

معرفی روشی کاربردی مبتنی بر کنترل برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم با استفاده از Gap Metric

مهدي احمدی^{۱*}

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله یک روش کاربردی برای سنجش رفتار غیرخطی سیستم‌های دارای دینامیک غیرخطی ارائه می‌شود. در این روش، سیستم غیرخطی در فضای کاری خود و با استفاده از ابزار هوشمند gap metric به یک بانک از مدل‌های خطی تقسیم شده و با محاسبه آستانه پایداری بیشینه، توانمندی هر یک از کنترل‌کننده‌های محلی در پایداری مجموعه مدل‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس معیاری برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم تحت مطالعه ارائه می‌گردد که دارای مقادیری بین صفر تا یک است. برخلاف بسیاری از روش‌های سنجش شدت رفتار غیرخطی، روش ارائه شده در این پژوهش برای سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار نیز قابل استفاده است. علاوه بر این، روش ارائه شده کفایت استفاده از تنها یک کنترل‌کننده خطی و یا لزوم استفاده از روش مدل‌های چندگانه جهت نیل به اهداف حلقه بسته را پاسخ می‌دهد و از افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی جلوگیری می‌نماید. برای ارزیابی روش ارائه شده، یک سیستم غیرخطی ¹ CSTR شبیه‌سازی شده است که نتایج دست‌آمده نشان می‌دهند معیار معرفی شده برای سنجش شدت رفتار غیرخطی عملکرد مناسبی دارد.	دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۲۰ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۷/۱۵
	واژگان کلیدی: سیستم غیرخطی، سنجش رفتار غیرخطی، کنترل‌کننده، Gap metric، بیشینه آستانه پایداری.

روش‌های تحلیل و طراحی و سادگی پیاده‌سازی کنترل‌کننده نهایی از جمله مهم‌ترین ویژگی‌های روش‌های خطی است [۳] و به همین علت نسبت به روش‌های غیرخطی، در میان محققین محبوب‌تر می‌باشند. اما استفاده از کنترل‌کننده‌های خطی، تنها در ناحیه‌ای در اطراف نقطه کاری برای سیستم‌های غیرخطی دارای اعتبار است و لذا با تغییر نقطه کاری به هر دلیلی از جمله عدم قطعیت، اغتشاش و رفتار غیرخطی کیفیت عملکرد کنترل‌کننده می‌تواند تقلیل یابد. روش‌های مدل‌های چندگانه روشی میانی هستند که از ویژگی‌های مثبت روش‌های خطی بهره می‌برند و در عین حال با ترکیب تعداد مناسبی از کنترل‌کننده‌های خطی عمل کنترلی را در فضای بزرگ‌تری نسبت به روش‌های خطی انجام می‌دهند [۴]. در استفاده

۱- مقدمه

بسیاری از سیستم‌ها در دنیای واقعی دارای دینامیک غیرخطی هستند و در حالتی که نقطه کاری هم در یک بازه گسترده تغییر می‌کند پیچیدگی رفتار سیستم تشدید می‌شود. رفتار غیرخطی یک ویژگی ذاتی سیستم است که بر پایداری و عملکرد سیستم تاثیر بسزایی دارد [۱، ۲]. در میان منابع مختلف برای مواجهه با این موضوع سه رویکرد اتخاذ شده است: استفاده از روش‌های غیرخطی، مدل‌های چندگانه و خطی. اگرچه در روش‌های غیرخطی کیفیت عملکرد کنترلی بسیار خوب است اما از پیچیدگی تحلیل و طراحی، حجم محاسبات زیاد و سختی پیاده‌سازی رنج می‌برند. در آن سوی طیف، محاسبات ساده، گستردگی

¹ Continuous Stirred Tank Reactor

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: mahdiahmadi@esfarayen.ac.ir

¹ استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین

از روش‌های خطی و مدل‌های چندگانه، تشخیص شدت رفتار غیرخطی سیستم و به عبارتی پاسخ به این سوال که "سیستم تحت مطالعه به چه میزان خطی / غیرخطی است؟" بسیار با اهمیت خواهد بود چرا که بر تعداد کنترل‌کننده‌های خطی و ساختار کنترل‌کننده نهایی تاثیر می‌گذارد که به همین منظور در این زمینه مطالعات زیادی از سال ۱۹۸۰ به بعد انجام شده است [۵]. برای پاسخ به این پرسش لازم است محدودیت عملکردی روش‌های خطی با بررسی شدت رفتار غیرخطی سیستم ارزیابی شده و کفایت استفاده از تنها یک کنترل‌کننده بررسی گردد و پس از آن و در صورتی که استفاده از یک کنترل‌کننده خطی کافی نباشد بایستی روش مدل‌های چندگانه مورد استفاده قرار گیرند.

در پاسخ به پرسش "آیا استفاده از یک کنترل‌کننده خطی کفایت می‌کند و یا لازم است روش مدل‌های چندگانه طراحی گردند؟"، در سالیان گذشته روش‌های متعددی برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم با استفاده از پاسخ حلقه باز و حلقه بسته سیستم ارائه شده است [۳، ۴-۱۰]. در روش‌های مبتنی بر پاسخ حلقه باز، فاصله میان پاسخ حلقه باز سیستم غیرخطی و بهترین مدل خطی مورد سنجش قرار می‌گیرد. از آنجایی که فاصله میان سیستم‌های ناپایدار با استفاده از نرم امکان‌پذیر نیست لذا این روش‌ها برای سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار قابل استفاده نمی‌باشند [۱۱]. در روش‌های مبتنی بر پاسخ حلقه بسته، با فرض اطلاع از ساختار کنترل‌کننده خطی پارامترهای موجود به نحوی طراحی می‌شوند که فاصله میان پاسخ‌های حلقه بسته دو سیستم غیرخطی و خطی کمینه گردد. با این حال اطلاع از ساختار کنترل‌کننده محدودیت این روش‌ها است [۱].

در سال‌های اخیر استفاده از متریک‌ها برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم‌ها افزایش یافته است [۱۲-۱۶]. Gap metric به عنوان یک متریک توانمند نسبت به دیگر روش‌های مبتنی بر نرم برای محاسبه فاصله میان دو سیستم خطی به کار می‌رود [۱۷]. از آنجایی که این متریک قادر به ارزیابی فاصله میان سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار است لذا استفاده از آن برای سیستم‌های غیرخطی انتگرالی و ناپایدار نیز امکان‌پذیر خواهد بود [۱۱].

در این مقاله، از ابزار gap metric برای توزیع مناسب، یکنواخت و کافی مدل‌های خطی و تشکیل بانک مدل‌های

محلی استفاده می‌شود. سپس با محاسبه بیشینه آستانه پایداری هر یک از مدل‌های خطی، توانایی کنترل‌کننده‌های محلی در پایداری تمامی مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌های خطی ارزیابی می‌شود. به منظور سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم، معیاری مبتنی بر متریک و بیشینه آستانه پایداری با مقادیر بین 0 و 1 تعریف می‌شود که مقادیر نزدیک به 0 و 1 به ترتیب بیانگر افزایش و کاهش شدت رفتار غیرخطی سیستم می‌باشند. برای ارزیابی روش ارائه شده یک سیستم CSTR غیرخطی مطالعه شده است.

نوآوری‌های این پژوهش در مقایسه با دیگر روش‌های موجود، شامل موارد زیر است:

- اجتناب از روش انتخاب ترتیبی مدل‌های خطی نامی مورد استفاده در [۴، ۱۱، ۱۴-۱۷] و بررسی توانمندی هر یک از کنترل‌کننده‌های محلی در پایداری تمامی مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌های محلی.

- تعریف یک معیار جدید مبتنی بر gap metric و بیشینه آستانه پایداری برای نمایش توانمندی هر یک از کنترل‌کننده‌های محلی در پایداری دیگر مدل‌های محلی در مقایسه با [۱۲ و ۱۳].

- استفاده از کنترل‌کننده نهایی با ساختار به مراتب ساده‌تر نسبت به دیگر روش‌های مبتنی بر انتخاب ترتیبی مورد استفاده در [۴، ۱۱، ۱۴-۱۷].

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲، به معرفی متریک مورد استفاده برای سنجش فاصله میان مدل‌های خطی و ارتباط آن با پایداری پرداخته می‌شود. بخش ۳ به معرفی روش ارائه شده برای سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم می‌پردازد و نتایج شبیه‌سازی در بخش ۴ گزارش می‌شود. در پایان، بخش ۵ نتیجه حاصل از این پژوهش را ارائه می‌دهد.

۲- متریک و ارتباط آن با پایداری

برای پاسخ به سوال "پاسخ دو سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان چقدر به یکدیگر شباهت دارند؟"، در دهه ۱۹۸۰ ابزار Gap metric در [۱۸] ارائه شد. این روش فاصله دو سیستم را در مضمون حلقه بسته محاسبه می‌کند و به همین خاطر برای سیستم‌های انتگرالی و ناپایدار نیز قابل بهره‌برداری است [۱۹]. در [۱۹] نشان داده شده است که این متریک فاصله دو سیستم خطی را دقیق‌تر از دیگر روش‌های مبتنی بر نرم محاسبه می‌نماید. با فرض اینکه

وابسته است. قضیه و نتیجه زیر ارتباط میان gap metric و پایداری را بیان می‌کنند.

قضیه ۱ [۱۹]: فرض کنید سیستم فیدبک با زوج (P, K)

پایدار است. اگر $\{P_\Delta: \delta(P, P_\Delta) < \gamma\}$ تعریف شود

آنگاه سیستم فیدبک با زوج (P_Δ, K) برای تمامی $P_\Delta \in \Sigma$

نیز پایدار است اگر و تنها اگر $\gamma \leq b_{P,K}$.

نتیجه ۱ [۱۷]: فرض کنید $P = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ و $P_1 =$

$\tilde{M}_1^{-1}\tilde{N}_1$. سپس کنترل‌کننده پایدارساز K برای P و P_1

وجود دارد اگر و تنها اگر $\delta(P, P_1) \leq b_{opt}(P) < 1$.

از آنجایی که قضیه ۱ و نتیجه ۱ امکان در نظر گرفتن

عملکرد حلقه بسته سیستم را در مرحله انتخاب مدل‌های

خطی نامی فراهم می‌کنند، زیربنای بسیاری از روش‌های

جدید مدل‌های چندگانه شده‌اند [۱، ۱۲، ۱۶، ۱۷].

۳- معیار سنجش شدت رفتار غیر خطی

سیستم غیر خطی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (10)$$

را در نظر بگیرید که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم،

$u \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم

می‌باشند. همچنین بردار $f(\cdot)$ و $h(\cdot)$ توابع برداری

غیر خطی مشتق‌پذیر می‌باشند.

متغیرهای بهره‌بندی θ سیستم را مشخص کنید به گونه‌ای

که این متغیرها به آرامی تغییر کرده، رفتار سیستم

غیر خطی را توصیف می‌کنند و سطح کاری سیستم و

متناظرا نقاط تعادل را نمایش می‌دهند. معمولا مجموعه‌ای

از خروجی، ورودی، و حالت‌های سیستم به عنوان

متغیرهای بهره‌بندی انتخاب می‌شوند. فضای کاری سیستم

(Φ) را مشخص کنید که در واقع فضای تغییرات متغیرهای

بهره‌بندی $(\theta \in \Phi)$ است. سپس فضای کاری را با استفاده

از الگوریتم توزیع مبتنی بر gap metric ارائه شده در [۲۰]

شبکه‌بندی نمایید **به طوری که** فاصله هر دو مدل خطی

متوالی کمتر از γ_g گردد. توجه شود که هرچه مقدار γ_g

کوچک‌تر باشد شبکه‌بندی فضای کاری بهتر خواهد بود اما

در عین حال تعداد مدل‌های خطی نیز افزایش خواهند

یافت. بدین ترتیب با فرض اینکه n نقطه در فضای بهره‌بندی

توزیع شده‌اند، n نقطه تعادل **به دست** می‌آید. نقطه تعادل

متناظر با θ_i **به صورت** $(x_{ei}, u_{ei}, y_{ei}) \triangleq$

$P(s)$ ماتریس تابع تبدیل گویا بوده، نمایش تفکیک راست

نرمالیزه شده آن **به صورت**

$$P(s) = N(s)M(s)^{-1} \quad (1)$$

می‌باشد که در آن روابط (۲) تا (۴) برقرار است.

$$\tilde{M}(s)M(s) + \tilde{N}(s)N(s) = I, \quad (2)$$

$$\tilde{M}(s) = M^T(-s), \quad (3)$$

$$\tilde{N}(s) = N^T(-s). \quad (4)$$

فاصله بین دو سیستم خطی با بُعد محدود و تعداد یکسان

ورودی و خروجی به صورت (۵) تعریف می‌شود.

$$\delta(P_1, P_2) = \max\{\vec{\delta}(P_1, P_2), \vec{\delta}(P_2, P_1)\} \quad (5)$$

که در آن $\vec{\delta}(P_1, P_2)$ متریک جهت‌دار بوده و **به صورت**

رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$\vec{\delta}(P_1, P_2) = \inf_{Q \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{N}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{N}_2 \end{bmatrix} Q \right\|_\infty \quad (6)$$

همچنین فاصله میان دو سیستم خطی تک ورودی-تک

خروجی **به صورت** رابطه

$$\delta(P_1, P_2) = \sup_{\omega} \frac{|P_1(j\omega) - P_2(j\omega)|}{\sqrt{1+|P_1(j\omega)|^2} \sqrt{1+|P_2(j\omega)|^2}} \quad (7)$$

تعریف می‌شود که در آن $P_1(j\omega)$ و $P_2(j\omega)$ بیانگر پاسخ

فرکانسی دو سیستم P_1 و P_2 می‌باشند.

مقدار فاصله دو سیستم تحت gap metric همواره بین 0

و 1 می‌باشد که مقادیر نزدیک به 0 نشان‌دهنده نزدیکی

رفتار دو سیستم خطی در مضمون حلقه بسته بوده و در

این حالت می‌توان حداقل یک کنترل‌کننده فیدبک یافت

به طوری که هر دو سیستم خطی را پایدار نماید.

در [۱۹] نشان داده شده است که میان gap metric و

پایداری ارتباط معنادار و پرکاربردی وجود دارد. با توجه به

[۱۹]، آستانه پایداری و بیشینه آستانه پایداری **به ترتیب**

به صورت

$$b_{P,K} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} [I \quad P] \right\|_\infty^{-1}, \quad (8)$$

$$b_{opt}(P) = \sqrt{1 - \|\tilde{N} \quad \tilde{M}\|_H^2} < 1 \quad (9)$$

تعریف می‌شوند که در آن‌ها $K(s)$ کنترل‌کننده پایدارساز

تابع تبدیل $P(s)$ ، و $\|\cdot\|_H$ بیانگر نرم هنکل است. با دقت

در رابطه‌های (۸) و (۹) مشاهده می‌شود که آستانه پایداری

به سیستم $P(s)$ و کنترل‌کننده $K(s)$ مرتبط است

در حالی که بیشینه آستانه پایداری یک ویژگی ذاتی بوده و

تنها به ماتریس‌های تفکیک راست نرمالیزه شده سیستم

سیستم خواهد بود. $(x_e(\theta_i), u_e(\theta_i), y_e(\theta_i))$ غیرخطی (۱۰) در نقطه تعادل (x_{ei}, u_{ei}, y_{ei}) خطی سازی می شود و مدل خطی P_i به صورت

$$\begin{aligned} \delta x &= A_i \delta x + B_i \delta u; i = 1, \dots, n \\ \delta y &= C_i \delta x + D_i \delta u \end{aligned} \quad (11)$$

به دست می آید که در آن $\delta x = x - x_{ei}$ ، $\delta y = y - y_{ei}$ ، $\delta u = u - u_{ei}$ ، $A_i = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ و $B_i = \frac{\partial f}{\partial u}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ ، $C_i = \frac{\partial h}{\partial x}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ و $D_i = \frac{\partial h}{\partial u}|_{(x_{ei}, u_{ei})}$ می باشد.

بدین ترتیب n مدل خطی به صورت یکنواخت از خطی سازی سیستم غیرخطی (۱۰) به دست آمده اند به طوری که فاصله هر دو مدل متوالی کمتر از γ_g است. در واقع، n مدل خطی به دست آمده تقریبی از سیستم غیرخطی را ایجاد کرده اند و بنابراین می توان از ویژگی های مثبت gap metric و آستانه پایداری برای سیستم غیرخطی بهره برد.

با ایجاد بانک مدل های خطی $\mathcal{P} = \{P_i; i = 1, \dots, n\}$ ماتریس فاصله $G \triangleq [\delta(P_i, P_j)]_{n \times n}$ و بردار بیشینه آستانه پایداری $B_{opt} = [b_{opt}(P_i)]_{n \times 1}$ را می توان با استفاده از روابط (۵) و (۹) به دست آورد. سپس ماتریس تفاضل $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{n \times n}$ با استفاده از رابطه

$$\Gamma = B_{opt} \times e - G \quad (12)$$

به دست می آید که در آن e یک بردار $1 \times n$ بوده و تمامی درایه های آن 1 می باشند $(e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{n \times 1})$. در ماتریس تفاضل، در واقع اختلاف بیشینه آستانه پایداری مدل خطی P_i و فاصله $\delta(P_i, P_j)$ محاسبه می شود. مطابق با نتیجه ۱، در صورتی که $b_{opt}(P_i) \geq \delta(P_i, P_j)$ حداقل یک کنترل فیدبک یافت می شود که هر دو مدل خطی P_i و P_j را پایدار نماید و در این حالت $\gamma_{i,j} \geq 0$ خواهد شد و بالعکس. بدین ترتیب برای راحتی کار، ماتریس دودویی

$$\Gamma_b \triangleq [\gamma_{b_{ij}}]_{n \times n} \quad (13)$$

$$\gamma_{b_{ij}} = \begin{cases} 1 & \gamma_{i,j} \geq 0 \\ 0 & \gamma_{i,j} < 0 \end{cases}$$

تعریف می شود که درایه 1 و 0 به ترتیب بیانگر امکان و عدم امکان پایداری مدل P_j توسط کنترل فیدبک طراحی شده برای مدل P_i است. به عبارتی ماتریس دودویی تعریف شده در رابطه (۱۳)، توانمندی کنترل کننده های محلی را در پایداری سازی مدل های خطی نشان می دهد و هر چه تعداد درایه های 1 در یک سطر ماتریس Γ_b بیشتر باشد

قدرت پایداری کنترل کننده محلی متناظر با آن سطر نیز بیشتر خواهد بود.

با استفاده از ماتریس دودویی حاصل در (۱۳)، معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی سیستم غیرخطی (۱۰) در تمامی فضای کاری Φ به صورت

$$NMI = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_b(i, j) \right) \quad (14)$$

تعریف می شود. با دقت در رابطه (۱۴) نتایج زیر استنباط می شوند:

$$0 \leq NMI \leq 1 \quad (1)$$

۲- در صورتی که مقدار $NMI=1$ باشد (با فرض اینکه به ازای $i = m$ اتفاق افتد) یعنی حداقل یک کنترل فیدبک وجود دارد که تمامی مدل های محلی موجود در بانک \mathcal{P} را پایدار نماید و لذا سیستم غیرخطی (۱۰) به مدل خطی P_m شباهت خواهد داشت و استفاده از تنها یک کنترل کننده خطی برای پایداری تمام فضای کاری کفایت می کند.

۳- هرچه مقدار NMI به 1 نزدیک تر باشد نشان دهنده موارد زیر است:

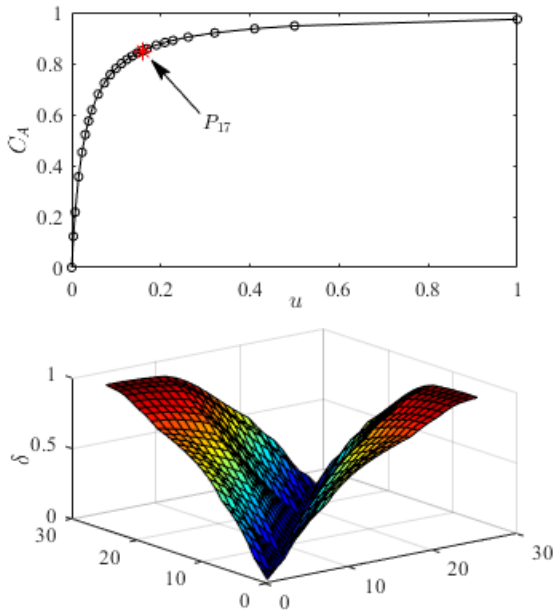
- شدت رفتار غیرخطی سیستم (۱۰) کم است و سیستم غیرخطی رفتاری شبیه به یک سیستم خطی را داراست.

- امکان پایداری سیستم غیرخطی (۱۰) در کل فضای کاری توسط فقط یک کنترل کننده محلی وجود ندارد و لازم است از روش مدل چندگانه بهره جست.
- کنترل کننده چندگانه ساختار ساده تری خواهد داشت.

۴- هرچه مقدار NMI به 0 نزدیک تر باشد نشان دهنده موارد زیر است:

- شدت رفتار غیرخطی سیستم (۱۰) زیاد است.
- کنترل کننده های محلی تنها برای یک محدوده کوچک امکان پایداری سیستم غیرخطی (۱۰) را دارند.
- کنترل کننده مبتنی بر مدل چندگانه از تعداد زیادی کنترل کننده محلی باید تشکیل گردد که موجب پیچیدگی ساختار کنترل کننده نهایی خواهد شد.

تبصره ۱: برای تصمیم گیری در روش ارائه شده در این پژوهش از بیشینه آستانه پایداری استفاده شده است. از آن جایی که استفاده از بیشینه آستانه پایداری عملکرد حلقه



شکل ۱- الف) فضای کاری، منحنی تعادل، و نقاط خطی‌سازی سیستم CSTR (بالا)؛ ب) فاصله میان مدل‌های خطی (پایین). برای استفاده از روش معرفی شده در این پژوهش، فاصله میان هر دو زوج مدل خطی و بیشینه آستانه پایداری برای هر یک از مدل‌های خطی به ترتیب با استفاده از دستور gapmetric و ncfyn در نرم‌افزار MATLAB محاسبه می‌شوند. سپس معیار شدت رفتار غیرخطی سیستم CSTR برابر با $NMI = 1$ به دست می‌آید که نشان‌دهنده وجود حداقل یک کنترل فیدبک است که قادر به پایدارسازی تمامی ۲۶ مدل خطی موجود در بانک مدل‌های خطی است. به عبارت دیگر، می‌توان حداقل یک کنترل فیدبک پیدا کرد که سیستم غیرخطی (۱۵) را در تمام فضای کاری پایدار نماید.

برای بررسی بهتر و دقیق‌تر این موضوع و رابطه (۱۴)، رابطه $\Pi(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Gamma_b(i, j)$ (۱۶) را در نظر بگیرید ($NMI = \max_i \Pi(i)$) در واقع، این رابطه میزان توانمندی کنترل‌کننده‌های محلی در پایدارسازی دیگر مدل‌های خطی را مبتنی بر نتیجه ۱ بیان می‌کند. مقادیر نزدیک به ۰ و ۱ به ترتیب ضعف و قوت کنترل‌کننده محلی را نشان می‌دهند به طوری که مقدار ۱ بیان‌کننده توانایی کنترل‌کننده محلی در پایدارسازی تمامی مدل‌های محلی است. شکل ۲ مقادیر Π را به ازای تمامی مدل‌های خطی نشان می‌دهد.

بسته را تحت تاثیر قرار می‌دهد می‌توان نتیجه مشابهی را براساس قضیه ۱ و با استفاده از آستانه پایداری به دست آورد. در این حالت لازم است کنترل‌کننده‌های محلی برای تمام مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌ها موجود بوده و بردار $B_{P,K} = [b_{p,K}(P_i, K_i)]_{n \times 1}$ در دسترس باشد. در این حالت، ماتریس تفاضل $\Gamma = B_{P,K} \times e - G$ خواهد بود.

تبصره ۲: به منظور محاسبه دقیق‌تر NMI لازم است فضای کاری Φ با در نظر گرفتن تعداد کافی نقاط خطی‌سازی شبکه‌بندی شود. در این پژوهش آستانه شبکه‌بندی γ_g برابر با ۰.۱ در نظر گرفته شده است که با توجه به ویژگی‌های gap metric مقادیر $0.1 \leq \gamma_g \leq 0.2$ منطقی می‌باشند.

۴- نتایج شبیه‌سازی

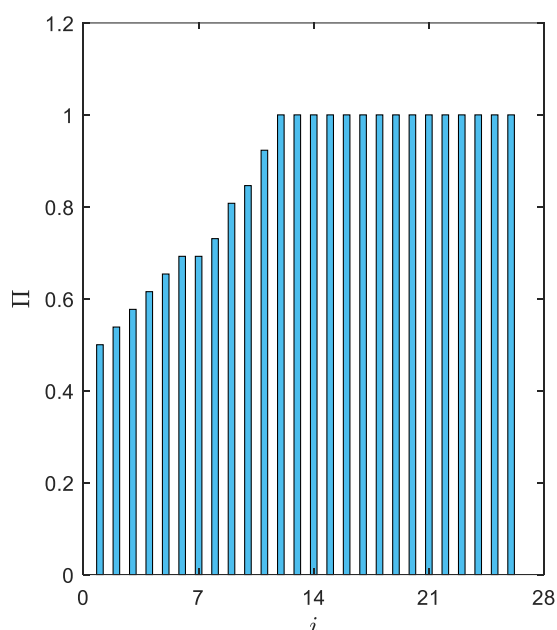
سیستم CSTR هم‌دما که یک واکنش برگشت‌ناپذیر مرتبه اول با معادله حالت

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A + (C_{Ai} - C_A)u \quad (15)$$

است را در نظر بگیرید که در آن؛ C_A (mol/l) غلظت واکنش‌دهنده و خروجی سیستم، u (min^{-1}) ورودی سیستم، C_{Ai} (1 mol/l) غلظت خوراک و k (0.028 min^{-1}) نرخ ثابت است.

C_A به عنوان متغیر بهره‌بندی در نظر گرفته می‌شود و فضای کاری $\Phi = \{C_A: 0 \leq C_A \leq 1\}$ خواهد بود. با استفاده از روش شبکه‌بندی ارائه شده در [۲۰] و $\gamma_g = 0.1$ ، فضای کاری به ۲۶ نقطه کاری شبکه‌بندی می‌شود به طوری که فاصله هر دو مدل خطی کمتر از ۰.۱ بوده و توزیع یکنواختی از مدل‌های خطی در فضای کاری به دست خواهد آمد. فضای کاری، منحنی تعادل، نقاط خطی‌سازی و فاصله میان هر دو زوج مدل خطی از بانک مدل‌های خطی در شکل ۱ نشان داده شده است. بیشترین مقدار فاصله میان مدل‌های محلی برابر با ۱ است که نشان‌دهنده این موضوع است که در بانک مدل‌های خطی، زوج مدل‌هایی وجود دارند که رفتار بسیار دور نسبت به یکدیگر دارند. بدین ترتیب با توجه به روش‌های مبتنی بر gap metric در [۱۱، ۲۱]، این سیستم غیرخطی یک سیستم با شدت رفتار غیرخطی زیاد شناخته می‌شود.

بیشینه گردد. با استفاده از تبصره ۱ مجدداً رابطه (۱۶) را با توجه به بردار آستانه پایداری $B_{p,K}$ محاسبه کرده و در شکل ۳ نشان داده شده است.



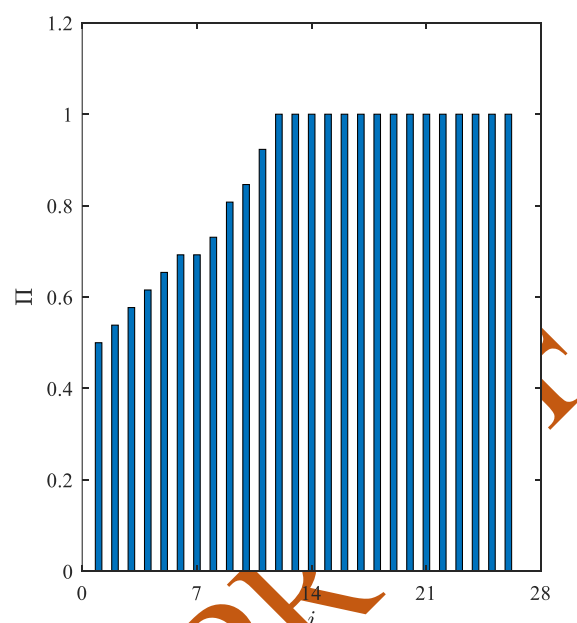
شکل ۳- میزان توانمندی کنترل‌کننده‌های محلی متناسبی در پایداری دیگر مدل‌های خطی مبتنی بر قضیه ۱.

شکل ۲- میزان توانمندی کنترل‌کننده‌های محلی متناسبی در پایداری دیگر مدل‌های خطی مبتنی بر قضیه ۱. مشابه با شکل ۲، کنترل‌کننده‌های متناسبی ۱۲ تا ۲۶ ام قادر به پایداری تمامی مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌ها می‌باشند. به منظور شبیه‌سازی، مدل ۱۷ ام به عنوان مدل خطی نامی از میان بانک مدل‌های خطی انتخاب می‌شود و ضرایب کنترلی ساختار P-IMC براساس مرجع [۲۷] و براساس مدل خطی ۱۷ ام طراحی می‌گردند. اطلاعات لازم از کنترل‌کننده نهایی در جدول ۱ گردآوری شده است.

جدول ۱- اطلاعات کنترل‌کننده طراحی شده.

زیرناحیه	اول
Local models set	{1 - 26}
-range θ	$0 \leq \theta \leq 1$
Operation point (C_{A_i}, u)	17 th (0.85, 0.16)
$b_{opt}(P_{17})$	0.94
P-Controller	$k_p = 0.35$
$b_{p,K}(P_{17}, K_{17})$	0.94
IMC controller	$K_{IMC} = \frac{4.2s + 1}{s}$

براساس جدول ۱، تمامی فضای کاری سیستم CSTR به تنها یک زیرناحیه تقسیم شده است که تمامی مدل‌های



شکل ۲- میزان توانمندی کنترل‌کننده‌های محلی در پایداری دیگر مدل‌های خطی مبتنی بر نتیجه ۱.

با دقت در شکل ۲ مشاهده می‌شود مقدار Π برای مدل‌های خطی ۱۲ تا ۲۶ برابر با ۱ است و به این مفهوم است که کنترل‌کننده طراحی شده برای هر یک از ۱۵ مدل خطی (مدل‌های ۱۲ تا ۲۶ ام) موجود در بانک مدل‌های خطی قادر به پایداری تمامی ۲۶ مدل خطی می‌باشند. البته لازم است توجه شود که برای برآورده شدن این موضوع، کنترل‌کننده‌های محلی می‌بایست بیشینه آستانه پایداری را ارضا نمایند. برای این منظور می‌توان از کنترل‌کننده H_∞ استفاده کرد که با توجه به مقادیر بزرگ بیشینه آستانه پایداری، عملکرد حلقه بسته مناسب نخواهد بود. روش دیگری که در مراجع برای دستیابی به بیشینه آستانه پایداری ذکر شده است، کنترل‌کننده با ساختار آبخاری P-IMC و یا P-MPC است [۲۲]. در این ساختارها از دو حلقه پشت سر هم استفاده می‌شود که چون در حلقه ابتدایی از کنترل‌کننده متناسبی استفاده می‌شود می‌توان به مقادیر بیشینه آستانه پایداری رسید. به علاوه در حلقه دوم از کنترل‌کننده‌های پایداری ساز مانند IMC و یا MPC استفاده می‌شود تا پایداری بدست آمده از حلقه اول محفوظ بماند و در عین حال عملکرد حلقه بسته مطلوب گردد. در این پژوهش نیز از روش P-IMC برای طراحی کنترل‌کننده محلی بهره گرفته می‌شود.

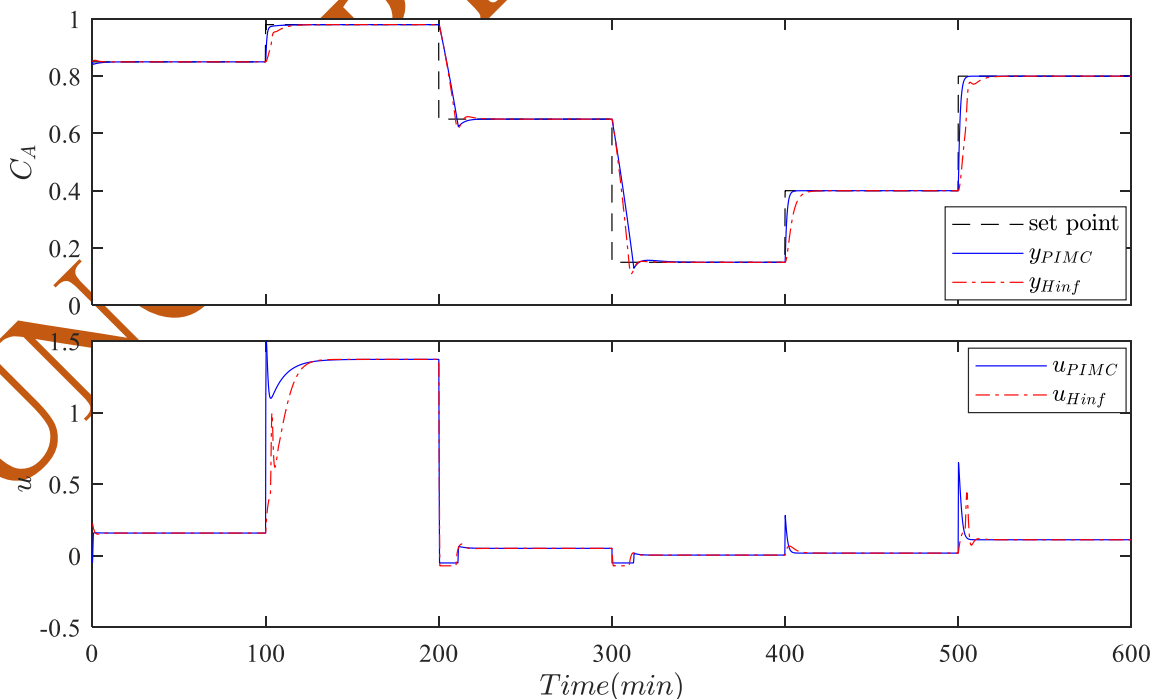
ابتدا کنترل‌کننده‌های محلی متناسبی برای تمامی ۲۶ مدل به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که آستانه پایداری حاصله

خطی ۱ تا ۲۶ را شامل می‌شود. مدل ۱۷ ام به عنوان مدل خطی نامی انتخاب شده که **خطی شده** سیستم CSTR به ازای $C_A = 0.85$ است. بیشینه آستانه پایداری سیستم P_{17} برابر با 0.94 است. همچنین آستانه پایداری سیستم P_{17} به ازای کنترل‌کننده تناسبی ($k_p = 0.35$) همان مقدار 0.94 حفظ شده است. جهت حفظ پایداری به دست آمده از مرحله اول و در عین حال کسب عملکرد مناسب حلقه بسته، کنترل‌کننده IMC طراحی شده است که در سطر پایانی جدول گزارش شده است.

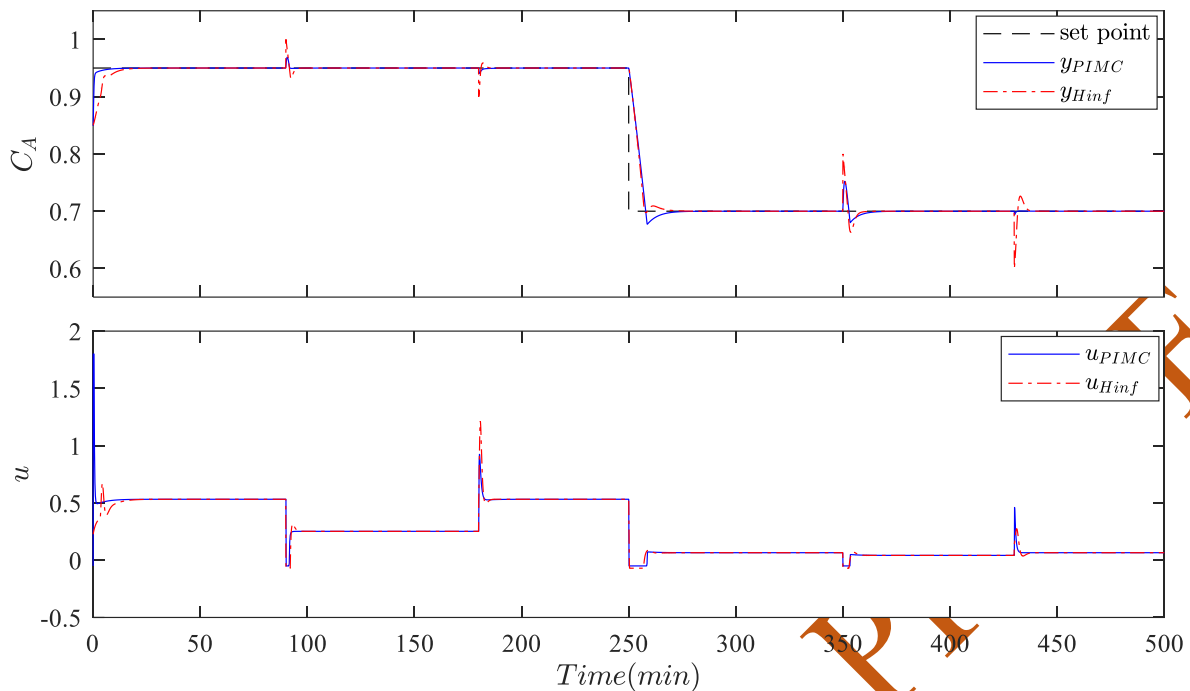
نتایج حاصل از شبیه‌سازی کنترل‌کننده طراحی شده برای ردیابی ورودی مرجع در شکل ۴ نشان داده شده است. همچنین برای مقایسه، کنترل‌کننده چندگانه طراحی شده در [۲۳] که از سه کنترل‌کننده محلی تشکیل می‌گردد نیز شبیه‌سازی شده است. در شکل‌های ۴ و ۵، زیرنویس PIMC و Hinf به ترتیب بیانگر عملکرد کنترل‌کننده‌های طراحی شده در این پژوهش و مرجع [۲۳] می‌باشند. با دقت در شکل ۴ مشاهده می‌شود که خروجی سیستم در هر دو روش ورودی مرجع را در تمامی ناحیه کاری با سرعت مناسب و بدون خطای حالت ماندگار دنبال می‌کند. در بازه زمانی ۴۰۰ تا ۶۰۰، سرعت پاسخ PIMC کمی بهتر از Hinf است. همچنین سیگنال کنترل در بازه قابل قبول خود می‌باشد. مقادیر انتگرال قدرمطلق خطا (IAE) برای دو روش به صورت $IAE_{PIMC} = 61.24$ و $IAE_{Hinf} =$

80.85 به دست می‌آید که موید عملکرد بهتر کنترل‌کننده طراحی شده در این مقاله است. بدین ترتیب با ارزیابی صورت گرفته در این پژوهش، رفتار سیستم اصلی به مدل خطی ۱۷ ام شباهت زیادی داشته و استفاده از تنها یک کنترل‌کننده برای کنترل سیستم اصلی در تمامی ناحیه کاری کفایت می‌کند **در حالی که** در مرجع [۲۳]، کنترل‌کننده نهایی از ترکیب سه کنترل‌کننده به دست آمده است. بدین ترتیب با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله می‌توان از افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی نیز در روش مدل‌های چندگانه خودداری نمود.

عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده در دفع اثر اغتشاش نیز در شکل ۵ نشان داده شده است. برای آزمایش اثر اغتشاش، در زمان $t = 90$ اغتشاش با دامنه 0.05 به خروجی اضافه شده و در زمان $t = 180$ خارج شده است. همچنین، اغتشاش دیگری با دامنه 0.1 نیز در زمان $t = 350$ به خروجی اضافه شده و در زمان $t = 430$ کم شده است. با دقت در شکل ۵ مشاهده می‌شود هر دو کنترل‌کننده PIMC و Hinf توانسته‌اند اغتشاشات اعمالی را با نوسانات کم و در زمان کوتاهی دفع نمایند اما با این حال عملکرد PIMC نسبتاً بهتر است. مقادیر انتگرال قدرمطلق خطا (IAE) برای دو روش به صورت $IAE_{PIMC} = 14.57$ و $IAE_{Hinf} = 19.68$ به دست می‌آید که نمایانگر برتری روش ارائه شده در این مقاله است.



شکل ۴- ردیابی ورودی مرجع برای سیستم غیرخطی CSTR.



شکل ۵- ردیابی ورودی مرجع برای سیستم غیرخطی CSTR در حضور اغتشاش.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله روشی برای تعیین شدت رفتار غیرخطی سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است. از ابزار $gap\ metric$ برای شبکه‌بندی فضای کاری و تشکیل بانک مدل‌های خطی استفاده شده است به گونه‌ای که فاصله میان هر دو مدل خطی متوالی کمتر از یک آستانه اولیه کوچک خواهد بود. از بیشینه آستانه پایداری (و یا آستانه پایداری) برای تشکیل ماتریس تفاضل استفاده شده است به طوری که سطور این ماتریس توانایی کنترل‌کننده‌های محلی متناظر در پایدارسازی دیگر مدل‌های خطی موجود در بانک مدل‌ها را نشان می‌دهند. سپس معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی NMI ارائه شده است که مقادیری بین 0 و 1 داشته و مقادیر نزدیک به 1 بیانگر رفتار غیرخطی ناچیز سیستم غیرخطی بوده و بالعکس. در این حالت، کنترل‌کننده مبتنی بر مدل چندگانه از تعداد کمی از کنترل‌کننده‌های محلی تشکیل شده و ساختار ساده‌تری خواهد داشت. برای حالتی که $NMI = 1$ است استفاده از یک کنترل‌کننده جهت پایدارسازی تمامی مدل‌های خطی کفایت می‌کند. یک سیستم غیرخطی CSTR مورد مطالعه

واقع شده و نشان داده شده است که برخلاف معیارهای سنجش معرفی شده در مراجع گذشته، NMI برابر 1 بوده و استفاده از یک کنترل‌کننده تنها برای آن، عملکرد بهتری نسبت به کنترل چندگانه مرکب از سه کنترل‌کننده محلی در ردیابی ورودی مرجع و دفع اثر اغتشاش دارد. بدین ترتیب، معیار سنجش شدت رفتار غیرخطی ارائه شده در این مقاله با در نظر گرفتن معیارهای فاصله و پایداری به صورت همزمان این امکان را فراهم می‌سازد که از افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی خودداری گردد و در نتیجه آن، کنترل‌کننده نهایی ساختار ساده‌تری خواهد داشت.

تمرکز بر سیستم‌های غیرخطی با NMI کوچک‌تر از 1 و نزدیک به 0 و رویارویی با چالش‌های انتخاب بهینه مدل‌های خطی نامی در این سیستم‌ها، مطالعه سیستم‌های غیرخطی دارای بیش از یک متغیر بهره‌بندی، و طراحی کنترل‌کننده چندگانه با ساختاری به جز R-IMC که در آن آستانه پایداری کاهش یافته و ساختار نهایی کنترل‌کننده پیچیده‌تر می‌شود؛ در کارهای آتی مورد توجه واقع خواهند شد.

- [۱] K. Elkhilil and A. Zribi, "Linear controller design approach for nonlinear systems by integrating gap metric and stability margin," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2023, pp. 1-12.
- [۲] J. Xavier, S. Patnaik and R.C. Panda, "Nonlinear Measure for Nonlinear Dynamic Processes Using Convergence Area: Typical Case Studies," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 16, no. 5, 2021.
- [۳] T. Schweickhardt and F. Allgöwer, "Linear control of nonlinear systems based on nonlinearity measures," *Journal of Process Control*, vol. 17, no. 3, 2007, pp. 273-284.
- [۴] M. Ahmadi and M. Haeri, "A new structured multimodel control of nonlinear systems by integrating stability margin and performance," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 139, no. 9, 2017.
- [۵] C. Desoer and Y.T. Wang, "Foundations of feedback theory for nonlinear dynamical systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 27, no. 2, 1980, pp. 104-123.
- [۶] S.A. Eker and M. Nikolaou, "Linear control of nonlinear systems: Interplay between nonlinearity and feedback," *AIChE Journal*, vol. 48, no. 9, 2002, pp. 1957-1980.
- [۷] M. Guay, R. Dier, J. Hahn and P. McLellan, "Effect of process nonlinearity on linear quadratic regulator performance," *Journal of Process Control*, vol. 15, no. 1, 2005, pp. 113-124.
- [۸] K.R. Harris, M.C. Colantonio and A. Palazoglu, "On the computation of a nonlinearity measure using functional expansions," *Chemical engineering science*, vol. 55, no. 13, 2000, pp. 2393-2400.
- [۹] A. Helbig, W. Marquardt and F. Allgöwer, "Nonlinearity measures: definition, computation and applications," *Journal of Process Control*, vol. 10, no. 2/3, 2000, pp. 113-123.
- [۱۰] A. Alaeddini, K.A. Morgansen and M. Mesbahi, "Augmented state feedback for improving observability of linear systems with nonlinear measurements," *Systems & Control Letters*, vol. 133, 2019.
- [۱۱] J. Du and Z. Tong, "An improved nonlinearity measure based on gap metric," in *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, China, 2014, pp. 1920-1923.
- [۱۲] M. Ahmadi and M. Haeri, "An integrated best-worst decomposition approach of nonlinear systems using gap metric and stability margin," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 235, no. 4, 2021, pp. 486-502.
- [۱۳] M. Ahmadi and M. Haeri, "A systematic decomposition approach of nonlinear systems by combining gap metric and stability margin," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 9, 2021, pp. 2006-2017.
- [۱۴] G.T. Tan, M. Huzmezan and K.E. Kwok, "Vinnicombe metric as a closed-loop nonlinearity measure," in *2003 European Control Conference (ECC)*, Cambridge, 2003, pp. 751-756.
- [۱۵] W. Tan, H.J. Marquez, T. Chen and J. Liu, "Analysis and control of a nonlinear boiler-turbine unit," *Journal of Process Control*, vol. 15, no. 8, 2005, pp. 883-891.
- [۱۶] J. Du and T.A. Johansen, "Control-relevant nonlinearity measure and integrated multi-model control," *Journal of Process Control*, vol. 57, 2017, pp. 127-139.
- [۱۷] مهدی احمدی، "طراحی کنترل کننده چندگانه برای سیستم‌های غیرخطی با استفاده از یک روند بهبود یافته انتخاب مدل‌های محلی نامی،" *نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، دوره ۵۲، شماره ۲، مرداد ۱۴۰۱، صفحه ۲۵۱-۲۵۶.
- [۱۸] A. El-Sakkary, "The gap metric: Robustness of stabilization of feedback systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, no. 3, 1985, pp. 240-247.
- [۱۹] K. Zhou and J.C. Doyle, "Essentials of Robust Control", Prentice Hall, 1998.
- [۲۰] J. Du, C. Song, Y. Yao and P. Li, "Multilinear model decomposition of MIMO nonlinear systems and its implication for multilinear model-based control," *Journal of Process Control*, vol. 23, no. 3, 2013, pp. 271-281.
- [۲۱] J. Du, C. Song and P. Li, "A gap metric based nonlinearity measure for chemical processes," in *American Control Conference*, 2009, pp. 4440-4445, 2009.
- [۲۲] M. Ahmadi, P. Rikhtehgar and M. Haeri, "A multi-model control of nonlinear systems: A cascade decoupled design procedure based on stability and performance," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 42, no. 7, 2020, pp. 1271-1280.

- [۲۳] W. Tan, H.J. Marquez, T. Chen and J. Liu, "Multimodel analysis and controller design for nonlinear processes," *Computers & chemical engineering*, vol. 28, no. 12, 2004, pp. 2667-2675.

UNCORRECTED PROOF

An Applicable Control-Relevant Method for Nonlinearity Assessment using Gap Metric

Mahdi Ahmadi¹

1. Department of Electrical Engineering, Esfarayen University of Technology, North-Khorasan, Iran.

*Corresponding Author: Mahdi Ahmadi

ARTICLE INFO

Keywords:

Nonlinear System,
Nonlinearity Assessment,
Controller,
Gap Metric,
Maximum Stability Margin.

ABSTRACT

In this paper, an applicable control-relevant nonlinearity assessment method is proposed for nonlinear dynamic systems. In this method, nonlinear system is decomposed to a bank of linear systems using gap metric, a smart tool for measuring the distance between two linear systems. Then, the ability of each local linear models are investigated to stabilize all linear models. A criterion is proposed to measure the nonlinearity of nonlinear system based on gap metric and maximum stability margin values which bounded between 0 and 1. Unlike most of the current nonlinearity measurement, the proposed method could be used for both integrating and unstable nonlinear systems. Besides, the presented method supplies to distinguish that a single linear controller is adequate to control the nonlinear system or it is necessary to employ the multi-model based controllers design methods. Therefore, the redundancy problem could be avoided by employing the proposed method. A nonlinear Continuous Stirred Reactor Tank (CSTR) process is studied and results confirm the capability of presented nonlinearity assessment method.
