



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

A Modified Grey Wolf Algorithm with Applications to Engineering

Vahid Mahboub ^{a,*}

^a Department of Surveying Engineering, Faculty of Engineering, Golestan University, Aliabad Katoul, Iran

PAPER INFO

Paper history:

Received: 03 February 2023

Revised: 31 August 2023

Accepted: 10 September 2023

Keywords:

GWO,
Nonlinear model,
Optimization,
Decreasing factor.

ABSTRACT

In this contribution, a modified gray wolf algorithm for use in engineering applications is presented. The grey wolf algorithm is one of the meta-heuristic optimization methods that has recently been widely used by researchers due to its good capabilities. The mechanism is free of derivation, simple in execution and implementation, and only needs target function as input of the problem, among other things that make the gray wolf algorithm popular and of interest. But the problem that can be mentioned about it is that the decreasing factor used in it is linear and in some non-linear problems, it may cause more error or late convergence to the original solution. This bottleneck is solved by presenting a modified grey wolf algorithm. Then the results are compared in the form of an applied numerical example in engineering sciences with the classic grey wolf algorithm and some similar proposed coefficients to determine the efficiency of the modified algorithm.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2023.29814.2401>

© 2024 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: v.mahboub@gu.ac.ir

How to cite this article:

Mahboub, V. (2024). A modified grey wolf algorithm with applications to engineering. *Journal of Modeling in Engineering*, 22(76), 189-195. doi: 10.22075/jme.2023.29814.2401

یک الگوریتم اصلاح شده گرگ خاکستری برای کاربردهای مهندسی

وحید محبوب^{۱*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۱۴	در این مقاله یک الگوریتم اصلاح شده گرگ خاکستری جهت استفاده در کاربردهای مهندسی ارائه می‌گردد. الگوریتم گرگ خاکستری از جمله روش‌های بهینه‌سازی فراابتکاری است که به دلیل قابلیت‌های خوبی که دارد، به تازگی مورد استفاده گسترده محققان قرار گرفته است. مکانیزم عاری از مشتق‌گیری، سادگی در اجرا و پیاده‌سازی و تنها نیاز به تابع هدف به عنوان ورودی مسئله، از جمله مواردی است که الگوریتم گرگ خاکستری را محبوب و مورد توجه می‌کند. اما مشکلی که در خصوص آن می‌توان اشاره کرد این است که ضریب کاهشی مورد استفاده در آن خطی است و در برخی مسایل غیر خطی سبب ایجاد خطای بیشتر یا دیر همگرا شدن به جواب اصلی می‌گردد. این نقصان با ارائه یک الگوریتم گرگ خاکستری اصلاح شده مرتفع می‌شود. سپس نتایج در قالب یک مثال عددی کاربردی در علوم مهندسی با الگوریتم اولیه گرگ خاکستری و همچنین برخی ضرایب پیشنهاد شده مشابه مقایسه می‌گردد تا کارایی الگوریتم اصلاح شده، مشخص شود.
بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۰۹	
پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۱۹	
واژگان کلیدی: الگوریتم گرگ خاکستری، مدل غیر خطی، بهینه‌سازی، ضریب کاهشی.	

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2023.29814.2401>

© 2024 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)۱- مقدمه^۱

گرفته‌اند و به راحتی برای مسائل مختلف قابل استفاده هستند زیرا تنها ورودی و خروجی یک سیستم برای یک آن‌ها مهم است [۴]. الگوریتم‌های فراابتکاری می‌توانند به سه دسته کلی تقسیم شوند: ۱- مبتنی بر تکامل ۲- مبتنی بر فیزیک ۳- مبتنی بر ازدحام. مبتنی بر تکامل روش‌هایی هستند که از قوانین تکامل طبیعی الهام گرفته شده‌اند. جستجوی فرآیند با جمعیتی که به طور تصادفی تولید می‌شود، شروع می‌شود. از معروفترین این الگوریتم‌ها می‌توان به الگوریتم ژنتیک اشاره کرد. روش‌های فیزیکی از قوانین فیزیکی موجود در دنیای پیرامون تبعیت می‌کنند که می‌توان از روش جستجوی محلی گرانشی به عنوان یکی از روش‌های معروف این دسته نام برد. گروه سوم شامل تکنیک‌های گروهی است که رفتار اجتماعی گروه‌هایی از حیوانات را تقلید می‌کنند. از کولونی مورچه می‌توان به

بهینه‌سازی یکی از مسائل مهم در علوم کاربردی و مهندسی است. این مسئله زمانی مهمتر می‌شود که با مدل‌های غیر خطی روبرو می‌شویم. برای نمونه به [۱ و ۲] مراجعه شود. با پیشرفت تکنولوژی‌های کامپیوتری، روش‌های عددی رونق بیشتری یافت. به طور خاص، در دهه‌های اخیر، روش‌های فراابتکاری به عنوان ابزاری کارآمد در حل مسائل مختلف مهندسی توسعه یافته‌اند که مزایای عمده‌ای نسبت به روش‌های پیشین دارند. بکارگیری آسان، مکانیسم بدون مشتق‌گیری و اجتناب از بهینه محلی دلایلی هستند که روش‌های فراابتکاری را بسیار مورد توجه قرار می‌دهند. حتی برخی از آنها مانند الگوریتم ژنتیک [۳] در بین تمام علوم کاربردی کاملاً شناخته شده هستند. این الگوریتم‌ها از طبیعت الهام

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: v.mahboub@gu.ac.ir

۱. استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی، دانشگاه گلستان، علی آباد کنول، ایران

استناد به این مقاله:

محبوب، وحید. (۱۴۰۳). یک الگوریتم اصلاح شده گرگ خاکستری برای کاربردهای مهندسی. مدل سازی در مهندسی، ۲۲(۷۶)، ۱۸۹-۱۹۵.

doi: 10.22075/jme.2023.29814.2401

تابع کلاسیک مرتبط به خود الگوریتم گرگ خاکستری مقایسه انجام می‌شود. به طور کلی می‌توان گفت الگوریتم ارائه شده در مقاله می‌تواند در تمام گستره کاربردهای الگوریتم‌های فراابتکاری استفاده شود و محدودیت خاصی ندارد. به عبارتی در هر مسئله‌ی مهندسی که تابع هدف آن به نوعی در مشتق‌گیری یا بدست آوردن بهینه جهانی مشکل دارد قابل استفاده می‌باشد. به شکل خاص الگوریتم پیشنهادی در این مقاله در یک مسئله‌ی غیر محدب به نام EIV به کار گرفته می‌شود که در علوم مهندسی مختلف از جمله نقشه‌برداری، رباتیک، پردازش تصویر و ... استفاده می‌شود. به عنوان نمونه در مهندسی نقشه‌برداری از آن می‌توان در تبدیل بین سیستم جهانی و سیستم محلی استفاده کرد. مثال دیگر برازش منحنی است که در اینجا استفاده شد. تعیین موقعیت ماهواره‌ای و ناوبری از دیگر مثال‌های بارز می‌باشند.

در ادامه این مقاله بدین صورت تدوین شده است: در بخش ۲ مفاهیم اولیه بهینه‌سازی گرگ خاکستری ارائه شده است، سپس روش فراابتکاری بهبود یافته در بخش ۳ می‌شود. در ادامه در بخش ۴، کارایی الگوریتم پیشنهادی را با دو مثال مهندسی بررسی می‌کنیم. در نهایت مقاله را در بخش ۵ جمع‌بندی می‌کنیم.

۲- بهینه‌سازی گرگ خاکستری

الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری (GWO) اخیراً [۴] توسط ارائه شده است. این الگوریتم فراابتکاری از سلسله مراتب رهبری و مکانیسم شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت الهام گرفته شده است. گرگ‌های خاکستری از سلسله مراتب شدیدی از سلطه اجتماعی پیروی می‌کنند. بهترین راه حل به عنوان α که رهبر گروه گرگ‌های خاکستری است مشخص شده است. دومین راه حل برتر به عنوان β مشخص می‌شود که به α در تصمیم‌گیری کمک می‌کند و همچنین بهترین نامزد در صورت فوت یا پیر شدن α می‌باشد، راه حل سوم عنوان δ و بقیه راه حل‌ها با ω علامت گذاری می‌شوند. با توجه به این طبقه‌بندی، GWO شامل دو بخش محاسباتی اصلی است: ۱. احاطه کردن طعمه، ۲. حمله به طعمه. بر اساس [۴] احاطه کردن طعمه به شرح زیر است:

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A}\vec{D} \quad (1)$$

$$\vec{D} = |\vec{C}\vec{X}_p(t) - \vec{X}(t)| \quad (2)$$

عنوان بارزترین مثال این نوع از الگوریتم‌ها یاد کرد. در ادامه مروری اجمالی بر چند روش فراابتکاری مهم انجام می‌دهیم. یک رویکرد لاگرانژی تقویت‌شده مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای مقابله با مسائل بهینه‌سازی محدود توسط [۵] پیشنهاد شد که در آن از یک روش بهینه‌سازی کلاسیک برای بهبود راه‌حل به‌دست‌آمده از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌شود. علاوه بر این، یک استراتژی موثر برای به روز رسانی پارامترهای حیاتی به شیوه‌ی تطبیقی بر اساس آمار جمعیت ارائه شده است. یک الگوریتم جستجوی فاخته بر اساس روش جستجوی محلی Solis و Wets برای مسائل بهینه‌سازی جهانی محدود توسط [۶] توسعه داده شد که بر یک تابع لاگرانژی اصلاح شده جهت اعمال قید تکیه دارد. [۷] یک الگوریتم جدید کلونی زنبورهای مصنوعی (ABC) را برای مسائل بهینه‌سازی محدود ارائه کرد که در آن از دو عملکرد جستجوی ABC اصلاح‌شده مختلف استفاده می‌کند. در این مقاله، روش بهینه‌سازی گرگ خاکستری (GWO) که توسط [۴] پیشنهاد گردید و دارای ویژگی‌های بارزی است بهبود می‌دهیم. را با محدودیت‌های نابرابری تجهیز می‌کنیم. GWO از سلسله مراتب رهبری و مکانیسم شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت الهام گرفته شده است. این روش عمدتاً شامل سلسله مراتب اجتماعی، احاطه بر طعمه و حمله به طعمه است. مطالعات اولیه نشان می‌دهد که الگوریتم GWO عملکرد بسیار قابل قبولی دارد و می‌تواند از الگوریتم‌های مبتنی بر جمعیت موجود، مانند الگوریتم ژنتیک (GA)، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)، الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) و الگوریتم جستجوی گرانشی (GSA) بهتر عمل کند [۴]. گرگ خاکستری الزامات خاصی در تابع هدف ندارد، به عنوان مثال به ویژگی‌های ریاضی دقیق مسئله بهینه‌سازی بستگی ندارد. علاوه بر این، مکانیسم‌های آنها به راحتی قابل پیاده‌سازی است و تطبیق پذیری قوی دارد.

یکی از نقایص این الگوریتم که بهتر است اصلاح شود مربوط به ضریب کاهشی است که در آن گنجانده شده است و سبب می‌گردد در حل برخی مسائل غیرخطی به خطای بیشتر برسد و یا دیر همگرا گردد. اگرچه برخی محققین سعی نمودند این چالش را حل کنند اما به شکل مناسبی این کار را نکردند. به [۸ و ۹] مراجعه شود. در این مقاله ضمن پیشنهاد یک تابع مناسب برای توصیف ضریب کاهشی آن را با دو نمونه از توابعی که قبلاً پیشنهاد شده‌اند و همچنین

$$a_L = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{\text{Max_iter}}\right) \quad (11)$$

$$a_Z = \tanh\left(-2\pi \cdot \frac{t}{\text{Max_iter}} + \pi\right) - 1 \quad (12)$$

که در آن a_L ضریب کاهش پیشنهادی توسط لی و همکاران در [۸] و a_Z ضریب کاهش پیشنهادی توسط ژانگ و همکاران در [۹] می‌باشند. در این مقاله مقرر می‌کنیم ضریب کاهش استاندارد خطی گرگ خاکستری را با همان نماد a نمایش دهیم. همانطور که در شکل (۱) می‌بینیم گرچه هر سه ضریب به صورت یکنوای نزولی از ۲ به سمت صفر در طول تکرارها حرکت می‌کنند، اما بررسی‌ها در مثال‌های عددی نشان می‌دهند در برخی مسائل غیرخطی این ضرایب به شکل کافی جواب‌گو نیستند. یک توجیه ریاضی که این مقاله بر آن متکی است، این می‌باشد که یکنوای نزولی بودن در بازه‌ی تکرار محاسبات، شرط مهمی است، اما در کنار آن، تعقر ضریب کاهش همواره باید به سمت بالا باشد یا به عبارتی مشتق دوم ضریب کاهش باید مثبت باشد. علت آن این است که تعقر همواره به سمت بالا سبب می‌شود الگوریتم گرگ خاکستری در تکرارهای ابتدایی بیش از اندازه پیرامون جواب‌های تقریبی و پرت نگردد و در همان دوره‌های ابتدایی تلاش برای رسیدن به جواب بهینه را شروع کند. با توجه به استدلال‌هایی که گفته شد، در این مقاله یک تابع سهمی که از سه نقطه‌ی $(0, 2)$ ، $(\text{Max_iter}/2, 0.5)$ و $(\text{Max_iter}, 0)$ عبور می‌کند، می‌تواند تابعی باشد که حتی‌المقدور ساده بوده و خواص ریاضی مدنظر ما را داشته باشد. اگر ضریب اصلاح شده در این مقاله را با a_M نشان دهیم معادله آن به شکل زیر بدست می‌آید:

$$a_M = \frac{2}{\text{Max_iter}^2} t^2 - \frac{4}{\text{Max_iter}} t + 2 \quad (13)$$

اثبات: با فرض $\text{Max_iter} = n$ ، می‌بایست ضرائب مجهول b_1 ، b_2 و b_3 از سهمی $f(x) = b_1 x^2 + b_2 x + b_3$ گذرنده از سه نقطه ذکر شده عبور کند که به دستگاه سه معادله سه مجهول زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} b_3 = 2 \\ b_1 \frac{n^2}{4} + b_2 \frac{n}{2} + b_3 = \frac{1}{2} \\ b_1 n^2 + b_2 n + b_3 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

از حل دستگاه (۱۴) به معادله‌ی (۱۳) می‌رسیم. با این اوصاف می‌توانیم الگوریتم اصلاح شده‌ی گرگ خاکستری را

$$\vec{A} = 2a\vec{r}_1 - \vec{a} \quad (3)$$

$$\vec{C} = 2\vec{r}_2 \quad (4)$$

جایی که \vec{X} و \vec{X}_p به ترتیب بردار موقعیت طعمه و گرگ خاکستری را نشان می‌دهند، t نشان دهنده تکرار فعلی است، \vec{A} و \vec{C} بردارهای ضریب هستند، \vec{r}_1 و \vec{r}_2 بردارهای تصادفی در محدوده $[0, 1]$ و اجزای بردار \vec{a} به صورت خطی از ۲ به ۰ در طول مسیر به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$a = 2 - 2 \frac{t}{\text{Max_iter}} \quad (5)$$

که در آن Max_iter حداکثر تکرار است. پس از یافتن موقعیت طعمه توسط گرگ‌های خاکستری که آن را محاصره می‌کنند، می‌توان چنین رفتاری را به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \vec{X}_\alpha - \vec{X}| \quad (6)$$

$$\vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \vec{X}_\beta - \vec{X}| \quad (7)$$

$$\vec{D}_\delta = |\vec{C}_3 \vec{X}_\delta - \vec{X}| \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_1 &= \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1(\vec{D}_\alpha), & \vec{X}_2 &= \vec{X}_\beta - \vec{A}_2(\vec{D}_\beta), \\ \vec{X}_3 &= \vec{X}_\delta - \vec{A}_3(\vec{D}_\delta) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\vec{X}(t+1) = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3} \quad (10)$$

در اینجا \vec{X}_α ، \vec{X}_β و \vec{X}_δ به ترتیب بردارهای موقعیت گرگ‌های α ، β و δ هستند، \vec{A}_i و \vec{C}_i مشابه \vec{A} و \vec{C} تولید می‌شوند.

۳- الگوریتم اصلاح شده‌ی گرگ خاکستری

همان‌طور که قبلاً گفته شد، الگوریتم گرگ خاکستری علیرغم قابلیت‌های خوبی که دارد نیاز به اصلاح در قسمت مربوط به معادله (۵) که توصیف‌کننده‌ی ضریب کاهش است، می‌باشد. زیرا بررسی‌ها نشان داده است در حل برخی مسائل غیرخطی، ضریب کاهش الگوریتم که خطی است سبب دیر همگرا شدن یا خطای بیشتر در حل مسئله کند. گرچه برخی محققین سعی نمودند این مشکل را حل کنند، ولی آن‌طور که باید این مشکل حل نگردید. به عنوان نمونه می‌توان به دو مورد که به ترتیب توسط [۸] و [۹] پیشنهاد شد اشاره کرد:

به صورت زیر پیشنهاد نماییم:

$$y = (A - \underline{E}_A)x + \underline{e} \quad (۱۵)$$

$$\text{rank}(A_{m \times n}) = n < m,$$

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \underline{e}_A \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \text{vec}(\underline{E}_A) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \right)$$

در این روابط \mathcal{Y} بردار مشاهدات دارای نویز، A ماتریس ضرائب که آن نیز مشاهده شده و دارای نویز است، \underline{e} و \underline{E}_A به ترتیب توصیف‌کننده خطای تصادفی این دو کمیت می‌باشد، \mathcal{X} بردار مجهولات و σ_0^2 فاکتورس وریانس است. ضمناً Q_y و Q_A ماتریس وریانس متناظر با بردار مشاهدات و ماتریس ضرائب هستند. این مدل زمانی استفاده می‌شود که علاوه بر بردار مشاهدات، ماتریس ضرائب نیز مشاهده شده و نویزی باشد و آن را اخیراً در کاربردهای مهندسی به شکل گسترده استفاده کرده‌اند. برای نمونه به [۱۰ و ۱۱] مراجعه شود. یک حل تحلیلی موسوم به WTLS توسط [۱۱] برای آن ارائه شد که برخلاف الگوریتم گرگ خاکستری ارائه شده در این مقاله نسبتاً پیچیده است. اما در اینجا به عنوان معیار جواب درست، حل WTLS را برای مقایسه با الگوریتم این مقاله و همچنین ضرائب کاهش می‌توان استفاده کرد که تابع هدف این مدل به شکل زیر است:

$$\Phi(x) := (y - Ax)^T [Q_y + (x^T \otimes I_m) Q_A (x \otimes I_m)]^{-1} (y - Ax) \quad (۱۶)$$

در این رابطه \otimes نماد نشان دهنده ضرب کرونگر است. همان‌طور که دیده می‌شود تابع هدف غیر خطی و غیر محدب است. اثبات این رابطه در پیوست آمده است. برای یک برازش خط در مهندسی نقشه‌برداری که هر دو مختصات x و y دارای خطا هستند داده‌های زیر در اختیار است:

$A = [-0.006$	1	$y = [4.791$
2.833	1	8.306
3.507	1	12.003
-5.044	1	-9.677
5.780	1	17.197
6.320	1	19.317
-0.320	1	1.568
8.815	1	26.413
-11.164	1	-23.517
12.117	$1]$	$32.368]$

$$Q_y = I_{10}, Q_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_{10}$$

گام اول: مقداردهی اولیه به کمیت‌های \vec{A} ، \vec{C} و a

گام دوم: تابع هدف را وارد کنید.

گام سوم: محاسبه‌ی تابع هدف برای هر یک از نمایندگان جستجو.

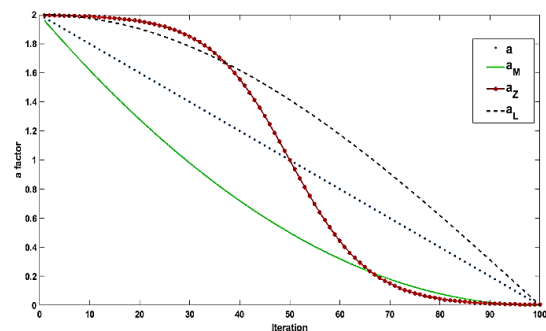
گام چهارم: انتخاب بهترین حل‌ها یعنی \vec{X}_α ، \vec{X}_β و \vec{X}_δ .

گام پنجم: به روزرسانی موقعیت گرگ‌های خاکستری با معادله (۱۰).

گام ششم: به روزرسانی کمیت‌های \vec{A} ، \vec{C} .

گام هفتم: به روزرسانی a با معادله (۱۲).

گام هشتم: گام‌های سوم تا هفتم به صورت تکرار محاسبه شوند.



شکل ۱- منحنی‌های مربوط به ضریب کاهش با توابع مختلف برای ۱۰۰ دور تکرار

۴- مثال عددی

در این قسمت یک مثال عددی را در قالب مدل EIV با استفاده از الگوریتم اصلاح‌شده گرگ خاکستری حل خواهیم کرد و نتیجه را با زمانی که از ضرائب خطی، a_L ، و a_Z استفاده شده است مقایسه می‌کنیم. برای آشنایی با این مدل به [۱۰] مراجعه شود. این مدل حاوی یکسری از مجهولات تصادفی است که در واقع مرتبط با خطای تصادفی اندازه‌گیری‌های مهندسی می‌باشد و با خطای تصادفی که در مشاهدات سمت چپ رابطه [۱۵] وجود دارد فرق می‌کند. در دو دهه‌ی اخیر محققان در برخی از کاربردهای مهندسی چنانچه این نویز در نظر گرفته نشود می‌تواند سبب بدست آوردن یک جواب ناصحیح یا با صحت کم شود. این مدل ظاهراً خطی نه تنها خطی نیست بلکه نامحدب نیز می‌باشد.

اخیراً در برخی از علوم کاربردی و مهندسی از جمله مهندسی نقشه‌برداری، پردازش تصویر، ناوبری و ... استفاده شده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

فراابتکاری می‌توانند به عنوان یک ابزار کارآمد در این زمینه مفید واقع شوند. یکی از این الگوریتم‌ها که اخیراً معرفی گردید و دارای کارایی مناسبی است الگوریتم گرگ خاکستری می‌باشد. چالشی که فرا روی ما، ضریب کاهشی مورد استفاده در این الگوریتم است که خطی می‌باشد و سبب ایجاد خطا یا دیر همگرا شدن در برخی مسائل غیرخطی می‌شود. در این مقاله یک ضریب غیر خطی که یکنوازی نزولی بوده و تعقر آن همواره رو به بالاست پیشنهاد گردید تا این نقیصه رفع گردد. نتایج عددی حاکی از آن است که ضریب کاهشی جدید می‌تواند در حل و مدلسازی مسئله‌ی EIV به عنوان یکی از مسائل غیر خطی روز مهندسی، کارایی خوبی داشته باشد و حتی نتایج برخی ضرائب دیگر که اخیراً پیشنهاد شده‌اند، را بهبود دهد.

۶- پیوست

بر اساس [۱۱] تابع هدف مدل EIV به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{e}_y^T P_y \tilde{e}_y + \tilde{e}_A^T P_A \tilde{e}_A \quad (17)$$

همانطور که در [۱۱] اثبات شد \tilde{e}_y و \tilde{e}_A با توجه به روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{e}_y = Q_y \hat{\lambda} \quad (18)$$

$$\tilde{e}_A = -Q_A (\xi \otimes I_n) \hat{\lambda}. \quad (19)$$

جایی که $\hat{\lambda}$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\hat{\lambda} = [Q_y + (\xi^T \otimes I_n) Q_A (\xi \otimes I_n)]^{-1} (y - A\xi) \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۱۷) و علم به این مطلب که $P_y = Q_y^{-1}$ و $P_A = Q_A^{-1}$ می‌توان به تابع هدف مدل EIV مطابق رابطه‌ی (۱۶) دست یافت.

$$\tilde{e}_y^T P_y \tilde{e}_y + \tilde{e}_A^T P_A \tilde{e}_A = (y - Ax)^T [Q_y + (x^T \otimes I_m) Q_A (x \otimes I_m)]^{-1} (y - Ax) \quad (21)$$

در این مثال که با پنج روش حل می‌شود، مجهولات x شامل $[c_1 \ c_2]$ شیب و عرض از مبدا خط مورد نظر هستند. اگر \hat{x}_{WTLS} ، \hat{x}_G ، \hat{x}_L ، \hat{x}_Z و \hat{x}_M به ترتیب مجهولات برآورد شده با روش WTLS، ضریب کاهشی خطی الگوریتم گرگ خاکستری a ، ضریب کاهشی a_L ، ضریب کاهشی a_Z و ضریب کاهشی ارائه شده در این مقاله یعنی a_M باشند، نتایج بدست آمده در جدول ۱ را می‌توان با یکدیگر مقایسه نمود.

جدول ۱- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف

مجهولات	c_1	c_2
\hat{x}_{WTLS}	2.459	3.258
\hat{x}_G	2.647	0.863
\hat{x}_L	2.617	1.430
\hat{x}_Z	2.529	2.322
\hat{x}_M	2.456	3.293

اگر مجموع قدر مطلق خطاها را به عنوان معیار نزدیکی و صحت برای هر روش در نظر بگیریم همانطور که از نتایج پیداست، \hat{x}_M بیشترین نزدیکی را به عنوان جواب صحیح دارد و خطای حاصل از کمیت‌های برآورد شده با ضریب ارائه شده در این مقاله ۰.۰۳۸ است پس از آن و با فاصله بهترین نتیجه مربوط به \hat{x}_Z می‌شود که صحت آن حدود ۱۰.۰۵ است. نکته دیگر این است که \hat{x}_L با جواب کلاسیک الگوریتم گرگ خاکستری یعنی \hat{x}_G از نظر صحت در رده‌های بعدی قرار دارند و به ترتیب ۱.۹۸۶ و ۲.۵۸۲ می‌باشند. نتایج حاکی از این است که مطابق انتظار ضریب کاهشی پیشنهاد شده در این مقاله توانسته به خوبی این مسئله غیرخطی را مدلسازی نماید و به بهترین جواب ممکن برسد.

۵- نتیجه‌گیری

حل مسائل غیر خطی و مدلسازی آن، یکی از چالش‌های مهم علوم کاربردی و مهندسی می‌باشد و الگوریتم‌های

مراجع

[1] Mahboub, Vahid. "A weighted least-squares solution to a 3-D symmetrical similarity transformation without linearization." *Studia geophysica et geodaetica* 60, no. 2 (2016): 195-209.

[2] Mahboub, Vahid, Somayeh Ebrahimzadeh, Mohammad Saadatseresht, and Mehran Faramarzi. "On robust constrained Kalman filter for dynamic errors-in-variables model." *Survey review* 52, no. 372 (2020): 253-260.

- [3] Bonabeau E, Dorigo M, Theraulaz G, Theraulaz G. Swarm intelligence: from natural to artificial systems. Oxford university press; 1999.
- [4] Mirjalili, Seyedali, Seyed Mohammad Mirjalili, and Andrew Lewis. "Grey wolf optimizer." *Advances in engineering software* 69 (2014): 46-61.
- [5] Deb, Kalyanmoy, and Soumil Srivastava. "A genetic algorithm based augmented Lagrangian method for constrained optimization." *Computational optimization and Applications* 53 (2012): 869-902.
- [6] Long, Wen, Ximing Liang, Yafei Huang, and Yixiong Chen. "An effective hybrid cuckoo search algorithm for constrained global optimization." *Neural Computing and Applications* 25 (2014): 911-926.
- [7] Brajevic, Ivona. "Crossover-based artificial bee colony algorithm for constrained optimization problems." *Neural Computing and Applications* 26 (2015): 1587-1601.
- [8] Li, Yu, Xiaoxiao Lin, and Jingsen Liu. "An improved gray wolf optimization algorithm to solve engineering problems." *Sustainability* 13, no. 6 (2021): 3208.
- [9] Zhang, Min, Xunjie Zhang, Haibo Wang, Guowen Xiong, and Wenming Cheng. "Features fusion exaction and KELM with modified grey wolf optimizer for mixture control chart patterns recognition." *Ieee Access* 8 (2020): 42469-42480.
- [10] Mahboub, Vahid, and Somayeh Ebrahimzadeh. "Non-linear block least-squares adjustment for a large number of observations." *Survey Review* 54, no. 387 (2022): 479-489.
- [11] Mahboub, Vahid. "On weighted total least-squares for geodetic transformations." *Journal of geodesy* 86, no. 5 (2012): 359-367.