



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

Non-invasive Determination of Ankle Rotation Axes Using a Robotic Gyroscopic Mechanism

Reza Arefi^a, Mohammad Hasan Ghasemi^{b,*} , Mohamad Jafar Sadigh^c, Khodabakhsh Javanshir^d

^a PhD Student, Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology.

^b Associate Professor, Mechanical Engineering College, Babol Noshirvani University of Technology.

^c Associate Professor, Mechanical Engineering College, University of Tehran.

^d Associate Professor, Rehabilitation College, Mazandaran University of Medical Science.

PAPER INFO

Paper history:

Received: 13 February 2023

Revised: 24 June 2023

Accepted: 10 July 2023

Keywords:

Ankle Joints,
Rotation Axes,
Rotation Axes
Orientation,
Rotation Matrix,
Rehabilitation,
Rehabilitation Robot.

ABSTRACT

Among four joints of human foot in the ankle area, the tibiotalar and subtalar joints play the most important role in making it possible for the foot to perform rotational movements such that kinematic behavior of foot is almost completely affected by orientation of their rotation axes. Deviation of the axis of rotation from the normal position can impair the function of the ankle and even the lower extremity. In this study, a new non-invasive method has been proposed, through which, using a gyroscopic mechanism, the orientation of the rotation axes of the tibiotalar and subtalar joints can be determined. This method is based on indirect data acquisition from the kinematic behavior of the foot. Using the calculated matrices and through the optimization method, the orientation and position of the rotation axes were respectively calculated at relatively high precision. These results were also assessed in practice by building an ankle mechanical model and a robotic gyroscopic mechanism which is used as a robotic rehabilitation device for ankle rehabilitation. Obtained results show that the maximum error in determining the orientation of the rotation axes is about 2 degrees.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2023.29873.2405>

© 2023 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: mhghasemi@nit.ac.ir

How to cite this article:

Arefi, R., hasan ghasemi, M., Sadigh Damghanizadeh, M. J., & Javanshir, K. (2023). Non-invasive Determination of Ankle Rotation Axes Using a Robotic Gyroscopic Mechanism. *Journal of Modeling in Engineering*, 21(75), 193-204. doi: 10.22075/jme.2023.29873.2405

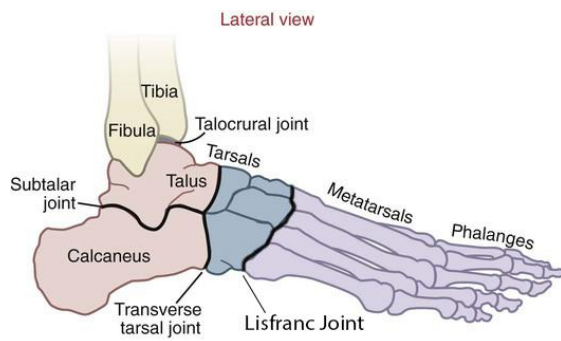
تعیین غیر مخرب محورهای دوران مچ پا با استفاده از یک مکانیزم ژيروسکوپ رباتیک

رضا عارفی^۱، محمد حسن قاسمی^{۲*}، محمدجعفر صدیق دامغانی زاده^۳، خدابخش جوانشیر^۴

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۲۴	
بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۰۳	
پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۱۹	
واژگان کلیدی:	
مفاصل مچ پا،	در میان چهار مفصلی که در ناحیه مچ پای انسان قرار دارد، مفاصل تیبیوتالر و سابتالر بیشترین نقش را در ایجاد امکان لازم برای اجرای حرکات دورانی پا دارا هستند به طوریکه رفتار سینماتیکی پا کاملا تحت تأثیر جهتگیری محورهای دوران این مفاصل است. انحراف این محورهای دوران از وضعیت نرمال باعث می شود تا عملکرد مچ پا و به تبع آن عملکرد پایین تنه دستخوش تغییر شود. در این تحقیق، یک روش غیر مخرب جدید ارائه شده است به طوریکه از طریق آن و با استفاده از یک مکانیزم ژيروسکوپ رباتیک برای داده برداری غیر مستقیم از رفتار سینماتیکی پا، علاوه بر جهتگیری محورهای دوران مفاصل تیبیوتالر و سابتالر می توان موقعیت آنها را نیز تعیین نمود. پس از داده برداری، با محاسبه ماتریسهای دوران و بردار انتقال و انجام عملیات بهینه سازی، جهتگیری و موقعیت محورهای دوران با دقت زیادی محاسبه می شوند. این نتایج با ساخت مدل مکانیکی پا و یک مکانیزم ژيروسکوپ رباتیک که در مرحله توانبخشی مچ پا به عنوان ربات توانبخشی نیز به کار گرفته می شود به صورت عملی مورد ارزیابی قرار گرفت. بر اساس نتایج به دست آمده بیشترین خطا در محاسبه جهتگیری محورهای دوران حدود ۲ درجه است.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2023.29873.2405>

© 2023 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

شکل ۱- مفاصل ناحیه مچ پا

۱- مقدمه

پای انسان در ناحیه مچ دارای چهار مفصل اصلی تحت عنوان تیبیوتالر^۴، سابتالر^۵، میدتارسال^۶، و لیسفرانک^۷ است (شکل ۱) [۱ و ۲]. این مفاصل، پا را قادر به انجام حرکات متنوعی کرده اند. ترکیبی از حرکات درسیفلکشن^۸، ایورژن^۹، و اداکشن^{۱۰} اصطلاحاً "پرونیشن"^{۱۱} و ترکیبی از حرکات پلنتارفلکشن^{۱۲}، اینورژن^{۱۳}، و اداکشن^{۱۴} اصطلاحاً "سوپینیشن"^{۱۵} نامیده می شود (شکل ۲).

⁶ Midtarsal or Tarsal
⁷ Lisfranc
⁸ Dorsiflexion (DF)
⁹ Eversion (EV)
¹⁰ Abduction (Abd)
¹¹ Pronation
¹² Plantarflexion (PF)
¹³ Inversion (IN)
¹⁴ Adduction (Add)
¹⁵ Supination

*پست الکترونیک نویسنده مسئول: mhghasemi@nit.ac.ir

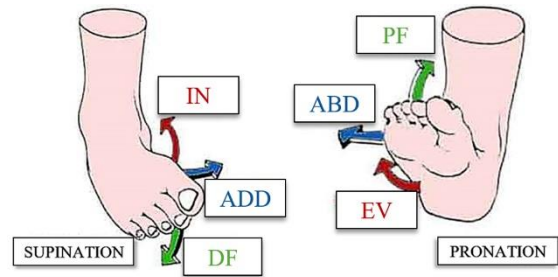
۱. دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
 ۲. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
 ۳. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران
 ۴. دانشیار، دانشکده توانبخشی، دانشگاه علوم پزشکی مازندران

⁴ Tibiotalar or Talocrural⁵ Subtalar

استناد به این مقاله:

عارفی، رضا، حسن قاسمی، محمد، صدیق دامغانی زاده، محمد جعفر، & جوانشیر، خدابخش. (۱۴۰۲). تعیین غیر مخرب محورهای دوران مچ پا با استفاده از یک مکانیزم ژيروسکوپ رباتیک. مدل سازی در مهندسی، ۲۱(۷۵)، ۲۰۴-۱۹۳. doi: 10.22075/jme.2023.29873.2405

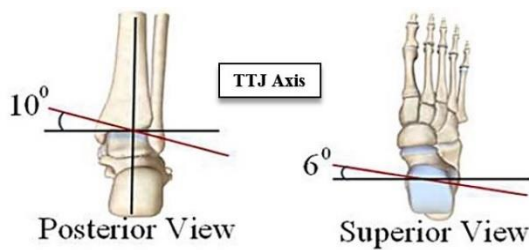
از روش سی تی اسکن انجام شد، تغییر وضعیت نقاط زیادی از استخوانهای پا نسبت به وضعیت مرجع با دقت زیادی اندازه گیری شده و سپس با استفاده از معیار ریاضی حداقل مربعات و تجزیه مقدار تکین موقعیت و جهت محور دوران به گونه ای مشخص می شود که با دوران حول آن، پا از وضعیت مرجع به وضعیت مورد نظر می رسد. بر این اساس، اگر چه جهتگیری محورهای دوران مفاصل تیبیوتالر و سابتالر از فردی به فرد دیگر متفاوت است ولی به طور متوسط برای یک فرد سالم جهتگیری این محورها به طور میانگین در محدوده مشخصی قرار دارند (شکل ۳ و ۴) [۷-۱۳].



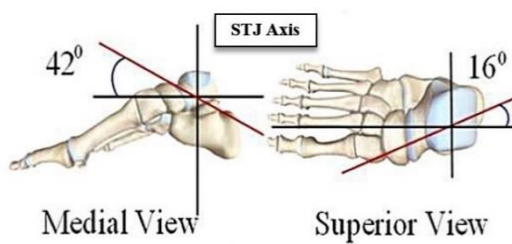
شکل ۲- حرکات ترکیبی پا

وظیفه اصلی مفصل تیبیوتالر ایجاد حرکات درسیفلکشن و پلنٹارفلکس و رسالت اصلی مفصل سابتالر ایجاد حرکات اینورژن/ایورژن و اداکشن/اداگشن می باشد. علاوه بر این مفاصل میدتارسال و لیسفرانک مسئول حرکات و ایجاد انعطاف پذیری لازم در بخش جلویی پا هستند [۲ و ۳ و ۶].

رفتار حرکتی پا به جهتگیری محورهای دوران مفاصل تیبیوتالر و سابتالر وابسته است [۷]. محور دوران در واقع محوری با راستا و موقعیت مشخص است که دوران یک جسم نسبت به جسم دیگر حول آن اتفاق می افتد. جهتگیری یا تمایل سه بعدی این محور معرف میزان حرکات DF/PF، IN/EV، و Abd/Add در هر مفصل می باشد. یکی از معیارهایی که طی سه دهه گذشته مورد توجه خاص قرار داشته بررسی و تعیین جهتگیری سه بعدی این محورهای دوران است. این موضوع از دو جنبه حائز اهمیت است. اول اینکه می تواند معیاری برای تشخیص انحراف داخلی^۱ و انحراف خارجی^۲ محور دوران که منجر به ناهنجاری بیش پرونیشن و بیش سوپینیشن می شود باشد [۶ و ۸] و دومین کارایی آن در طراحی مفصل مصنوعی برای مچ پا است به گونه ای که از نظر سینماتیکی بیشترین تطابق را با مفصل سابتالر واقعی داشته باشد [۹]. تعیین این محور ها به روشهای گوناگونی چون رادیوگرافی، تحلیل حرکت، معاینات دستی، و سی تی اسکن موضوع تحقیق برخی از محققین علم بیومکانیک بوده است. اساس همه این روشها بر تعیین میزان تغییر وضعیت پا نسبت به یک وضعیت مشخص در یک دستگاه مختصات مرجع و سپس تعیین مبداء و محوردوران به گونه ای است که اگر پا حول آن محور دوران کند به وضعیت تعریف شده منطبق خواهد شد. تعیین محور دوران در روشهایی مانند رادیوگرافی یا تحلیل حرکت مبتنی بر استفاده از مارکرهای نصب شده بر روی پوست پا است و در جدیدترین تحقیق که با استفاده



شکل ۳- جهتگیری معمول محور تیبیوتالر



شکل ۴- جهتگیری معمول محور سابتالر

یکی از محدودیتهای روشهای مذکور برای تعیین محورهای دوران این است که اغلب نیازمند مکان و تجهیزات ویژه بوده و اجرای آنها در کلینیک و در اسرع وقت ممکن نیست. علاوه بر این، در بعضی از تحقیقات محور دوران آنی^۳ پا محاسبه شده است که متفاوت از محورهای دوران مفصل مچ پا است و کاربردی در تشخیص ناهنجاری مرتبط با انحراف محورهای دوران ندارد [۵ و ۱۴]. در این تحقیق یک روش غیر مخرب^۴ ارائه شده است که بر اساس آن و با استفاده از یک مکانیزم ژيروسکوپی رباتیک جهتگیری سه بعدی مفاصل تیبیوتالر و سابتالر در زمانی کوتاه و با دقتی مناسب محاسبه شده و بدین ترتیب می توان ناهنجاریهای مرتبط با انحراف این محورها را تشخیص داد. در نتیجه عملیات

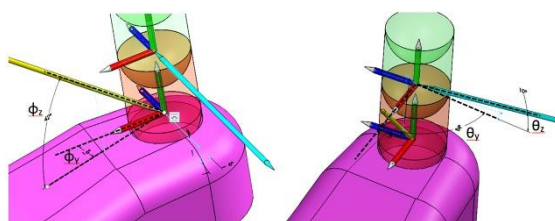
³ Instantaneous Axis of Rotation

⁴ Non-invasive

¹ Medially Deviation

² Laterally Deviation

است.



شکل ۶- پارامترهای لازم برای معرفی جهتگیری محورهای دوران

اگر \hat{T} و \hat{S} به ترتیب معرف بردارهای یکه محورهای دوران تیپوتالر و سابوتالر باشند و \hat{a}_i و \hat{b}_i بیانگر بردارهای یکه دستگاههای مختصات متناسب به چارچوبهای A و B باشند، در اینصورت:

$$\hat{T} = t_1 \hat{a}_1 + t_2 \hat{a}_2 + t_3 \hat{a}_3 \quad (1)$$

$$= \cos(\theta_z) \cos(\theta_y) \hat{a}_1 + \sin(\theta_z) \hat{a}_2 - \cos(\theta_z) \sin(\theta_y) \hat{a}_3$$

$$\hat{S} = s_1 \hat{b}_1 + s_2 \hat{b}_2 + s_3 \hat{b}_3 \quad (2)$$

$$= \cos(\varphi_z) \cos(\varphi_y) \hat{b}_1 + \sin(\varphi_z) \hat{b}_2 - \cos(\varphi_z) \sin(\varphi_y) \hat{b}_3$$

چارچوب A با دوران حول \hat{T} به اندازه α به چارچوب B تبدیل می‌شود (جهتگیری چارچوب B را به خود می‌گیرد) و چارچوب B با دوران حول \hat{S} به اندازه β به چارچوب C تبدیل می‌شود. بنابراین ماتریس دوران دستگاه مختصات چارچوب A به دستگاه مختصات چارچوب C برای پا به صورت زیر قابل محاسبه است [۱۵].

(۳)

$${}^A R^B = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 & 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \varepsilon_4) & 2(\varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) & \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_4^2 & 2(\varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_4) & \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

(۴)

$${}^B R^C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + \lambda_4^2 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3 \lambda_4) & 2(\lambda_3 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_4) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_4) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2 + \lambda_4^2 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4) \\ 2(\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_4) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_4^2 \end{bmatrix}$$

در اینجا ε و λ پارامترهای اوپلر هستند که بر اساس مؤلفه‌های بردارهای یکه محورهای دوران به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\varepsilon_i = t_i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_4 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

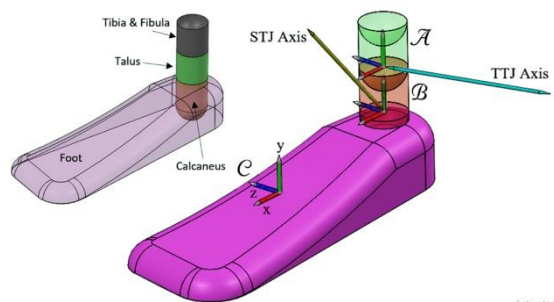
$$\lambda_i = s_i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

توانبخشی لازم برای بیمار تدوین و توسط همان مکانیزم ژيروسکوپی این بار در نقش یک وسیله توانبخشی رباتیک اجرا می‌شود تا توانایی مچ پا بازیابی شود. زمان کوتاه، دقت مناسب، و دومنظوره بودن وسیله از مزایایی هستند که می‌توانند منجر به استفاده فراگیر این وسیله رباتیک در کلینیکهای توانبخشی شود.

۲- روشها

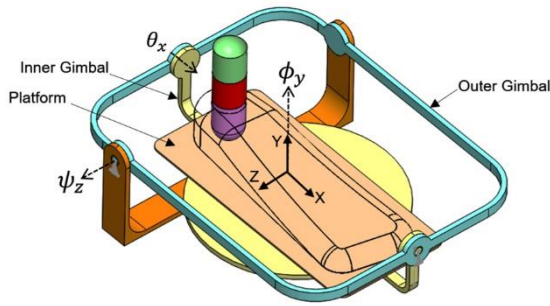
۲-۱- مبانی تئوری

پا و مفاصل مچ پا را می‌توان به صورت یک زنجیره دو لینکی سریال با دو مفصل که معرف مفاصل تیپوتالر و سابوتالر هستند در نظر گرفت (شکل ۵). استخوان تیبیا به عنوان لینک ثابت A، استخوان تالوس به عنوان لینک B، و استخوان کلکانئوس به عنوان لینک C در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که در بررسی محورهای دوران می‌توان پا را به صورت یک جسم صلب در نظر گرفت لذا لینک C معرف پا نیز می‌باشد [۱۱]. دستگاههای مختصات متناسب به چارچوبهای A و B و C در شکل (۵) نشان داده شده‌است.



شکل ۵- مدل سینماتیکی مچ پا

جهتگیری محور دوران تیپوتالر (TTJ Axis) در فضای سه بعدی با زوایای θ_y و θ_z تعریف می‌شود به طوری که θ_y زاویه تصویر عمودی محور دوران در صفحه X-Z با جهت مثبت محور X و θ_z زاویه محور دوران با صفحه X-Z است (شکل ۶). همچنین جهتگیری محور دوران سابوتالر (STJ Axis) با زوایای φ_y و φ_z تعریف می‌شود که φ_y زاویه تصویر عمودی محور دوران در صفحه X-Z با جهت مثبت محور X و φ_z زاویه محور دوران با صفحه X-Z است (شکل ۶). حرکت تالوس به عنوان چارچوب B نسبت به چارچوب A حول محور دوران تیپوتالر به اندازه α مبین حرکت مفصل تیپوتالر و حرکت کلکانئوس به عنوان چارچوب C نسبت به تالوس یا همان چارچوب B حول محور دوران سابوتالر به اندازه β مبین حرکت مفصل سابوتالر



شکل ۷- مکانیزم ژيروسکوپ

پلاتفرم مکانیزم به گونه‌ای است که علاوه بر دوران حول محور y ، قادر است در راستای x ، y و z آزادانه حرکت نماید. اگر جیمبالهای خارجی و داخلی در زوایای معینی قرار داده شوند لذا زاویه دورانی و جابجایی پلاتفرم بر اساس جهتگیری و موقعیت محورهای دوران مدل را تنظیم می‌شوند. با اندازه‌گیری دوران پلاتفرم و همچنین داشتن مقادیر زوایای جیمبالهای خارجی و داخلی یک دسته زاویه خواهیم داشت که بر اساس آنها می‌توان ماتریس دوران پلاتفرم یعنی $R_{Platform}^C$ را محاسبه نمود. از آنجا که لینک C به پلاتفرم مقید شده است بنابراین ماتریس دوران پا یعنی R_{Foot}^C با ماتریس دوران پلاتفرم مساوی است. با قرار دادن جیمبالهای خارجی و داخلی در زوایای گوناگون و اندازه‌گیری دوران پلاتفرم، دسته زوایای متعدد و متعاقباً ماتریس‌های دوران متعدد برای پلاتفرم خواهیم داشت که با $R_{Pi} \cdot i = 1, 2, \dots, n$ معرفی می‌شوند. همچنین n ماتریس دوران برای پا وجود دارد که با $R_{Fi} \cdot i = 1, 2, \dots, n$ معرفی می‌شوند به طوریکه:

$$R_{Fi} \ni r_{Fipq} = f_{ik}(\theta_z, \theta_y, \phi_z, \phi_y, \alpha_i, \beta_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad p, q = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, 9$$

به این معنی که درایه‌های ماتریس دوران پا تابعی از جهتگیری محورهای دوران و میزان دوران حول این محورها هستند. تعیین محورهای دوران یعنی محاسبه مقادیر $\theta_y, \theta_z, \phi_y, \phi_z$ و تعیین مقدار دوران حول آنها به معنی محاسبه β_i و α_i است. این یک مسأله بهینه‌سازی است به طوریکه برای حل آن لازم است مقدار زیر برای هر ماتریس دوران پلاتفرم و پا مینیمم شود.

$$\begin{cases} n_i = \|M_i\|_f^2 = \|R_{Pi} - R_{Fi}\|_f^2 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

بر این اساس، با جایگذاری عبارات فوق در ماتریس‌های مربوطه ماتریس دوران دستگاه مختصات چارچوب A به دستگاه مختصات چارچوب C و درایه‌های آن به صورت زیر است:

$$R_{Foot}^C = R^A R^B R^C \quad (5)$$

بقسمی که:

$$(R_{Foot}^C)_{ij} = f_{ij}(\theta_y, \theta_z, \phi_y, \phi_z, \alpha, \beta) \quad (6)$$

در مسأله سینماتیک مستقیم، با داشتن مقادیر θ_y, θ_z و ϕ_y, ϕ_z که به ترتیب بیانگر جهتگیری محورهای دوران تیپوتالر و سابتالر هستند و همچنین زوایای α, β که بیانگر میزان دوران حول محورهای مذکور هستند می‌توان ماتریس دوران پا را محاسبه نمود. اما هدف اصلی این است که با در اختیار داشتن یک مدل ناشناخته از پا بتوان جهتگیری محورهای دوران آن یا همان مقادیر $\theta_y, \theta_z, \phi_y, \phi_z$ را تعیین نمود. اگر بتوان ماتریس دوران پا را در وضعیت‌های مختلف محاسبه نمود می‌توان به مقادیر مجهول دسترسی پیدا کرد. برای این منظور یک مکانیزم مناسب لازم است به گونه‌ای که بتوان جهتگیری‌های معینی را برای آن ایجاد نمود. اگر در حالیکه لینک A از مدل پا ثابت است، لینک C به این مکانیزم وصل شده باشد در اینصورت جهتگیری و جابجایی پا با جهتگیری و جابجایی مکانیزم یکسان خواهد شد که در این صورت ماتریس دوران مکانیزم و پا معادل یکدیگر می‌شوند. این مکانیزم می‌تواند یک مکانیزم ژيروسکوپ باشد (شکل ۷) به طوریکه جیمبال خارجی قادر به دوران حول محور z (Pitch) و به میزان ψ_z ، جیمبال داخلی قادر به دوران حول محور x (Roll) و به اندازه θ_x ، و پلاتفرم مرکزی قادر به دوران حول محور y (Yaw) و به اندازه ϕ_y باشد (توجه شود که این ϕ_y مربوط به مکانیزم ژيروسکوپ است و متفاوت از ϕ_y تعریف شده برای تعیین جهتگیری محور دوران سابتالر است) در اینصورت ماتریس دوران این مکانیزم به صورت زیر است:

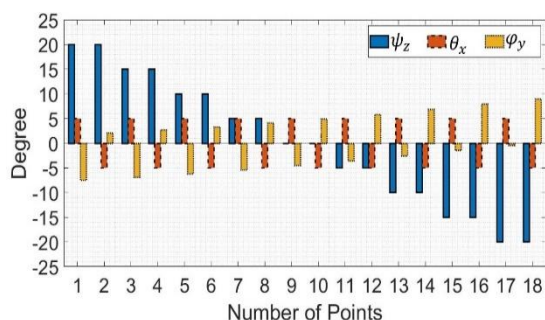
$$R_{Platform}^C = R_{Z,\psi} R_{X,\theta} R_{Y,\phi} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\psi)\cos(\phi) + \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\psi)\cos(\theta) & \sin(\psi)\sin(\phi) - \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ -\cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

جدول ۱- محورهای دوران در آزمایش اول

	Tibiotalar Axis		Subtalar Axis	
	θ_z	θ_y	ϕ_z	ϕ_y
تنظیم شده	10°	79°	42°	22°
محاسبه شده	10.035°	78.992°	41.9°	22.605°

در شکل (۹) داده‌های مربوط به مکانیزم ژيروسکوپي بر حسب درجه در حالیکه محورهای دوران مدل پا به صورت $\theta_y = 90^\circ, \theta_z = 10^\circ$ و $\phi_y = 30^\circ, \phi_z = 42^\circ$ تنظیم شده‌اند نشان داده شده‌است.



شکل ۹- داده‌های حاصل از مدلسازی سه بعدی در آزمایش دوم

با انجام عملیات بهینه سازی، جهتگیری محورهای دوران به صورتی که در جدول ۲ نشان داده شده‌است به دست می‌آیند.

جدول ۲- محورهای دوران در آزمایش دوم

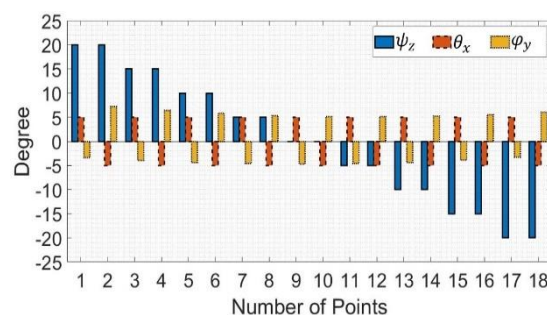
	Tibiotalar Axis		Subtalar Axis	
	θ_z	θ_y	ϕ_z	ϕ_y
تنظیم شده	10°	90°	42°	30°
محاسبه شده	10.016°	89.986°	42.019°	29.86°

در این رابطه منظور از $\|M_i\|_F^2$ مجذور نرم فروبنیوس ماتریس M_i است که معادل مجموع مجذورات درایه‌های ماتریس می‌باشد.

چون مقادیر $\theta_y, \theta_z, \phi_y, \phi_z$ برای همه ماتریس‌های دوران پا یکسان هستند مینیمم کردن n_i ها به صورت جداگانه جواب مناسب را نتیجه نمی‌دهد. برای این منظور N را به صورت زیر تعریف کرده و مسأله بهینه‌سازی را به صورت مینیمم کردن N طرح می‌کنیم.

$$N = \sum_{i=1}^{13} n_i, \min(N) \quad (9)$$

هر چه n بیشتر باشد تعیین جهتگیری محورهای دوران نیز دقیقتر خواهد بود. برای بررسی اولیه روش ارائه شده، ابتدا جهتگیری معینی به محورهای دوران مدل پا در نرم‌افزار مدلسازی کامپیوتری سه بعدی (SolidWorks) اعمال می‌شود. سپس زوایای مختلفی به جیمبالهای مکانیزم ژيروسکوپي مدل شده در نرم‌افزار کامپیوتری اعمال و دوران پلاتفرم در نرم‌افزار اندازه‌گیری می‌گردد. با جمع‌آوری داده‌های مربوط به مکانیزم ژيروسکوپي عملیات بهینه‌سازی توسط نرم‌افزار Maple و دستور Minimize انجام و جهتگیری محورهای دوران محاسبه می‌شود. در شکل (۸) داده‌های مربوط به مکانیزم ژيروسکوپي بر حسب درجه در حالیکه محورهای دوران مدل پا به صورت $\theta_y = 79^\circ, \theta_z = 10^\circ$ و $\phi_y = 22^\circ, \phi_z = 42^\circ$ تنظیم شده‌اند نشان داده شده‌است.



شکل ۸- داده‌های حاصل از مدلسازی سه بعدی در آزمایش اول

با انجام عملیات بهینه سازی، جهتگیری محورهای دوران به صورتی که در جدول ۱ نشان داده شده‌است به دست می‌آیند. همچنین مقادیر زوایای α_i, β_i نیز محاسبه می‌شود.

همانطور که در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود چارچوبهای متصل به استخوان تالوس و کلکانوس به ترتیب B و C و مبدأ آنها b و c نامگذاری شده‌اند. بر این اساس اگر نماد $\left[\begin{matrix} \rightarrow \\ V \end{matrix} \right]_F$ را به معنی مؤلفه‌های بردار \vec{V} نسبت به چارچوب (A یا B یا C) تعریف کنیم، داریم:

$$\left[\begin{matrix} \rightarrow \\ ab \end{matrix} \right]_A = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = const, \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ bc \end{matrix} \right]_B = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = const$$

$$\left[\begin{matrix} \rightarrow \\ cP \end{matrix} \right]_C = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = const, \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ aP \end{matrix} \right]_A = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^A H^C \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

بقسمی که:

$${}^A H^C = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$M_1 = {}^A R^C$$

$$M_2 = {}^A R^B \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ bc \end{matrix} \right]_B + \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ ab \end{matrix} \right]_A$$

$$M_3 = [0 \ 0 \ 0]$$

مختصات نقاط P و c و b به ترتیب نسبت به چارچوبهای C و B و A همواره ثابت است. بنابراین لازم است $\left[\begin{matrix} \rightarrow \\ cP \end{matrix} \right]_C$ و $\left[\begin{matrix} \rightarrow \\ ab \end{matrix} \right]_A$ و $\left[\begin{matrix} \rightarrow \\ bc \end{matrix} \right]_B$ به گونه‌ای تعیین شوند که رابطه فوق برای داده‌های حاصل از بردار جابجایی P صادق باشد. برای این منظور کمیتهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{matrix} n_i = \left\| \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}_i - {}^A H^C \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}_f \right\|^2 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right. \quad (11)$$

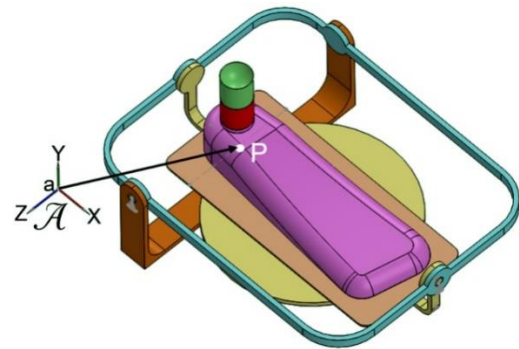
$$\left\{ \begin{matrix} N = \sum_{i=1}^n n_i \\ L_1 = \left\| \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ bc \end{matrix} \right]_B \right\| \\ L_2 = \left\| \left[\begin{matrix} \rightarrow \\ cP \end{matrix} \right]_C \right\| \end{matrix} \right. \quad (12)$$

بنابراین مسأله بهینه‌سازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min(N) \ni \{L_1 + L_2 \leq d\}$$

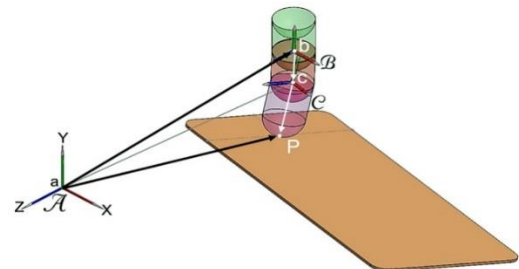
کمیت d که در قید بهینه‌سازی آورده شده‌است در واقع به

بنابراین ملاحظه می‌شود که با استفاده از داده‌برداری از زوایای مکانیزم ژيروسکوپ می‌توان جهتگیری محورهای دوران را محاسبه نمود. پس از تعیین جهتگیری محورهای دوران می‌توان موقعیت آنها را نیز تعیین نمود. برای این منظور ابتدا یک دستگاه مختصات مرجع ثابت تحت عنوان A در مدل سه بعدی تهیه شده در نرم‌افزار در نظر گرفته و بردار موقعیت یک نقطه مشخص از پلاتفرم متصل به پا را نسبت به دستگاه مختصات مرجع مورد سنجش قرار می‌دهیم. برای این منظور هر نقطه‌ای را از پلاتفرم می‌توان انتخاب نمود که در اینجا نقطه‌ای که در زیر پاشنه قرار دارد و با مراکز دوران واقعی مفاصل در امتداد محور Y قرار دارند انتخاب شده‌است. این نقطه را P نامگذاری می‌کنیم (شکل ۱۰).



شکل ۱۰- موقعیت یک نقطه در چارچوب مرجع

در مرحله بعد لازم است حرکات مشخصی به مکانیزم ژيروسکوپ اعمال کرده و جابجایی نقطه P از پلاتفرم را که متناظر با جابجایی پا است اندازه‌گیری نمود. برای این منظور حرکات اینورژن/ایورژن و درسیفلکشن/پلنتارفلکشن مشخص را در بازه‌های ۵ درجه به پا اعمال کرده و داده‌های مربوط به بردار جابجایی نقطه P ثبت می‌شود. در مرحله بعد، بردار مکان نقطه P با توجه به مدل سینماتیکی که در قسمتهای قبل در نظر گرفته شد و به واسطه ماتریس انتقال همگن محاسبه کرده به طوریکه موقعیت مراکز دوران مجهول در نظر گرفته می‌شود.

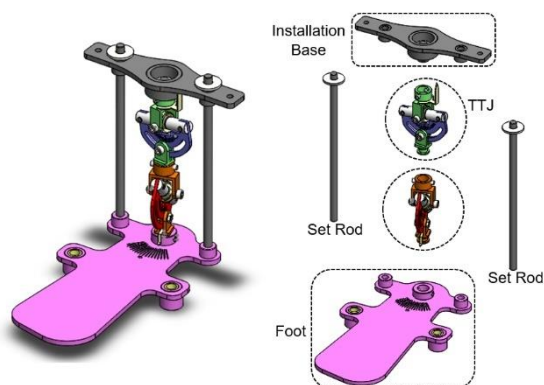


شکل ۱۱- موقعیت برداری نقطه P در مدل سینماتیکی

بنابراین با استفاده از این رهیافت می‌توان علاوه بر تعیین جهتگیری محورهای دوران موقعیت آنها را نیز با دقت مناسبی تعیین نمود.

۲-۲- مدل مکانیکی مچ پا

در قسمتهای قبل ایده‌ای برای تعیین جهتگیری و موقعیت محورهای دوران مطرح شد. به منظور اعتبارسنجی این ایده لازم است ابتدا یک مدل مکانیکی شبیه آنچه در معرفی ایده مطرح شد برای مفاصل مچ پا داشته باشیم تا از طریق آن بتوان آزمایشات لازم را انجام داد. مدل باید هر دو مفصل تیبتوتالر و ساب‌تالر را دارا باشد و علاوه بر این باید بتوان جهتگیری محورهای دوران این مفاصل را جداگانه تنظیم نمود. برای این منظور مدل نشان داده شده در شکل ۱۲ معرفی می‌شود. از نظر ساختار مکانیکی هر دو مفصل تیبتوتالر^۱ و ساب‌تالر^۲ در این مدل کاملاً شبیه یکدیگر هستند ولی هر یک به طور جداگانه تنظیم و عملکرد مفصل مورد نظر را شبیه‌سازی می‌کنند. پایه نصب^۳ عضوی است که از آن برای نصب مدل مکانیکی در محلی مشخص برای انجام آزمایشات لازم استفاده می‌شود. برای تنظیم جهتگیری محورهای دوران مفاصل لازم است ابتدا مدل پا در وضعیت عمودی اولیه قرار داده شود. برای این منظور از میله‌های تنظیم^۴ استفاده می‌شود. پس از تنظیم جهتگیری محورهای دوران، میله‌های مذکور از مدل جدا می‌شوند. برای تنظیم جهتگیری محورهای دوران، صفحات مدرج و شاخصهایی در محل‌های مناسب نصب شده‌است تا به کمک آنها بتوان زوایا را برای رسیدن به جهتگیری دلخواه اعمال نمود.



شکل ۱۲- مدل مکانیکی مچ پا

این موضوع اشاره می‌کند که فاصله مرکز دوران تیبتوتالر تا نقطه P که کف پاشنه پا است نباید از این مقدار کمتر باشد. در عمل حداقل این مقدار با اندازه‌گیری فاصله میان قوزک داخلی، که معمولاً بالاتر از قوزک خارجی است، تا کف پا مشخص می‌شود. در مدل سه بعدی که به عنوان معیار تهیه شده‌است این مقدار ۷۵ میلی‌متر است لذا d نباید کمتر از این مقدار باشد. اگر مبدأ دستگاه مختصات مرجع A را به نقطه $\begin{bmatrix} 100 \\ 40 \\ -125 \end{bmatrix}$ (نسبت به دستگاه مختصات A) منتقل کنیم، پس از حل مسأله بهینه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و توسط دستور fmincon و به صورت GlobalSearch، جوابهای زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ ab \end{bmatrix}_A^{Cal} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 74.94 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ bc \end{bmatrix}_B^{Cal} = \begin{bmatrix} -0.72 \\ -30.65 \\ -0.08 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ cP \end{bmatrix}_C^{Cal} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -44.29 \\ -0.21 \end{bmatrix}$$

موقعیت این نقاط در چاقوب A به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ ab \end{bmatrix}_A^{Cal} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 74.94 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ ac \end{bmatrix}_A^{Cal} = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ ab \end{bmatrix}_A^{Cal} + \begin{bmatrix} \rightarrow \\ bc \end{bmatrix}_A^{Cal} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 44.29 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ aP \end{bmatrix}_A^{Cal} = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ ac \end{bmatrix}_A^{Cal} + \begin{bmatrix} \rightarrow \\ cP \end{bmatrix}_A^{Cal} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به این مقادیر، مقدار خطا به صورت زیر است:

$$e_b = \left\| \begin{bmatrix} \rightarrow \\ ab \end{bmatrix}_A^{Act} - \begin{bmatrix} \rightarrow \\ ab \end{bmatrix}_A^{Cal} \right\| = 0.3 \text{ mm}$$

$$e_c = \left\| \begin{bmatrix} \rightarrow \\ ac \end{bmatrix}_A^{Act} - \begin{bmatrix} \rightarrow \\ ac \end{bmatrix}_A^{Cal} \right\| = 1.05 \text{ mm}$$

$$e_p = \left\| \begin{bmatrix} \rightarrow \\ aP \end{bmatrix}_A^{Act} - \begin{bmatrix} \rightarrow \\ aP \end{bmatrix}_A^{Cal} \right\| = 0 \text{ mm}$$

³ Installation Base

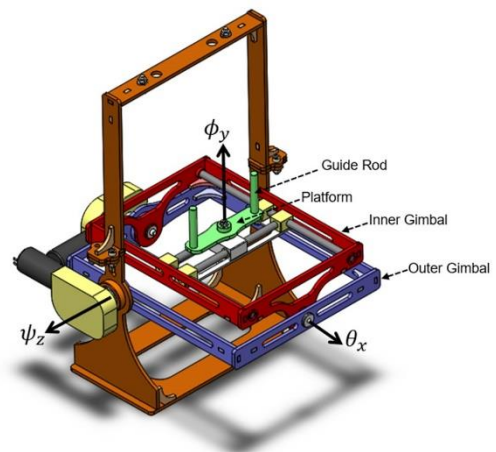
⁴ Set Rod

¹ TTJ

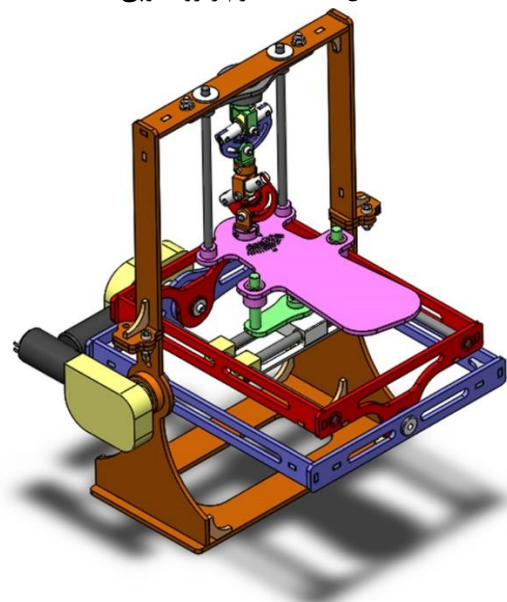
² STJ

۳-۲- مکانیزم ژيروسکوپي

مکانیزم ژيروسکوپي که از آن برای اعمال حرکت به مدل مکانیکی پا استفاده می‌شود به صورتی است که در شکل ۱۳ نشان داده شده‌است. در این مکانیزم جیمبال خارجی حول محور Z، جیمبال داخلی حول محور X، و پلاتفرم حول محور Y دوران می‌کنند. همچنین این امکان برای پلاتفرم ایجاد شده تا در راستای X و Z حرکت کند و حرکت در راستای Y به صورت لغزش پا بر روی میله‌های راهنمای پلاتفرم ایجاد می‌شود. بر این اساس با قرار دادن مدل پا بر روی مکانیزم ژيروسکوپي می‌توان با اعمال حرکت به مکانیزم از رفتار سینماتیکی پا داده‌برداری نموده و جهتگیری و سپس موقعیت محورهای دوران را محاسبه نمود (شکل ۱۴).



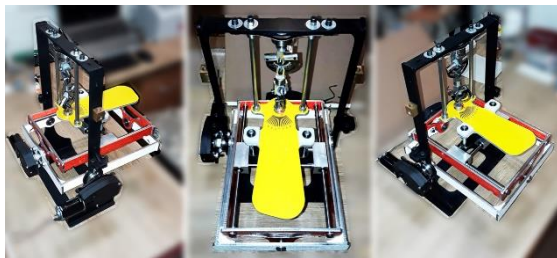
شکل ۱۳- مکانیزم ژيروسکوپي



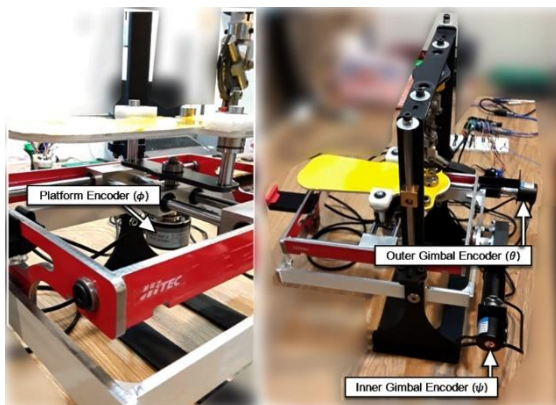
شکل ۱۴- نصب مدل مچ بر روی مکانیزم

۳- نتایج عملی

شکل (۱۵) مدل مکانیکی مچ پا و مکانیزم ژيروسکوپي ساخته شده را با اندکی اصلاح نسبت به مدل‌های طراحی شده نشان می‌دهد. به منظور اعمال حرکت دورانی به جیمبال‌های خارجی و داخلی مکانیزم ژيروسکوپي از دو موتور DC با گیربکس حلزونی با نسبت تبدیل ۱:۵۴۸ استفاده شده است. به منظور اندازه‌گیری میزان دوران جیمبال‌ها دو شافت انکودر دورانی با قابلیت تولید ۳۶۰ پالس در هر دور به موتورها متصل شده است. همچنین برای اندازه‌گیری میزان دوران پلاتفرم یک شافت انکودر دورانی با قابلیت تولید ۱۰۲۴ پالس در هر دور به شافت متصل به آن کوپل شده است (شکل ۱۶).



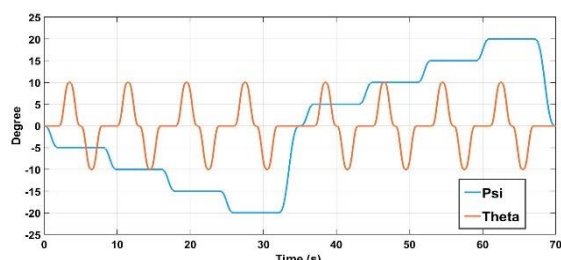
شکل ۱۵- مکانیزم و مدل مکانیکی ساخته شده



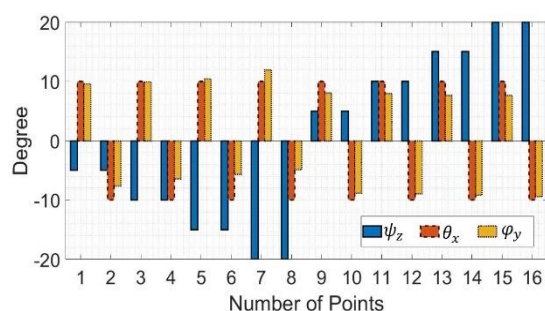
شکل ۱۶- موتور-گیربکس‌ها و شافت انکودرهای مربوطه

برای برنامه‌ریزی و راه‌اندازی موتورهای DC و انکودرها از یک برد آردوینو مدل Mega2560 و درایور L298N استفاده شد. الگوریتم استفاده شده در کتابخانه انکودر برد آردوینو این قابلیت را ایجاد می‌کند تا تعداد پالسهای انکودر به ازاء هر دور تا ۴ برابر مقدار نامی افزایش پیدا کند. بر این اساس تعداد پالس در دور برای انکودر موتورها (جیمبال‌ها) معادل 4*360 و برای انکودر پلاتفرم معادل 4*1024 است. بنابراین انکودر موتورها قادر به تعیین میزان دوران با تفکیک پذیری 0.25 درجه و انکودر پلاتفرم با تفکیک پذیری حدود 0.09 درجه می‌باشند.

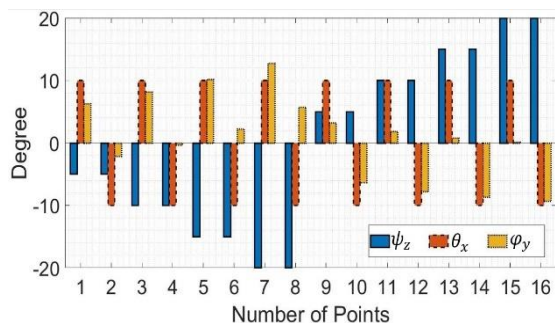
(۲۰) به ترتیب برای جهتگیری آزمایش اول و آزمایش دوم نشان داده شده است.



شکل ۱۸- الگوی حرکتی مکانیزم ژيروسکوپی



شکل ۱۹- داده‌های آزمایش عملی اول



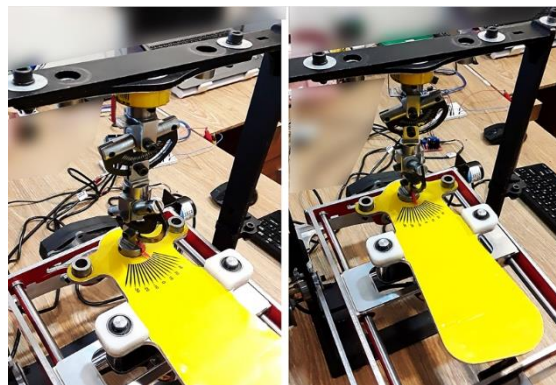
شکل ۲۰- داده‌های آزمایش عملی دوم

در مرحله بعد عملیات بهینه‌سازی به منظور تعیین جهتگیری محورهای دوران انجام شد. نتایج به ترتیب در جداول ۳ و ۴ و شکل‌های (۲۱) و (۲۲) نشان داده شده است.

جدول ۳- نتایج آزمایش اول

	Tibiotalar Axis		Subtalar Axis	
	θ_z	θ_y	ϕ_z	ϕ_y
تنظیم شده	10°	85°	40°	15°
محاسبه شده	11.42°	83.7°	39.77°	12.39°

برای انجام آزمایش ابتدا لازم است جهتگیری محورهای دوران مدل مکانیکی مچ پا مشخص شوند. در آزمایش اول این محورها به صورت $\theta_z = 40^\circ$ ، $\theta_y = 15^\circ$ ، $\psi_z = 10^\circ$ و $\psi_y = 85^\circ$ در آزمایش دوم به صورت $\theta_z = 25^\circ$ ، $\theta_y = 5^\circ$ ، $\psi_z = 25^\circ$ و $\psi_y = 70^\circ$ تنظیم شدند (شکل ۱۷).



شکل ۱۷- تنظیم جهتگیری محورهای دوران

در مرحله بعد لازم است داده‌های مربوط به جهتگیری پلاتفرم استخراج شود به این معنی که در اثر اعمال زوایای معین به جیمبالهای خارجی و داخلی زاویه پلاتفرم که در تماس مستقیم با مدل مکانیکی مچ پا است رصد گردد. برای این منظور می‌توان جیمبالهای داخلی و خارجی را مطابق یک الگو به حرکت واداشت و سپس زوایای جیمبالها و پلاتفرم را از طریق انکودرهای مربوطه ثبت نمود. این الگو می‌تواند به هر صورتی باشد آنچه اهمیت دارد استخراج زاویه پلاتفرم به ازاء یک زوج از زوایای جیمبالها می‌باشد که تشکیل یک مجموعه سه تایی به صورت $S_i = (\psi_i, \theta_i, \phi_i)$ می‌دهد. برای تحلیل جهتگیری محورهای دوران به تعدادی از این مجموعه‌ها در قالب یک مجموعه به صورت $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ نیاز است که هر چه n بیشتر باشد به قیمت افزایش حجم محاسبات تحلیل از دقت بیشتری برخوردار خواهد شد. الگوی حرکتی که در اینجا طراحی شده به این صورت است که جیمبال خارجی حرکتی با گام 5 درجه در جهات مثبت و منفی انجام می‌دهد و در هر گام جیمبال داخلی در بازه 10- تا 10 درجه دوران می‌کند (شکل ۱۸). داده‌های مربوط به این حرکات و حرکت پلاتفرم از طریق پورت سریال استخراج و برای تحلیل جهتگیری محورهای دوران مورد استفاده قرار می‌گیرند. در اینجا یک مجموعه با ۱۶ دسته به صورت $S = \{S_1, S_2, \dots, S_{16}\}$ انتخاب شد که در شکل‌های (۱۹) و

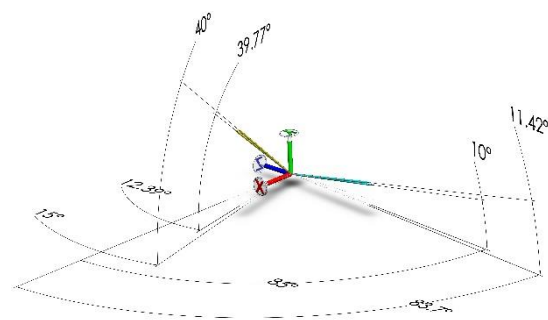
درجه انحراف دارد. در آزمایش دوم این مقادیر به ترتیب ۰.۶۲ و ۰.۴۹ درجه هستند. این اختلاف می‌تواند ناشی از لقی و خطاهای ناشی از ساخت در مدل مکانیکی پا باشد که باعث می‌شود محورهای دوران تنظیم شده با محورهای دوران واقعی اختلاف پیدا کند. علاوه بر این تنظیم دستی جهتگیری محورهای دوران مدل مکانیکی مچ پا نیز می‌تواند از دیگر دلایل در ایجاد خطا باشد.

۴- نتیجه‌گیری

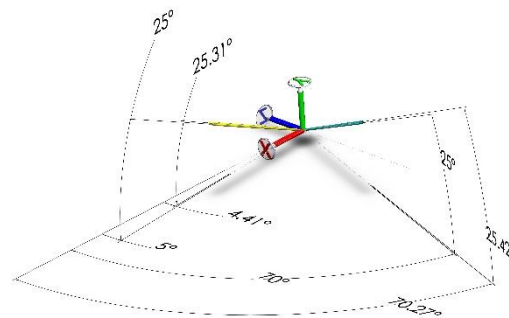
در این طرح یک روش جدید برای تعیین جهتگیری و موقعیت محورهای دوران مفاصل مچ پا ارائه شد. بررسیهای تئوری نشان داد این روش نوآورانه، که به صورت غیر مخرب و تنها بر مبنای پایش رفتار سینماتیکی پا و محاسبه ماتریسهای دوران و هموزن آن است، قادر است جهتگیری و موقعیت محورهای دوران را با دقتی زیاد تعیین نماید. در بررسیهای عملی مشخص شد که با صرفنظر کردن از خطاهای ساخت مدل مکانیکی پا می‌توان با دقت خوبی محورهای دوران را محاسبه نمود. بدین ترتیب بدون نیاز به تجهیزات پیچیده و صرف وقت و هزینه زیاد می‌توان با استفاده از یک وسیله رباتیک ساده، کم حجم، و ارزان که به سادگی قادر است در کلینیکهای توانبخشی مورد استفاده قرار گیرد می‌توان علاوه بر تعیین جهتگیری محورهای دوران که معیاری از ناهنجاری ایجاد شده در مچ پا است عملیات توانبخشی لازم را نیز برای مچ انجام داد. توسعه مدل سینماتیکی ارائه شده برای مچ پا بطوریکه معادلات ریاضی حاکم بر آن تطابق بیشتری با رفتار سینماتیکی پا داشته باشد، بهبود مکانیزم ژيروسکوپ، محاسبه موقعیت محورهای دوران علاوه بر جهتگیری آنها، انجام آزمایش بر روی مچ پای انسان، و کنترل دستگاه برای انجام عملیات توانبخشی علاوه بر اندازه‌گیری جهتگیری محورهای دوران مچ پا از جمله کارهایی خواهند بود که در دستور کار برای آینده قرار دارند.

جدول ۴- نتایج آزمایش دوم

	Tibiotalar Axis		Subtalar Axis	
	θ_z	θ_y	ϕ_z	ϕ_y
تنظیم شده	25°	70°	25°	5°
محاسبه شده	25.42°	70.27°	25.31°	4.41°



شکل ۲۱- ترسیم محورهای دوران در آزمایش اول



شکل ۲۲- ترسیم محورهای دوران در آزمایش دوم

بر اساس این نتایج، در آزمایش اول جهتگیری محاسبه شده برای محور دوران ساب‌تالار نسبت به جهتگیری تنظیم شده ۲.۰۶ درجه انحراف و جهتگیری محاسبه شده برای محور دوران تیبیوتالار نسبت به جهتگیری تنظیم شده ۱.۹۱

مراجع

- [1] Bahler. A. "The biomechanics of the foot", Clinical Prosthetics and Orthotics 10. no.1 (1986): 8-14.
- [2] Brocket. C.and G Chapman, "Biomechanics of the ankle", ORTHOPAEDICS AND TRAUMA 30. No 3. (2016): 232-238.
- [3] Donatelli. R. "Normal biomechanics of the foot and ankle", The Journal Of Orthopaedic And Sports Therapy (JOSPT) 7. No 3. (1985): 91-95.
- [4] Fernandez. M. et al, "Centre of rotation of the human subtalar joint using weight bearing clinical computed tomography", SCIENTIFIC REPORTS 10. no 1035 (2020): 1-14.

- [5] Kelly. N. M Daniel. E Thomas. and J Denis, "Development of a Robotic Assembly for Analyzing the Instantaneous Axis of Rotation of the Foot Ankle Complex", Applied Bionics and Biomechanics. 2016.
- [6] Kirby. K. "Biomechanics of the normal and abnormal foot", Journal Of The American Podiatric Medical Association 90. no. 1 (2000): 30-34.
- [7] Kirby. K. "Methods for determination of positional variations in the subtalar joint axis", Journal Of The American Podiatric Medical Association 77. no 5 (1987): 228-234.
- [8] Kirby. K. "Subtalar joint axis location and rotational equilibrium theory of foot function", Journal Of The American Podiatric Medical Association 91. no 9. (2001): 465-487.
- [9] Leardini. A. J. O'Connor. and S. Giannini, "Biomechanics of the natural, arthritic, and replaced human ankle joint", Journal of Foot and Ankle Research 7. no 8. (2014): 1-16.
- [10] Lewis. G. et al, "Determination of subtalar joint axis location by restriction of talocrural joint motion", Gait & Posture 25. (2007): 63-69.
- [11] Lundberg. A. "Kinematics of the ankle and foot in vivo roentgen stereophotogrammetry", Acta Orthopaedica Scandinavica Supplementum 60. no 233. (1989): 1-24.
- [12] Neumann. D.A. "Kinesiology of the musculoskeletal system".3rd ed. Mosby. 2016.
- [13] Spooner. S. and K Kirby. "The subtalar joint axis locator", Journal Of The American Podiatric Medical Association 96, no 3 (2006): 212-219.
- [14] Takemura. H. T Onodera. D Ming and H Mizugochi, "Design and Control of a Wearable Stewart Platform-Type Ankle-Foot Assistive Device", International Journal of Advanced Robotic Systems 9. no 202. (2012).
- [15] Kane. T.R. P.W Likins. and D.A Levinson. "Spacecraft Dynamics", 1st ed., McGraw-Hill, NY, USA, 1993.