N. Herisanu, "Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer", *International Communication in Heat and Mass Transfer*, vol. 35, no. 8, 2008, pp. 710–715.
- [21] V. Marinca, and N. Herisanu, "An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth-grade fluid past a porous plate", *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, 2009, pp. 245–251.
- [22] V. Marinca, and N. Herisanu, "Optimal homotopy perturbation method for strongly nonlinear differential equations", *Nonlinear Science Letters A*, vol. 1, no. 3, 2010, pp. 273–280.
- [23] O. Anwar Bég, and O.D. Makinde, "Viscoelastic flow and species transfer in a Darcian high-permeability channel", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, vol. 76, no. 3–4, 2011, pp. 93-99.