



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

An Applicable Control-Relevant Method for Nonlinearity Assessment using Gap Metric

Mahdi Ahmadi ^{a,*}

^a Assistant Professor, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Esfarayen University of Technology, North-Khorasan, Iran.

PAPER INFO

Paper history:

Received: 17 June 2023

Revised: 24 November 2023

Accepted: 26 December 2023

Keywords:

Nonlinear system,
Nonlinearity assessment,
Controller,
Gap metric,
Maximum stability margin.

ABSTRACT

In this paper, an applicable control-relevant nonlinearity assessment method is proposed for nonlinear dynamic systems. In this method, nonlinear system is decomposed to a bank of linear systems using gap metric, a smart tool for measuring the distance between two linear systems. Then, the ability of each local linear models are investigated to stabilize all linear models. A criterion is proposed to measure the nonlinearity of nonlinear system based on gap metric and maximum stability margin values which bounded between 0 and 1. Unlike most of the current nonlinearity measurement, the proposed method could be used for both integrating and unstable nonlinear systems. Besides, the presented method supplies to distinguish that a single linear controller is adequate to control the nonlinear system or it is necessary to employ the multi-model based controllers design methods. Therefore, the redundancy problem could be avoided by employing the proposed method. A nonlinear Continuous Stirred Reactor Tank (CSTR) process is studied and results confirm the capability of presented nonlinearity assessment method.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2023.30975.2473>

© 2024 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: mahdiahmadi@esfarayen.ac.ir

How to cite this article:

Ahmadi, M. (2024). An Applicable Control-Relevant Method for Nonlinearity Assessment using Gap Metric. Journal of Modeling in Engineering, 22(77), 261-271. doi: 10.22075/jme.2023.30975.2473

معرفی روشی کاربردی مبتنی بر کنترل برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم با استفاده از Gap Metric

مهدي احمدی^{۱*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۲۷	در این مقاله یک روش کاربردی برای سنجش رفتار غیرخطی سیستم‌های دارای دینامیک غیرخطی ارائه می‌شود. در این روش، سیستم غیرخطی در فضای کاری خود و با استفاده از ابزار هوشمند gap metric به یک بانک از مدل‌های خطی تقسیم شده و با محاسبه آستانه پایداری بیشینه، توانمندی هر یک از کنترل‌کننده‌های محلی در پایداری مجموعه مدل‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس معیاری برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم تحت مطالعه ارائه می‌گردد که دارای مقادیری بین صفر تا یک است. برخلاف بسیاری از روش‌های سنجش شدت رفتار غیرخطی، روش ارائه شده در این پژوهش برای سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار نیز قابل استفاده است. علاوه بر این، روش ارائه شده کفایت استفاده از تنها یک کنترل‌کننده خطی و یا لزوم استفاده از روش مدل‌های چندگانه جهت نیل به اهداف حلقه بسته را پاسخ می‌دهد و از افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی جلوگیری می‌نماید. برای ارزیابی روش ارائه شده، یک سیستم غیرخطی CSTR شبیه‌سازی شده است که نتایج به دست آمده نشان می‌دهند معیار معرفی شده برای سنجش شدت رفتار غیرخطی عملکرد مناسبی دارد.
بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۰۳	
پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵	
واژگان کلیدی: سیستم غیرخطی، سنجش رفتار غیرخطی، کنترل‌کننده، Gap metric، بیشینه آستانه پایداری.	

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2023.30975.2473>

© 2024 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

۱- مقدمه^۱

می‌برند. در آن سوی طیف، محاسبات ساده، گسترده‌تری روش‌های تحلیل و طراحی و سادگی پیاده‌سازی کنترل‌کننده نهایی از جمله مهم‌ترین ویژگی‌های روش‌های خطی است [۳] و به همین علت نسبت به روش‌های غیرخطی، در میان محققین محبوب‌تر می‌باشند. اما استفاده از کنترل‌کننده‌های خطی، تنها در ناحیه‌ای در اطراف نقطه کاری برای سیستم‌های غیرخطی دارای اعتبار است و لذا با تغییر نقطه کاری به هر دلیلی از جمله عدم قطعیت، اغتشاش و رفتار غیرخطی کیفیت عملکرد کنترل‌کننده می‌تواند تقلیل یابد. روش‌های مدل‌های چندگانه روشی میانی هستند که از ویژگی‌های مثبت روش‌های خطی بهره

بسیاری از سیستم‌ها در دنیای واقعی دارای دینامیک غیرخطی هستند و در حالتی که نقطه کاری هم در یک بازه گسترده تغییر می‌کند پیچیدگی رفتار سیستم تشدید می‌شود. رفتار غیرخطی یک ویژگی ذاتی سیستم است که بر پایداری و عملکرد سیستم تاثیر بسزایی دارد [۱، ۲]. در میان منابع مختلف برای مواجهه با این موضوع سه رویکرد اتخاذ شده است: استفاده از روش‌های غیرخطی، مدل‌های چندگانه و خطی. اگرچه در روش‌های غیرخطی کیفیت عملکرد کنترلی بسیار خوب است اما از پیچیدگی تحلیل و طراحی، حجم محاسبات زیاد و سختی پیاده‌سازی رنج

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mahdiahmadi@esfarayen.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین

استناد به این مقاله:

احمدی، مهدي. (۱۴۰۳). معرفی روشی کاربردی مبتنی بر کنترل برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم با استفاده از Gap Metric. مدل سازی در مهندسی،

۲۲(۷۷)، ۲۶۱-۲۷۱. doi: 10.22075/jme.2023.30975.2473

انتگرالی و ناپایدار نیز امکان پذیر خواهد بود [۱۱]. در این مقاله، از ابزار $gap\ metric$ برای توزیع مناسب، یکنواخت و کافی مدل‌های خطی و تشکیل بانک مدل‌های محلی استفاده می‌شود. سپس با محاسبه بیشینه آستانه پایداری هر یک از مدل‌های خطی، توانایی کنترل‌کننده‌های محلی در پایدارسازی تمامی مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌های خطی ارزیابی می‌شود. به منظور سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم، معیاری مبتنی بر متریک و بیشینه آستانه پایداری با مقادیر بین 0 و 1 تعریف می‌شود که مقادیر نزدیک به 0 و 1 به ترتیب بیانگر افزایش و کاهش شدت رفتار غیرخطی سیستم می‌باشند. برای ارزیابی روش ارائه شده یک سیستم $CSTR$ غیرخطی مطالعه شده است. نوآوری‌های این پژوهش در مقایسه با دیگر روش‌های موجود، شامل موارد زیر است:

- اجتناب از روش انتخاب ترتیبی مدل‌های خطی نامی مورد استفاده در [۴، ۱۱، ۱۴-۱۷] و بررسی توانمندی هر یک از کنترل‌کننده‌های محلی در پایدارسازی تمامی مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌های محلی.
 - تعریف یک معیار جدید مبتنی بر $gap\ metric$ و بیشینه آستانه پایداری برای نمایش توانمندی هر یک از کنترل‌کننده‌های محلی در پایدارسازی دیگر مدل‌های محلی در مقایسه با [۱۲ و ۱۳].
 - استفاده از کنترل‌کننده نهایی با ساختار به مراتب ساده‌تر نسبت به دیگر روش‌های مبتنی بر انتخاب ترتیبی مورد استفاده در [۴، ۱۱، ۱۴-۱۷].
- ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲، به معرفی متریک مورد استفاده برای سنجش فاصله میان مدل‌های خطی و ارتباط آن با پایداری پرداخته می‌شود. بخش ۳ به معرفی روش ارائه شده برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم می‌پردازد و نتایج شبیه‌سازی در بخش ۴ گزارش می‌شود. در پایان، بخش ۵ نتیجه حاصل از این پژوهش را ارائه می‌دهد.

۲- متریک و ارتباط آن با پایداری

برای پاسخ به سوال "پاسخ دو سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان چقدر به یکدیگر شباهت دارند؟"، در دهه ۱۹۸۰ ابزار $Gap\ metric$ در [۱۸] ارائه شد. این روش فاصله دو سیستم را در مضمون حلقه بسته محاسبه می‌کند و به همین خاطر برای سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار نیز قابل بهره‌برداری

می‌برند و در عین حال با ترکیب تعداد مناسبی از کنترل‌کننده‌های خطی عمل کنترلی را در فضای بزرگ‌تری نسبت به روش‌های خطی انجام می‌دهند [۴]. در استفاده از روش‌های خطی و مدل‌های چندگانه، تشخیص شدت رفتار غیرخطی سیستم و به عبارتی پاسخ به این سوال که "سیستم تحت مطالعه به چه میزان خطی / غیرخطی است؟" بسیار با اهمیت خواهد بود چرا که بر تعداد کنترل‌کننده‌های خطی و ساختار کنترل‌کننده نهایی تاثیر می‌گذارد که به همین منظور در این زمینه مطالعات زیادی از سال ۱۹۸۰ به بعد انجام شده است [۵]. برای پاسخ به این پرسش لازم است محدودیت عملکردی روش‌های خطی با بررسی شدت رفتار غیرخطی سیستم ارزیابی شده و کفایت استفاده از تنها یک کنترل‌کننده بررسی گردد و پس از آن و در صورتی که استفاده از یک کنترل‌کننده خطی کافی نباشد بایستی روش مدل‌های چندگانه مورد استفاده قرار گیرند.

در پاسخ به پرسش "آیا استفاده از یک کنترل‌کننده خطی کفایت می‌کند و یا لازم است روش مدل‌های چندگانه طراحی گردند؟"، در سالین گذشته روش‌های متعددی برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم با استفاده از پاسخ حلقه باز و حلقه بسته سیستم ارائه شده است [۳، ۶-۱۰]. در روش‌های مبتنی بر پاسخ حلقه باز، فاصله میان پاسخ حلقه باز سیستم غیرخطی و بهترین مدل خطی مورد سنجش قرار می‌گیرد. از آنجایی که فاصله میان سیستم‌های ناپایدار با استفاده از نرم امکان‌پذیر نیست لذا این روش‌ها برای سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار قابل استفاده نمی‌باشند [۱۱]. در روش‌های مبتنی بر پاسخ حلقه بسته، با فرض اطلاع از ساختار کنترل‌کننده خطی پارامترهای موجود به نحوی طراحی می‌شوند که فاصله میان پاسخ‌های حلقه بسته دو سیستم غیرخطی و خطی کمینه گردد. با این حال اطلاع از ساختار کنترل‌کننده محدودیت این روش‌ها است [۱].

در سال‌های اخیر استفاده از متریک‌ها برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم‌ها افزایش یافته است [۱۲-۱۶]. $Gap\ metric$ به عنوان یک متریک توانمند نسبت به دیگر روش‌های مبتنی بر نرم برای محاسبه فاصله میان دو سیستم خطی به کار می‌رود [۱۷]. از آنجایی که این متریک قادر به ارزیابی فاصله میان سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار است لذا استفاده از آن برای سیستم‌های غیرخطی

تعریف می‌شوند که در آن‌ها $K(s)$ کنترل‌کننده پایدارساز تابع تبدیل $P(s)$ و $\|\cdot\|_H$ بیانگر نرم هنکل است. با دقت در رابطه‌های (۸) و (۹) مشاهده می‌شود که آستانه پایداری به سیستم $P(s)$ و کنترل‌کننده $K(s)$ مرتبط است درحالی‌که بیشینه آستانه پایداری یک ویژگی ذاتی بوده و تنها به ماتریس‌های تفکیک راست نرمالیزه شده سیستم وابسته است. قضیه و نتیجه زیر ارتباط میان gap metric و پایداری را بیان می‌کنند.

قضیه ۱ [۱۹]: فرض کنید سیستم فیدبک با زوج (P, K) پایدار است. اگر $\Sigma \triangleq \{P_\Delta: \delta(P, P_\Delta) < \gamma\}$ تعریف شود آنگاه سیستم فیدبک با زوج (P_Δ, K) برای تمامی $P_\Delta \in \Sigma$ نیز پایدار است اگر و تنها اگر $\gamma \leq b_{P,K}$.

نتیجه ۱ [۱۷]: فرض کنید $P = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ و $P_1 = \tilde{M}_1^{-1}\tilde{N}_1$ سپس کنترل‌کننده پایدارساز K برای P و P_1 وجود دارد اگر و تنها اگر $\delta(P, P_1) \leq b_{opt}(P) < 1$. از آنجایی‌که قضیه ۱ و نتیجه ۱ امکان در نظر گرفتن عملکرد حلقه بسته سیستم را در مرحله انتخاب مدل‌های خطی نامی فراهم می‌کنند، زیربنای بسیاری از روش‌های جدید مدل‌های چندگانه شده‌اند [۱۷، ۱۶، ۱۲، ۱].

۳- معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی

سیستم غیرخطی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (10)$$

را در نظر بگیرید که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم می‌باشند. همچنین بردار $f(\cdot)$ و $h(\cdot)$ توابع برداری غیرخطی مشتق‌پذیر می‌باشند.

متغیرهای بهره‌بندی θ سیستم را مشخص کنید به‌گونه‌ای که این متغیرها به آرامی تغییر کرده، رفتار سیستم غیرخطی را توصیف می‌کنند و سطح کاری سیستم و متناظرًا نقاط تعادل را نمایش می‌دهند. معمولاً مجموعه‌ای از خروجی، ورودی، و حالت‌های سیستم به عنوان متغیرهای بهره‌بندی انتخاب می‌شوند. فضای کاری سیستم (Φ) را مشخص کنید که در واقع فضای تغییرات متغیرهای بهره‌بندی $(\theta \in \Phi)$ است. سپس فضای کاری را با استفاده از الگوریتم توزیع مبتنی بر gap metric ارائه شده در [۲۰]

است [۱۹]. در [۱۹] نشان داده شده است که این متریک فاصله دو سیستم خطی را دقیق‌تر از دیگر روش‌های مبتنی بر نرم محاسبه می‌نماید. با فرض اینکه $P(s)$ ماتریس تابع تبدیل گویا بوده، نمایش تفکیک راست نرمالیزه شده آن به‌صورت

$$P(s) = N(s)M(s)^{-1} \quad (1)$$

می‌باشد که در آن روابط (۲) تا (۴) برقرار است.

$$\tilde{M}(s)M(s) + \tilde{N}(s)N(s) = I, \quad (2)$$

$$\tilde{M}(s) = M^T(-s), \quad (3)$$

$$\tilde{N}(s) = N^T(-s). \quad (4)$$

فاصله بین دو سیستم خطی با بُعد محدود و تعداد یکسان ورودی و خروجی به صورت (۵) تعریف می‌شود.

$$\delta(P_1, P_2) = \max\{\vec{\delta}(P_1, P_2), \vec{\delta}(P_2, P_1)\} \quad (5)$$

که در آن $\vec{\delta}(P_1, P_2)$ متریک جهت‌دار بوده و به‌صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$\vec{\delta}(P_1, P_2) = \inf_{Q \in H_\infty} \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{N}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{N}_2 \end{bmatrix} Q \right\|_\infty \quad (6)$$

همچنین فاصله میان دو سیستم خطی تک ورودی-تک خروجی به‌صورت رابطه

$$\delta(P_1, P_2) = \sup_\omega \frac{|P_1(j\omega) - P_2(j\omega)|}{\sqrt{1+|P_1(j\omega)|^2}\sqrt{1+|P_2(j\omega)|^2}} \quad (7)$$

تعریف می‌شود که در آن $P_1(j\omega)$ و $P_2(j\omega)$ بیانگر پاسخ فرکانسی دو سیستم P_1 و P_2 می‌باشند.

مقدار فاصله دو سیستم تحت gap metric همواره بین ۰ و ۱ می‌باشد که مقادیر نزدیک به ۰ نشان‌دهنده نزدیکی رفتار دو سیستم خطی در مضمون حلقه بسته بوده و در این حالت می‌توان حداقل یک کنترل‌کننده فیدبک یافت به‌طوری‌که هر دو سیستم خطی را پایدار نماید.

در [۱۹] نشان داده شده است که میان gap metric و پایداری ارتباط معنادار و پرکاربرد وجود دارد. با توجه به [۱۹]، آستانه پایداری و بیشینه آستانه پایداری به‌ترتیب به‌صورت

$$b_{P,K} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} \begin{bmatrix} I & P \end{bmatrix} \right\|_\infty^{-1}, \quad (8)$$

$$b_{opt}(P) = \sqrt{1 - \|\tilde{N} \tilde{M}\|_H^2} < 1 \quad (9)$$

$$\gamma_{b_{i,j}} = \begin{cases} 1 & \gamma_{i,j} \geq 0 \\ 0 & \gamma_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (13)$$

تعریف می‌شود که درایه 1 و 0 به ترتیب بیانگر امکان و عدم امکان پایدارسازی مدل P_j توسط کنترل فیدبک طراحی شده برای مدل P_i است. به عبارتی ماتریس دودویی تعریف شده در رابطه (۱۳)، توانمندی کنترل‌کننده‌های محلی را در پایدارسازی مدل‌های خطی نشان می‌دهد و هر چه تعداد درایه‌های 1 در یک سطر ماتریس Γ_b بیشتر باشد قدرت پایدارسازی کنترل‌کننده محلی متناظر با آن سطر نیز بیشتر خواهد بود.

با استفاده از ماتریس دودویی حاصل در (۱۳)، معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم غیرخطی (۱۰) در تمامی فضای کاری Φ به صورت

$$NMI = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_b(i, j) \right) \quad (14)$$

تعریف می‌شود. با دقت در رابطه (۱۴) نتایج زیر استنباط می‌شوند:

$$0 \leq NMI \leq 1 - 1$$

۲- در صورتی که مقدار $NMI=1$ باشد (با فرض اینکه به ازای $i = m$ اتفاق افتد) یعنی حداقل یک کنترل فیدبک وجود دارد که تمامی مدل‌های محلی موجود در بانک \mathcal{P} را پایدار نماید و لذا سیستم غیرخطی (۱۰) به مدل خطی P_m شباهت خواهد داشت و استفاده از تنها یک کنترل‌کننده خطی برای پایدارسازی تمام فضای کاری کفایت می‌کند.

۳- هر چه مقدار NMI به 1 نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده موارد زیر است:

- شدت رفتار غیرخطی سیستم (۱۰) کم است و سیستم غیرخطی رفتاری شبیه به یک سیستم خطی را داراست.

- امکان پایدارسازی سیستم غیرخطی (۱۰) در کل فضای کاری توسط فقط یک کنترل‌کننده محلی وجود ندارد و لازم است از روش مدل چندگانه بهره جست.
- کنترل‌کننده چندگانه ساختار ساده‌تری خواهد داشت.

۴- هر چه مقدار NMI به 0 نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده موارد زیر است:

- شدت رفتار غیرخطی سیستم (۱۰) زیاد است.
- کنترل‌کننده‌های محلی تنها برای یک محدوده کوچک امکان پایدارسازی سیستم غیرخطی (۱۰) را

شبکه‌بندی نماید به طوری که فاصله هر دو مدل خطی متوالی کمتر از γ_g گردد. توجه شود که هر چه مقدار γ_g کوچک‌تر باشد شبکه‌بندی فضای کاری بهتر خواهد بود اما در عین حال تعداد مدل‌های خطی نیز افزایش خواهند یافت. بدین ترتیب با فرض اینکه n نقطه در فضای بهره‌بندی توزیع شده‌اند، n نقطه تعادل به دست می‌آید. نقطه تعادل متناظر با θ_i به صورت $(x_{ei}, u_{ei}, y_{ei}) \triangleq (x_e(\theta_i), u_e(\theta_i), y_e(\theta_i))$ خواهد بود. سیستم غیرخطی (۱۰) در نقطه تعادل (x_{ei}, u_{ei}, y_{ei}) خطی‌سازی می‌شود و مدل خطی P_i به صورت

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= A_i \delta x + B_i \delta u; i = 1, \dots, n \\ \delta y &= C_i \delta x + D_i \delta u \end{aligned} \quad (11)$$

به دست می‌آید که در آن $\delta x = x - x_{ei}$ ، $\delta u = u - u_{ei}$ و $\delta y = y - y_{ei}$ می‌باشند. $B_i = A_i = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ و $C_i = \frac{\partial h}{\partial x}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ ، $D_i = \frac{\partial h}{\partial u}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ و $A_i = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ می‌باشند.

بدین ترتیب n مدل خطی به صورت یکنواخت از خطی‌سازی سیستم غیرخطی (۱۰) به دست آمده‌اند به طوری که فاصله هر دو مدل متوالی کمتر از γ_g است. در واقع، n مدل خطی به دست آمده تقریبی از سیستم غیرخطی را ایجاد کرده‌اند و بنابراین می‌توان از ویژگی‌های مثبت gap metric و آستانه پایداری برای سیستم غیرخطی بهره برد.

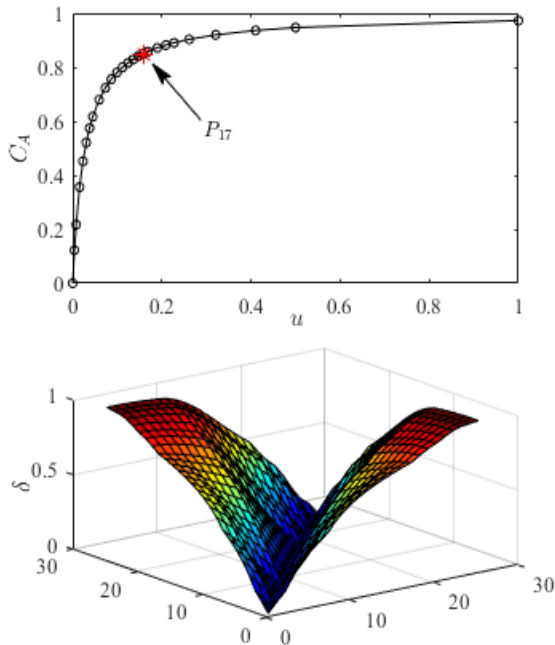
با ایجاد بانک مدل‌های خطی $\mathcal{P} = \{P_i: i = 1, \dots, n\}$ ، ماتریس فاصله $G \triangleq [\delta(P_i, P_j)]_{n \times n}$ و بردار بیشینه آستانه پایداری $B_{opt} = [b_{opt}(P_i)]_{n \times 1}$ را می‌توان با استفاده از روابط (۵) و (۹) به دست آورد. سپس ماتریس تفاضل $\Gamma = [\gamma_{i,j}]_{n \times n}$ با استفاده از رابطه

$$\Gamma = B_{opt} \times e - G \quad (12)$$

به دست می‌آید که در آن e یک بردار $n \times 1$ بوده و تمامی درایه‌های آن 1 می‌باشند ($e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n \times 1}$). در ماتریس تفاضل، در واقع اختلاف بیشینه آستانه پایداری مدل خطی P_i و فاصله $\delta(P_i, P_j)$ محاسبه می‌شود. مطابق با نتیجه ۱، در صورتی که $b_{opt}(P_i) \geq \delta(P_i, P_j)$ یک کنترل فیدبک یافت می‌شود که هر دو مدل خطی P_i و P_j را پایدار نماید و در این حالت $\gamma_{i,j} \geq 0$ خواهد شد و بالعکس. بدین ترتیب برای راحتی کار، ماتریس دودویی

$$\Gamma_b \triangleq [\gamma_{b_{i,j}}]_{n \times n}$$

دارند. است که در بانک مدل‌های خطی، زوج مدل‌هایی وجود دارند که رفتار بسیار دور نسبت به یکدیگر دارند. بدین ترتیب با توجه به روش‌های مبتنی بر gap metric در [۱۱، ۲۱]، این سیستم غیرخطی یک سیستم با شدت رفتار غیرخطی زیاد شناخته می‌شود.



شکل ۱- الف) فضای کاری، منحنی تعادل، و نقاط خطی‌سازی سیستم CSTR (بالا)؛ ب) فاصله میان مدل‌های خطی (پایین).

برای استفاده از روش معرفی شده در این پژوهش، فاصله میان هر دو زوج مدل خطی و بیشینه آستانه پایداری برای هر یک از مدل‌های خطی به ترتیب با استفاده از دستور gapmetric و ncfsyn در نرم‌افزار MATLAB محاسبه می‌شوند. سپس معیار شدت رفتار غیرخطی سیستم CSTR برابر با $NMI = 1$ به دست می‌آید که نشان‌دهنده وجود حداقل یک کنترل فیدبک است که قادر به پایدارسازی تمامی ۲۶ مدل خطی موجود در بانک مدل‌های خطی است. به عبارت دیگر، می‌توان حداقل یک کنترل فیدبک پیدا کرد که سیستم غیرخطی (۱۵) را در تمام فضای کاری پایدار نماید.

برای بررسی بهتر و دقیق‌تر این موضوع و رابطه (۱۴)، رابطه

$$\Pi(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_b(i, j) \quad (16)$$

را در نظر بگیرید ($NMI = \max_i \Pi(i)$). در واقع، این رابطه میزان توانمندی کنترل‌کننده‌های محلی در پایدارسازی دیگر مدل‌های خطی را مبتنی بر نتیجه ۱ بیان می‌کند. مقادیر نزدیک به 0 و 1 به ترتیب ضعف و قوت

کنترل‌کننده مبتنی بر مدل چندگانه از تعداد زیادی کنترل‌کننده محلی باید تشکیل گردد که موجب پیچیدگی ساختار کنترل‌کننده نهایی خواهد شد.

تبصره ۱: برای تصمیم‌گیری در روش ارائه شده در این پژوهش از بیشینه آستانه پایداری استفاده شده است. از آنجایی که استفاده از بیشینه آستانه پایداری عملکرد حلقه بسته را تحت تاثیر قرار می‌دهد می‌توان نتیجه مشابهی را براساس قضیه ۱ و با استفاده از آستانه پایداری به دست آورد. در این حالت لازم است کنترل‌کننده‌های محلی برای تمام مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌ها موجود بوده و بردار حالت، ماتریس تفاضل $\Gamma = B_{P,K} \times e - G$ خواهد بود.

تبصره ۲: به منظور محاسبه دقیق‌تر NMI لازم است فضای کاری Φ با در نظر گرفتن تعداد کافی نقاط خطی‌سازی شبکه‌بندی شود. در این پژوهش آستانه شبکه‌بندی γ_g برابر با 0.1 در نظر گرفته شده است که با توجه به ویژگی‌های gap metric مقادیر $0.1 \leq \gamma_g \leq 0.2$ منطقی می‌باشند.

۴- نتایج شبیه‌سازی

سیستم CSTR هم‌دما که یک واکنش برگشت‌ناپذیر مرتبه اول با معادله حالت

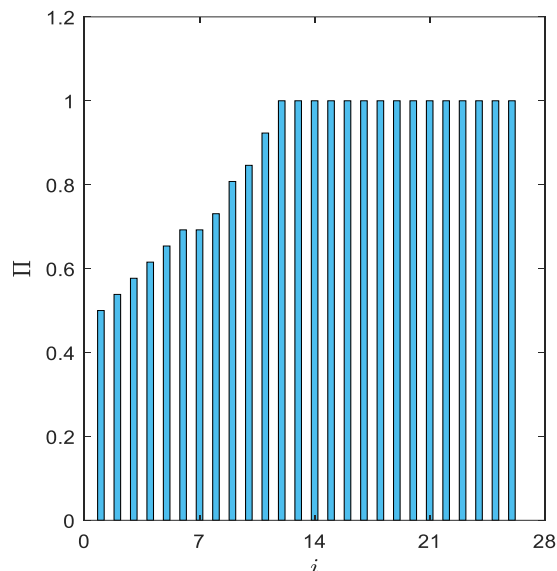
$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A + (C_{Ai} - C_A)u \quad (15)$$

است را در نظر بگیرید که در آن؛ C_A (غلظت واکنش‌دهنده و خروجی سیستم، u (min^{-1}) ورودی سیستم، C_{Ai} (1 mol/l) غلظت خوراک و k (0.028 min^{-1}) نرخ ثابت است.

C_A به عنوان متغیر بهره‌بندی در نظر گرفته می‌شود و فضای کاری $\Phi = \{C_A: 0 \leq C_A \leq 1\}$ خواهد بود. با استفاده از روش شبکه‌بندی ارائه شده در [۲۰] و $\gamma_g = 0.1$ ، فضای کاری به ۲۶ نقطه کاری شبکه‌بندی می‌شود به طوری که فاصله هر دو مدل خطی کمتر از 0.1 بوده و توزیع یکنواختی از مدل‌های خطی در فضای کاری به دست خواهد آمد. فضای کاری، منحنی تعادل، نقاط خطی‌سازی و فاصله میان هر زوج مدل خطی از بانک مدل‌های خطی در شکل (۱) نشان داده شده است. بیشترین مقدار فاصله میان مدل‌های محلی برابر با 1 است که نشان‌دهنده این موضوع

کنترل کننده محلی بهره گرفته می شود.

ابتدا کنترل کننده های محلی تناسبی برای تمامی ۲۶ مدل به گونه ای طراحی می شوند که آستانه پایداری حاصله بیشینه گردد. با استفاده از تبصره ۱ مجدداً رابطه (۱۶) را با توجه به بردار آستانه پایداری $B_{p,K}$ محاسبه کرده و در شکل (۳) نشان داده شده است.



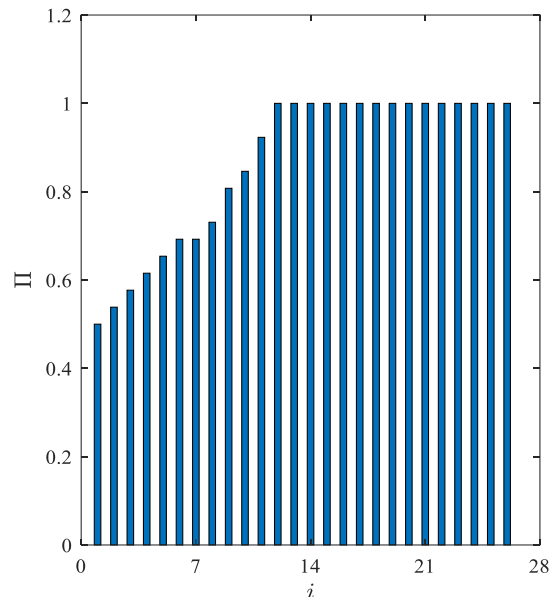
شکل ۳- میزان توانمندی کنترل کننده های محلی تناسبی در پایداری دیگر مدل های خطی مبتنی بر قضیه ۱.

مشابه با شکل (۲)، کنترل کننده های تناسبی ۱۲ تا ۲۶ ام قادر به پایداری تمامی مدل های خطی موجود در بانک مدل ها می باشند. به منظور شبیه سازی، مدل ۱۷ ام به عنوان مدل خطی نامی از میان بانک مدل های خطی انتخاب می شود و ضرایب کنترلی ساختار P-IMC براساس مرجع [۲۲] و براساس مدل خطی ۱۷ ام طراحی می گردند. اطلاعات لازم از کنترل کننده نهایی در جدول ۱ گردآوری شده است.

جدول ۱- اطلاعات کنترل کننده طراحی شده.

زیرناحیه	اول
Local models set	{1 - 26}
θ -range	$0 \leq \theta \leq 1$
Operation point (C_A, u)	17 th (0.85, 0.16)
$b_{opt}(P_{17})$	0.94
P-Controller	$k_p = 0.35$
$b_{p,K}(P_{17}, K_{17})$	0.94
IMC controller	$K_{IMC} = \frac{4.2s + 1}{s}$

کنترل کننده محلی را نشان می دهند به طوری که مقدار 1 بیان کننده توانایی کنترل کننده محلی در پایداری تمامی مدل های محلی است. شکل (۲) مقادیر Π را به ازای تمامی مدل های خطی نشان می دهد.



شکل ۲- میزان توانمندی کنترل کننده های محلی در پایداری دیگر مدل های خطی مبتنی بر نتیجه ۱.

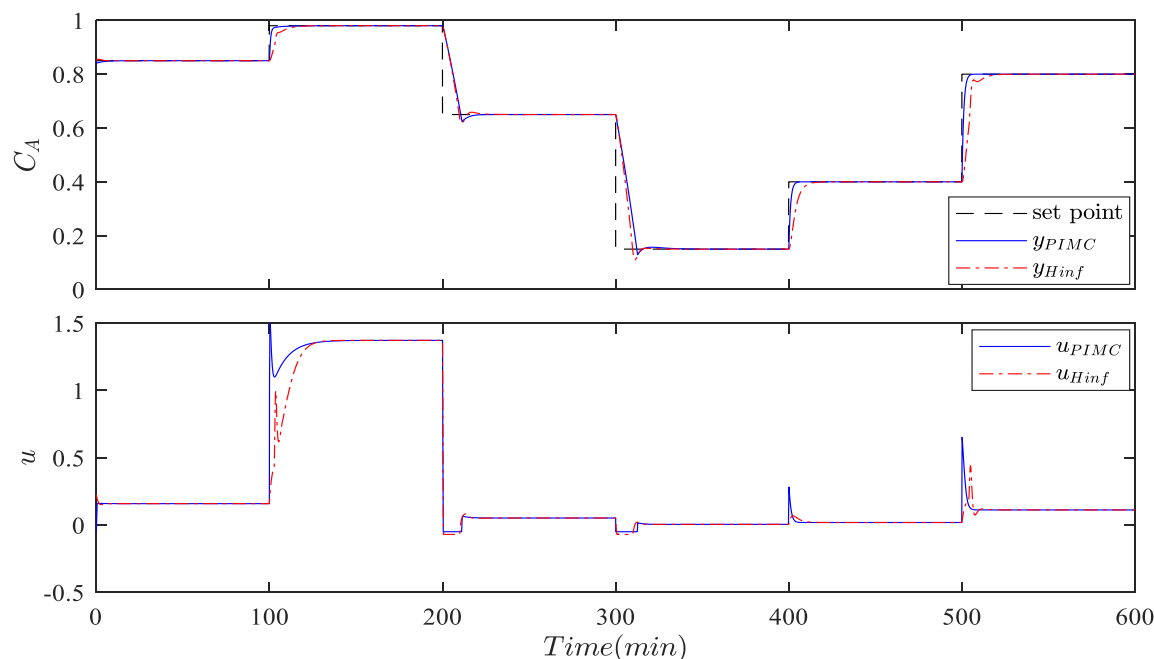
با دقت در شکل (۲) مشاهده می شود مقدار Π برای مدل های خطی ۱۲ تا ۲۶ برابر با 1 است و به این مفهوم است که کنترل کننده طراحی شده برای هر یک از ۱۵ مدل خطی (مدل های ۱۲ تا ۲۶ ام) موجود در بانک مدل های خطی قادر به پایداری تمامی ۲۶ مدل خطی می باشند. البته لازم است توجه شود که برای برآورده شدن این موضوع، کنترل کننده های محلی می بایست بیشینه آستانه پایداری را ارضا نمایند. برای این منظور می توان از کنترل کننده H_{∞} استفاده کرد که با توجه به مقادیر بزرگ بیشینه آستانه پایداری، عملکرد حلقه بسته مناسب نخواهد بود. روش دیگری که در مراجع برای دستیابی به بیشینه آستانه پایداری ذکر شده است، کنترل کننده با ساختار آبخاری P-IMC و یا P-MPC است [۲۲]. در این ساختارها از دو حلقه پشت سر هم استفاده می شود که چون در حلقه ابتدایی از کنترل کننده تناسبی استفاده می شود می توان به مقادیر بیشینه آستانه پایداری رسید. به علاوه در حلقه دوم از کنترل کننده های پایداری ساز مانند IMC و یا MPC استفاده می شود تا پایداری بدست آمده از حلقه اول محفوظ بماند و در عین حال عملکرد حلقه بسته مطلوب گردد. در این پژوهش نیز از روش P-IMC برای طراحی

دو روش به صورت $IAE_{PIMC} = 61.24$ و $IAE_{Hinf} = 80.85$ به دست می‌آید که مویید عملکرد بهتر کنترل کننده طراحی شده در این مقاله است. بدین ترتیب با ارزیابی صورت گرفته در این پژوهش، رفتار سیستم اصلی به مدل خطی ۱۷ ام شباهت زیادی داشته و استفاده از تنها یک کنترل کننده برای کنترل سیستم اصلی در تمامی ناحیه کاری کفایت می‌کند در حالی که در مرجع [۲۳]، کنترل کننده نهایی از ترکیب سه کنترل کننده به دست آمده است. بدین ترتیب با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله می‌توان از افزونگی کنترل کننده‌های محلی نیز در روش مدل‌های چندگانه خودداری نمود.

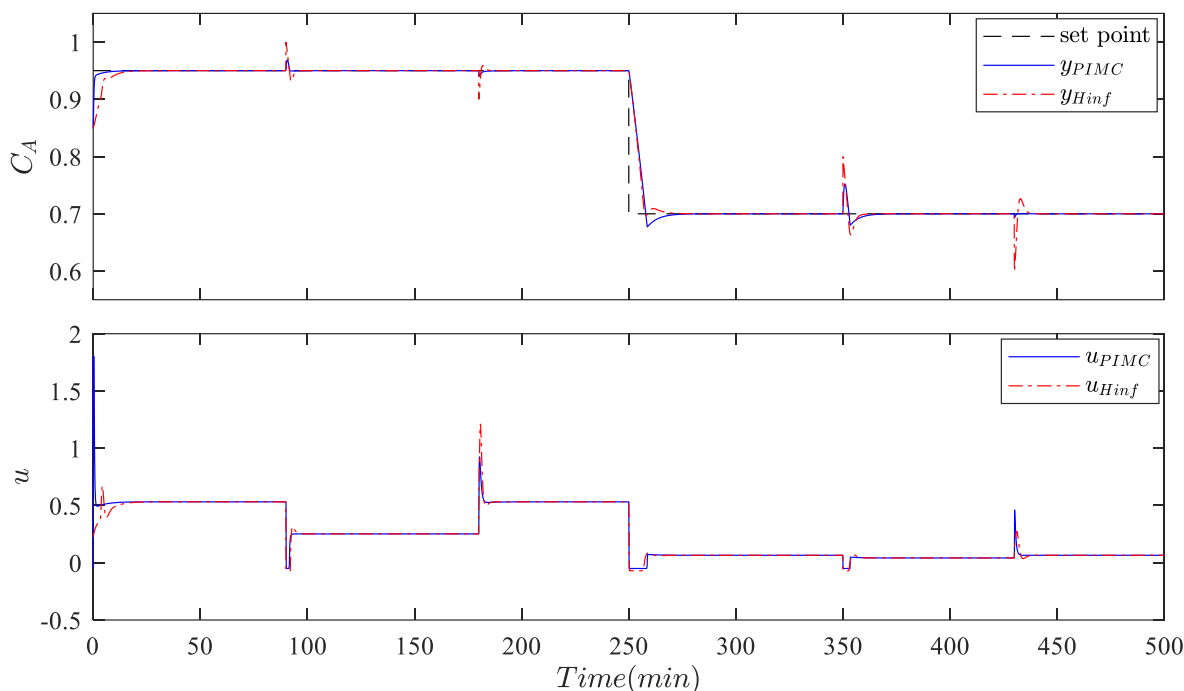
عملکرد کنترل کننده طراحی شده در دفع اثر اغتشاش نیز در شکل (۵) نشان داده شده است. برای آزمایش اثر اغتشاش، در زمان $t = 90$ اغتشاش با دامنه 0.05 به خروجی اضافه شده و در زمان $t = 180$ خارج شده است. همچنین، اغتشاش دیگری با دامنه 0.1 نیز در زمان $t = 350$ به خروجی اضافه شده و در زمان $t = 430$ کم شده است. با دقت در شکل (۵) مشاهده می‌شود هر دو کنترل کننده PIMC و Hinf توانسته‌اند اغتشاشات اعمالی را با نوسانات کم و در زمان کوتاهی دفع نمایند اما با این حال عملکرد PIMC نسبتاً بهتر است. مقادیر انتگرال قدرمطلق خطا (IAE) برای دو روش به صورت $IAE_{PIMC} = 14.57$ و $IAE_{Hinf} = 19.68$ به دست می‌آید که نمایانگر برتری روش ارائه شده در این مقاله است.

بر اساس جدول ۱، تمامی فضای کاری سیستم CSTR به تنها یک زیرناحیه تقسیم شده است که تمامی مدل‌های خطی ۱ تا ۲۶ را شامل می‌شود. مدل ۱۷ ام به عنوان مدل خطی نامی انتخاب شده که خطی شده سیستم CSTR به ازای $C_A = 0.85$ است. بیشینه آستانه پایداری سیستم P_{17} برابر با 0.94 است. همچنین آستانه پایداری سیستم P_{17} به ازای کنترل کننده تناسبی ($k_p = 0.35$) همان مقدار 0.94 حفظ شده است. جهت حفظ پایداری به دست آمده از مرحله اول و در عین حال کسب عملکرد مناسب حلقه بسته، کنترل کننده IMC طراحی شده است که در سطر پایانی جدول گزارش شده است.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی کنترل کننده طراحی شده برای ردیابی ورودی مرجع در شکل (۴) نشان داده شده است. همچنین برای مقایسه، کنترل کننده چندگانه طراحی شده در [۲۳] که از سه کنترل کننده محلی تشکیل می‌گردد نیز شبیه‌سازی شده است. در شکل‌های (۴) و (۵)، زیر نویس PIMC و Hinf به ترتیب بیانگر عملکرد کنترل کننده‌های طراحی شده در این پژوهش و مرجع [۲۳] می‌باشند. با دقت در شکل (۴) مشاهده می‌شود که خروجی سیستم در هر دو روش ورودی مرجع را در تمامی ناحیه کاری با سرعت مناسب و بدون خطای حالت ماندگار دنبال می‌کند. در بازه زمانی ۴۰۰ تا ۶۰۰، سرعت پاسخ PIMC کمی بهتر از Hinf است. همچنین سیگنال کنترل در بازه قابل قبول خود می‌باشد. مقادیر انتگرال قدرمطلق خطا (IAE) برای



شکل ۴- ردیابی ورودی مرجع برای سیستم غیرخطی CSTR.



شکل ۵- ردیابی ورودی مرجع برای سیستم غیرخطی CSTR در حضور اغتشاش.

۵- نتیجه گیری

واقع شده و نشان داده شده است که برخلاف معیارهای سنجش معرفی شده در مراجع گذشته، NMI برابر 1 بوده و استفاده از یک کنترل کننده تنها برای آن، عملکرد بهتری نسبت به کنترل چندگانه مرکب از سه کنترل کننده محلی در ردیابی ورودی مرجع و دفع اثر اغتشاش دارد. بدین ترتیب، معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی ارائه شده در این مقاله با در نظر گرفتن معیارهای فاصله و پایداری به صورت همزمان، این امکان را فراهم می‌سازد که از افزونگی کنترل کننده‌های محلی خودداری گردد و در نتیجه آن، کنترل کننده نهایی ساختار ساده‌تری خواهد داشت.

تمرکز بر سیستم‌های غیرخطی با NMI کوچک‌تر از 1 و نزدیک به 0 و رویارویی با چالش‌های انتخاب بهینه مدل‌های خطی نامی در این سیستم‌ها، مطالعه سیستم‌های غیرخطی دارای بیش از یک متغیر بهره‌بندی، و طراحی کنترل کننده چندگانه با ساختاری به جز P-IMC که در آن آستانه پایداری کاهش یافته و ساختار نهایی کنترل کننده پیچیده‌تر می‌شود؛ در کارهای آتی مورد توجه واقع خواهند شد.

در این مقاله روشی برای تعیین شدت رفتار غیرخطی سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است. از ابزار gap metric برای شبکه‌بندی فضای کاری و تشکیل بانک مدل‌های خطی استفاده شده است به گونه‌ای که فاصله میان هر دو مدل خطی متوالی کمتر از یک آستانه اولیه کوچک خواهد بود. از بیشینه آستانه پایداری (و یا آستانه پایداری) برای تشکیل ماتریس تفاضل استفاده شده است به طوری که سطور این ماتریس توانایی کنترل کننده‌های محلی متناظر در پایداری دیگر مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌ها را نشان می‌دهند. سپس معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی NMI ارائه شده است که مقادیری بین 0 و 1 داشته و مقادیر نزدیک به 1 بیانگر رفتار غیرخطی ناچیز سیستم غیرخطی بوده و بالعکس. در این حالت، کنترل کننده مبتنی بر مدل چندگانه از تعداد کمی از کنترل کننده‌های محلی تشکیل شده و ساختار ساده‌تری خواهد داشت. برای حالتی که $NMI = 1$ است استفاده از یک کنترل کننده جهت پایداری تمامی مدل‌های خطی کفایت می‌کند. یک سیستم غیرخطی CSTR مورد مطالعه

مراجع

- [1] K. Elkhalil, and A. Zribi. "Linear controller design approach for nonlinear systems by integrating gap metric and stability margin." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 237, no. 10, (2023): 1-12.
- [2] J. Xavier, S.K. Patnaik, and R.C. Panda. "Nonlinear Measure for Nonlinear Dynamic Processes Using Convergence Area: Typical Case Studies." *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16, no. 5, (2021): 051002.
- [3] T. Schweickhardt, and F. Allgöwer. "Linear control of nonlinear systems based on nonlinearity measures." *Journal of Process Control* 17, no. 3, (2007): 273-284.
- [4] M. Ahmadi, and M. Haeri. "A new structured multi-model control of nonlinear systems by integrating stability margin and performance." *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 139, no. 9, (2017): 091014.
- [5] C. Desoer, and Y.T. Wang. "Foundations of feedback theory for nonlinear dynamical systems." *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 27, no. 2, (1980): 104-123.
- [6] S.A. Eker, and M. Nikolaou. "Linear control of nonlinear systems: Interplay between nonlinearity and feedback." *AIChE journal* 48, no. 9, (2002): 1957-1980.
- [7] M. Guay, R. Dier, J. Hahn, and P.J. McLellan. "Effect of process nonlinearity on linear quadratic regulator performance." *Journal of process control* 15, no. 1, (2005): 113-124.
- [8] K.R Harris , M. Celeste Colantonio, and A. Palazoğlu. "On the computation of a nonlinearity measure using functional expansions." *Chemical engineering science* 55, no. 13, (2000): 2393-2400.
- [9] A. Helbig, W. Marquardt, and F. Allgöwer. "Nonlinearity measures: definition, computation and applications." *Journal of Process Control* 10, no. 2-3, (2000): 113-123.
- [10] A. Alaeddini, K.A. Morgansen, and M. Mesbahi. "Augmented state feedback for improving observability of linear systems with nonlinear measurements." *Systems & Control Letters* 133, (2019): 104520.
- [11] J. Du, and Z. Tong. "An improved nonlinearity measure based on gap metric." in *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, pp. 1920-1923. IEEE, 2014.
- [12] M. Ahmadi, and M. Haeri. "An integrated best-worst decomposition approach of nonlinear systems using gap metric and stability margin." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 235, no. 4, (2021): 486-502.
- [13] M. Ahmadi, and M. Haeri. "A systematic decomposition approach of nonlinear systems by combining gap metric and stability margin." *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 43, no. 9, (2021): 2006-2017.
- [14] G.T. Tan, M. Huzmezan, and K. Ezra Kwok. "Vinnicombe metric as a closed-loop nonlinearity measure." in *2003 European Control Conference (ECC)*, pp. 751-756. IEEE, 2003.
- [15] W. Tan, H.J. Marquez, T. Chen, and J. Liu. "Analysis and control of a nonlinear boiler-turbine unit." *Journal of process control* 15, no. 8, (2005): 883-891.
- [16] J. Du, and T.A. Johansen. "Control-relevant nonlinearity measure and integrated multi-model control." *Journal of Process Control* 57, (2017): 127-139.
- [17] M. Ahmadi. "Multi-Model Control of Nonlinear Systems Using an Improved Procedure for Nominal Local Models Selection." *Journal of Mechanical Engineering* 52, no. 2, (2022): 251-259 (in Persian).
- [18] A. El-Sakkary. "The gap metric: Robustness of stabilization of feedback systems." *IEEE Transactions on Automatic Control* 30, no. 3, (1985): 240-247.
- [19] K. Zhou, and J.C. Doyle. *Essentials of robust control*. Vol. 104. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 1998.
- [20] J. Du, C. Song, Y. Yao, and P. Li. "Multilinear model decomposition of MIMO nonlinear systems and its implication for multilinear model-based control." *Journal of Process Control* 23, no. 3, (2013): 271-281.
- [21] J. Du, C. Song, and P. Li. "A gap metric based nonlinearity measure for chemical processes." in *2009 American Control Conference*, pp. 4440-4445. IEEE, 2009.

- [22] M. Ahmadi, P. Rikhtehgar, and M. Haeri. "A multi-model control of nonlinear systems: A cascade decoupled design procedure based on stability and performance." *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 42, no. 7, (2020): 1271-1280.
- [23] W. Tan, H.J. Marquez, T. Chen, and J. Liu. "Multimodel analysis and controller design for nonlinear processes." *Computers & chemical engineering* 28, no. 12, (2004): 2667-2675.