



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

Enhancing Efficiency of Newton-Raphson Method with Chaotic Mappings for Nonlinear Equation Solving

Javad Alikhani Koupaei ^{a,*}, Mohammad Javad Ebadi ^b

^a Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran

^b Department of Mathematics, Chabahar Maritime University, Chabahar, Iran

PAPER INFO

Paper history:

Received: 2023-12-09

Revised: 2024-08-06

Accepted: 2024-08-26

Keywords:

Newton-Raphson algorithm;
Nonlinear equation Solving methods;
Chaotic maps;
Random sequences.

ABSTRACT

One of the most powerful methods for solving nonlinear equations is the Newton-Raphson algorithm. Although this algorithm is highly efficient, it faces two challenges: sensitivity to the starting point and the possibility of getting stuck in a loop for the solution sequence. In this paper, by adding a small disruptive term to the Newton recursive relation, we practically generate a chaotic pseudo-random sequence, thus addressing these two challenges. The effectiveness of the proposed version has been numerically demonstrated on several nonlinear equations. The results show that the improved version is not sensitive to the initial conditions and escapes from the loop due to the generation of a random sequence, while maintaining an acceptable execution time due to the use of a deterministic system in generating the random sequence.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2024.32533.2574>

© 2025 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding Author,

E-mail address : J.Alikhani48@pnu.ac.ir

How to cite this article:

Alikhani Koupaei, J. and Ebadi, M. J. (2025). Enhancing Efficiency of Newton-Raphson Method with Chaotic Mappings for Nonlinear Equation Solving. Journal of Modeling in Engineering, 23(80), 59-73. doi: 10.22075/jme.2024.32533.2574

افزایش کارایی روش نیوتن-رافسون در حل معادلات غیر خطی با استفاده از نگاشت‌های آشوبی

جواد علیخانی کوپائی^{۱*}، محمدجواد عبادی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۱۸	یکی از روش‌های قدرتمند برای حل معادلات غیرخطی، الگوریتم نیوتن-رافسون است. این الگوریتم به دلیل کارایی بالای خود معروف است، اما دو چالش اساسی دارد: حساسیت به نقطه شروع و احتمال دور زدن در حلقه برای دنباله جواب. در این تحقیق، با افزودن یک جمله آشوبی به رابطه بازگشتی نیوتن، یک دنباله شبه تصادفی آشوبی تولید می‌شود که این اقدام باعث برطرف شدن این دو چالش می‌شود. عملکرد نسخه بهبود یافته این الگوریتم به طور عددی بر روی چندین معادله غیرخطی ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهند که نسخه بهبود یافته حساس به نقطه شروع نیست و به علت استفاده از دنباله‌ی تصادفی از دنباله‌ی تکرار فرار می‌کند. همچنین، با استفاده از یک سیستم قطعی در تولید دنباله‌ی تصادفی، زمان اجرای الگوریتم بهبود یافته قابل قبول است.
بازنگری مقاله: ۱۴۰۳/۰۵/۱۶	
پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۰۵	
واژگان کلیدی: الگوریتم نیوتن-رافسون، روش‌های حل معادلات غیرخطی، نگاشت‌های آشوبی، دنباله تصادفی.	

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2024.32533.2574>

© 2025 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

۱- مقدمه

عنوان مثال، منوج کومار و همکاران در سال ۲۰۱۳ الگوریتم‌های تکراری نوع نیوتن با مرتبه همگرایی نهم و هفتم را برای حل معادلات غیرخطی معرفی کردند [۱]. همچنین، چانگبوم چآن یک نسخه بهبود یافته از روش نیوتن با استفاده از روش تجزیه آدومین ارائه داد [۲]. در جدول ۱، برخی از تحقیقات اخیر که به بهبود الگوریتم نیوتن انجام شده است، خلاصه شده است. بدون شک، روش نیوتن در بدست آوردن ریشه‌های ساده معادلات غیرخطی $f(x) = 0$ با محدودیت‌هایی همراه است. یکی از ویژگی‌های اصلی این روش، خاصیت همگرایی موضعی آن است. این به این معناست که توابع $f'(x)$ و $f''(x)$ باید موجود و کراندار باشند، و همچنین حدس اولیه یا نقطه شروع به ریشه واقعی معادله باید به اندازه کافی

یکی از قدیمی‌ترین و اساسی‌ترین مسائل در ریاضیات، حل معادلات غیرخطی به صورت $f(x) = 0$ است. در حال حاضر، روش‌های تکراری و متنوع بسیاری برای حل این نوع مسائل ارائه شده است. الگوریتم نیوتن-رافسون به عنوان یکی از قدرتمندترین روش‌ها برای حل معادلات غیرخطی و بهینه‌سازی توابع شناخته شده است. بدون شک، پیاده‌سازی ساده و نرخ همگرایی بالای روش نیوتن از مزایای این روش است، اما در عمل همگرایی آن معمولاً محلی است و ممکن است نیازمند حدس اولیه مناسبی از جواب باشد. بنابراین، به منظور بهبود کارایی و جنبه‌های محاسباتی روش نیوتن، اصلاحاتی لازم است. در سال‌های اخیر، تعداد زیادی از محققان، تحقیقاتی در این زمینه انجام داده‌اند. به

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: J.Alikhani48@pnu.ac.ir

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۲. گروه ریاضی، دانشگاه دریاوردی و علوم دریایی چابهار، چابهار، ایران

استناد به این مقاله:

جدول ۱- برخی از پژوهش‌ها به منظور بهبود روش نیوتن

شرح مختصر روش	سال	نویسندگان
بهبود روش نیوتن-رافسون برای حل معادلات غیرخطی با استفاده از روش تجزیه آدومین اصلاح شده	۲۰۰۳	عباس‌بندی [۳]
در این مقاله ۲ روش بهبود یافته نیوتن از طریق تقریب مشتق اول توابع غیرخطی پیشنهاد شده است	۲۰۲۱	اسی‌دو و همکاران [۴]
یک نسخه از روش نیوتن با همگرایی مرتبه سوم بهبود یافته	۲۰۰۰	ویراکون و همکاران [۵]
برخی اصلاحات در روش نیوتن با همگرایی مرتبه پنجم	۲۰۰۷	کویو و همکاران [۶]
بهبودیافته ساده از روش نیوتن به منظور رسیدن به همگرایی مرتبه $1 + \sqrt{2}$	۲۰۱۴	مک دوگال و همکاران [۷]
یک الگوریتم کارآمد از نوع نیوتن با فرایند جستجوی سراسری بر روی منی‌فولدهای ریمانی	۲۰۲۲	برتولوتی و همکاران [۸]

نزدیک باشد [۹].

سه چالش واقعی که عموماً در بکارگیری روش نیوتن با آن مواجه هستیم عبارتند از:

- مشکل همگرایی الگوریتم به ریشه نامطلوب.
- احتمال گیر کردن روند تولید دنباله جواب در حلقه تکرار در نقاط دورتر از ریشه.
- دور شدن دنباله نقاط تولید شده از ریشه واقعی.

از سه چالش فوق، مشکل دو مورد اول و سوم با انتخاب مقدار اولیه مناسب و نزدیک به ریشه واقعی قابل حلند. اما برای مشکل دوم، نیاز به راهکار دیگری است. در این مقاله، ما سعی می‌کنیم با استفاده از ویژگی‌های نقاط آشوبی این مشکل را حل کنیم. یک متغیر آشوبی دارای سه ویژگی اساسی است: شبه تصادفی، بی‌نظمی و ارگودیک بودن [۱۰]. منظور از ارگودیک بودن یک فرایند یعنی بتوان ویژگی‌های آماری آن فرایند را براساس یک نمونه تصادفی در یک بازه به اندازه کافی طولانی از آن فرایند، مشخص کرد. ما با اضافه کردن یک جمله آشوبی به رابطه بازگشتی نیوتن، به جای تولید دنباله نقاط قطعی، از دنباله نقاط آشوبی برای جستجوی جواب واقعی مساله استفاده می‌کنیم. سپس، با استفاده از این روش پیشنهادی بر روی چند مساله نمونه و مقایسه آن با الگوریتم نیوتن کلاسیک، توانایی و کارایی این روش پیشنهادی بررسی می‌شود. نتایج عددی و تجربی نشان می‌دهد که این روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم نیوتن کلاسیک بهبود چشمگیری دارد. در ادامه، بخش‌های این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، مفهوم آشوب و نکات‌های آشوبی توضیح داده شده و تفاوت آن‌ها با اعداد تصادفی بررسی می‌شود. روش پیشنهادی بر مبنای نقاط آشوبی در بخش ۳ برای حل معادلات غیرخطی توضیح داده می‌شود. در بخش ۴، تعدادی مسائل غیرخطی به عنوان نمونه مورد بررسی قرار

می‌گیرند و با استفاده از نتایج عددی، برتری روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم نیوتن کلاسیک مورد بحث قرار می‌گیرد و نهایتاً در بخش پایانی، نتیجه‌گیری و اهمیت این مطالعه بیان می‌شود.

۲- پیش‌زمینه نظری

در این بخش ابتدا به تعریف آشوب و نکات‌های آشوبی می‌پردازیم، سپس در بخش بعدی، با عنوان "مبانی دنباله‌های آشوبی"، سعی در شرح مفاهیم پایه‌ای و اساسی درباره دنباله‌های آشوبی و تفاوت آن‌ها با اعداد تصادفی خواهیم داشت.

۲-۱- آشوب و نکات‌های آشوبی

در لغت، آشوب به معنای هرج و مرج و بی‌نظمی است. اما از نظر مفاهیم ریاضی، آشوب به داده‌های تصادفی اشاره دارد که توسط سیستم‌های دینامیکی ساده تولید می‌شوند. باید توجه داشت که اگرچه آشوب و تصادف به ظاهر مشابه هستند، اما کیفیت آن‌ها متفاوت است. آشوب به رفتار ناپایدار، پیچیده و محدود اشاره دارد که توسط برخی از سیستم‌های غیرخطی یا نکات‌های آشوبی ایجاد می‌شود. در حال حاضر، گروهی از محققین از ناپایداری محاسباتی موجود در نقاط آشوبی برای حل معادلات غیرخطی و بهینه‌سازی سراسری استفاده می‌کنند [۱۱، ۱۲]. یک نکات آشوبی یک بعدی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$x(n+1) = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, x(n)),$$

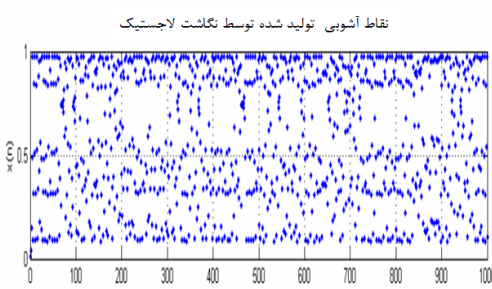
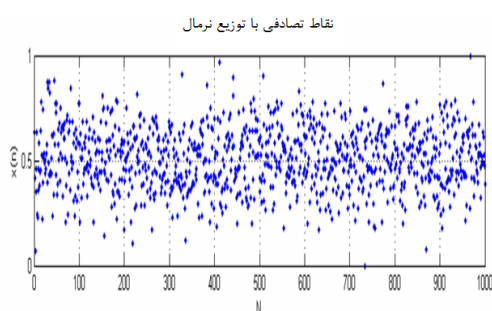
$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

که در آن $\mu_i, i = 1, 2, \dots, m$ پارامترهای کنترل و x متغیر می‌باشد. رفتار نکات (۱) به مقادیر پارامترهای کنترلی $\mu_i, i = 1, 2, \dots, m$ وابسته می‌باشد. باید توجه داشت که معادله (۱) برای برخی مقادیر پارامترهای کنترلی یک نکات آشوبی می‌گردد. در نکات‌های آشوبی

بلکه رفتاری قطعی است. در حقیقت، آشوب یک دینامیک پیچیده و نامنظم است که با یک معادله قطعی توصیف می‌شود. به منظور درک تفاوت بین نقاط تصادفی تولید شده از یک ساختار آشوبی و یک ساختار مبتنی بر احتمال، فرض کنید ۱۰۰۰ نقطه را در بازه $[0, 1]$ به دو روش زیر تولید کنیم:

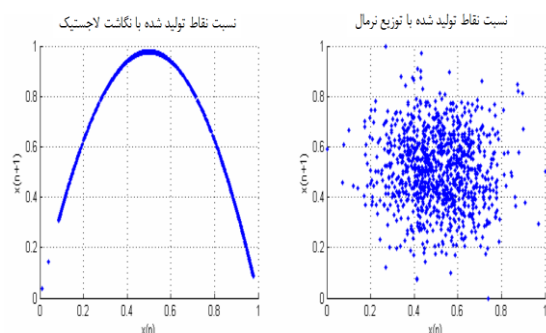
(الف) یکی از آن‌ها به صورت تصادفی با توزیع نرمال (میانگین صفر و واریانس یک).

(ب) دیگری با استفاده از نگاشت لاجستیک با مقدار پارامتر $\lambda = 3,91$ و نقطه شروع $x_0 = 0,01$ آنگاه نمایش این ۱۰۰۰ نقطه به شکل زیر خواهد بود:



شکل ۱- مقایسه نقاط تصادفی تولید شده توسط توزیع نرمال و نگاشت لاجستیک

با توجه به شکل (۱) تفاوت خاصی بین نقاط تولید شده در دو روش مشاهده نمی‌گردد. درحالی‌که اگر برای هر دسته از نقاط نسبت $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ را رسم کنیم، اشکال زیر قابل مشاهده است.



یک تغییر خیلی جزئی در مقدار اولیه متغیر x باعث ایجاد تفاوت قابل توجه در مقادیر بعدی از متغیر x خواهد شد. نگاشت لاجستیک با معادله (۲) و نگاشت چبی شف با معادله (۳) دو نمونه از نگاشت‌های آشوبی هستند.

$$x(n+1) = \lambda x(n)(1-x(n)), \quad x(0) \in (0,1), \quad (2)$$

$$x(n+1) = \cos(k \cos^{-1}(x(n))), \quad k \in (-1,1) \quad (3)$$

اگر $\lambda = 4$ باشد یک دنباله آشوبی از اعداد توسط نگاشت لاجستیک تولید می‌شود. با استفاده از نگاشت لاجستیک و $\lambda \in [0, 4]$ می‌توان دینامیک‌های متفاوت و پر معنایی ارائه کرد، به عنوان مثال با این نگاشت می‌توان دنباله‌های متناوب از اعداد به‌ازای $\lambda \in [0, 3.71]$ و دنباله آشوبی از اعداد توسط $\lambda \in [3.71, 4]$ تولید نمود. اگر در نگاشت چبی شف $k = 2$ در نظر گرفته شود، این نگاشت در حالت آشوبی قرار خواهد گرفت و می‌توان توسط آن دنباله آشوبی از اعداد تولید نمود [۱۳]. نتایج نشان می‌دهند که نگاشت چبی شف برای $k \geq 2$ از خود خاصیت ارگودیک و رفتار بسیار ناهمگون نشان خواهد داد [۱۴]. ویژگی‌های آماری و سرعت جستجوی دنباله‌های آشوبی توسط دو معیار اصلی تابع چگالی احتمال و ضریب لیاپانوف مشخص می‌شوند. همواره ویژگی توزیع احتمال هر نگاشت آشوبی توسط تابع چگالی احتمال آن نگاشت اندازه‌گیری می‌شود. ضریب لیاپانوف معمولاً برای اندازه‌گیری وابستگی حساس به شرایط اولیه و سطح آشوب سیستم‌های پویای آشوبی مورد استفاده قرار می‌گیرد و همچنین از ضریب لیاپانوف می‌توان به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری سرعت جستجوی دنباله‌های آشوبی در فضای جستجوی استفاده نمود [۱۵]. ضریب لیاپانوف برای یک نگاشت آشوبی یک بعدی با استفاده از معادله (۱) به شکل زیر محاسبه می‌شود [۱۶-۱۸].

$$LE = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sum_{n=1}^i f'(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, x(n)) \quad (4)$$

۲-۲- مبانی دنباله‌های آشوبی

در این مقاله، ماسعی داریم با استفاده از نگاشت‌های آشوبی، دنباله‌ای تصادفی از جواب‌های تقریبی را برای رسیدن به جواب واقعی معادلات غیرخطی ایجاد کنیم. لازم است، تاکید کنیم که رفتار آشوب‌گونه، رفتاری تصادفی نیست

کنید برای بدست آوردن α از روش نیوتن با نقطه شروع $x_0 \in [a, b]$ استفاده کرده‌ایم و به دنباله جواب‌های تقریبی با شرایط زیر دست یافته‌ایم.

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, \dots \quad (5)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (6)$$

$$x_{i+k} = x_{i+k-1} - \frac{f(x_{i+k-1})}{f'(x_{i+k-1})} \quad (7)$$

که در آن $x_{i+1} = x_{i+k} = \beta$ یعنی دنباله جواب‌های تقریبی در تکرار β به مقدار رسیده است و پس از k مرتبه تکرار روش نیوتن در تکرار $(i+k)$ ام دوباره به مقدار β دست یافته و عملاً مسیر تکاملی دنباله جواب در یک حلقه قرار گرفته و هیچگاه به جواب معادله نخواهد رسید. حال اگر از نظریه آشوب و ویژگی‌های دنباله نقاط آشوبی جهت بهبود و تولید دنباله جواب‌های تقریبی بهره بگیریم، می‌توانیم دنباله جواب‌هایی به فرم زیر پیشنهاد دهیم.

$$x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+k}, \hat{x}_{i+k+1}, \hat{x}_{i+k+2}, \dots \quad (8)$$

بطوریکه

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i - \left(\frac{i}{i+N} \right) \left(\frac{f(\hat{x}_i)}{f'(\hat{x}_i)} \right) + (\gamma \lambda_i)^{(i+1)},$$

$$\lambda_{i+1} = 4\lambda_i(1 - \lambda_i),$$

$$\lambda_0 = \text{rand}(0,1), \quad i = 0,1,2, \dots$$

که N بیان کننده حداکثر تعداد تکرار روش پیشنهادی و $0 < \gamma \leq 1$ یک پارامتر کنترلی به منظور جلوگیری از واگرایی دنباله (۸) که بر اساس رفتار تابع $f(x)$ در همسایگی ریشه α و بصورت تجربی، معین می‌گردد. لازم است در اینجا تاکید کنیم که دنباله جواب تولید شده (۵) که با استفاده از روش نیوتن کلاسیک تولید شده یک دنباله قطعی از اعداد است، در حالیکه دنباله جواب تولید شده (۸) در روش پیشنهادی یک دنباله از نقاط آشوبی با تمام ویژگی‌های مربوطه، از جمله غیرتکراری بودن و شبه تصادفی بودن مولفه‌ها، خواهد بود که در بخش ۴ این مطالب به صورت عددی مورد بررسی قرار خواهند گرفت. خصوصیت آماری و سرعت جستجوی دنباله‌های آشوبی به ترتیب توسط تابع چگالی احتمال و نمای لیاپانوف مشخص می‌شوند. اهمیت ارگودیسیتیه آشوبی به این معناست که دنباله‌های آشوبی می‌توانند تمام وضعیت‌های جذاب پیچیده از فضای جواب معادله را مورد بررسی قرار دهند و

شکل ۲- نمودار نسبت نقاط تولید شده توسط توزیع نرمال و

نگاشت لاجستیک

از شکل (۲) می‌توان مشاهده کرد که نقاط آشوبی تولید شده توسط نگاشت لاجستیک در حالی که به نظر تصادفی هستند، الگوی خاصی را دنبال می‌کنند که نشان از وجود نظمی پنهان در میان نامنظمی ظاهری این دسته از نقاط دارد. یکی از تفاوت‌های مهم بین دنباله اعداد آشوبی و اعداد تصادفی، عدم تکراری بودن نقاط در دنباله آشوبی است. زیرا دنباله آشوبی توسط یک دینامیک قطعی تولید می‌شود، در حالی که دنباله اعداد تصادفی به صورت تصادفی در فضای جستجو انتخاب می‌شوند و از این رو ممکن است نقاط تصادفی در آن تکراری باشند. بطور خلاصه، الگوریتم‌های مبتنی بر آشوب علاوه بر داشتن مزایای روش‌های مبتنی بر تصادف، مشخصه‌های زیر را نیز دارا می‌باشند:

- به دلیل وجود قطعیت در تولید نقاط آشوبی، عموماً سرعت همگرایی این روش‌ها مناسب است.
- در این الگوریتم‌ها به دلیل ذات آشوبی نقاط تصادفی تولید شده، حتی اگر نقطه جاری در یک همسایگی جواب دقیق قرار داشته باشد، ممکن است برای رسیدن به جواب دقیق نیاز به محاسبه بیشتری باشد. زیرا که در هر دو تکرار متوالی از این روش‌ها بر اساس طبیعت آشوبی نقاط، ممکن است پرش‌های بزرگی بین دو نقطه متوالی رخ دهد. به بیان دیگر الگوریتم‌های مبتنی بر آشوب عموماً روی مسائلی با فضای جستجوی کوچک بهتر عمل می‌کنند [۹].

۳- الگوریتم نیوتن بهبود یافته پیشنهادی

اگرچه روش نیوتن به عنوان یک روش قوی با همگرایی بالا برای حل معادلات غیرخطی شناخته شده است، اما هنوز با چالش‌هایی در بدست آوردن ریشه‌های این معادلات روبروست. همانطور که در بخش مقدمه ذکر شد، یکی از این چالش‌ها قرار گرفتن دنباله تقریبی در حلقه تکرار است. در این بخش، با انجام اصلاحاتی در الگوریتم نیوتن، به دنبال حل این مشکل هستیم. در واقع، می‌خواهیم با استفاده از نگاشت‌های آشوبی و تولید دنباله جواب‌های آشوبی، بر مشکل چالش دوم که در بخش مقدمه بیان شده است، غلبه کنیم. معادله غیرخطی $f(x) = 0$ که در بازه $[a, b]$ دارای تنها ریشه ساده α می‌باشد را در نظر بگیرد. فرض

شکل ۳- توزیع چبیشف (با تابع چگالی احتمال) مربوط به دنباله آشوبی تولید شده از نگاشت لاجستیک

۴- مقایسات و تجربیات عددی

به منظور بررسی موثر بودن روش پیشنهادی، ابتدا موضوع را به صورت عددی تجزیه و تحلیل می‌کنیم و سپس با ارائه بخشی از مثال‌های عددی، بر کارآمد بودن روش پیشنهادی تأکید خواهیم کرد. در طول این مسیر، $\gamma = 0,1$ و معیار توقف با رسیدن به دقت $1/0.0001$ و یا با رسیدن به حداکثر ۲۰۰۰ تکرار در نظر گرفته شده است.

۴-۱- تحلیل عددی

هدف این بخش، بررسی کارایی روش پیشنهادی و تحلیل عددی آن است. برای این منظور، ابتدا با ساخت یک معادله غیرخطی که با بکارگیری روش نیوتن کلاسیک، یک دنباله جواب تقریبی تولید می‌شود و در حلقه قرار می‌گیرد، عملکرد روش پیشنهادی را به صورت عملی نشان خواهیم داد. سپس با ارائه یک مثال، وجود تفاوت ذاتی در دنباله جواب‌های تقریبی میان روش نیوتن و روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم.

مطالعه اول: روش بهبود یافته پیشنهادی در حلقه قرار

نمی‌گیرد

به منظور بررسی این موضوع، ابتدا یک معادله غیرخطی طراحی می‌کنیم که با استفاده از روش نیوتن و با هر نقطه شروع در حلقه تکرار قرار بگیرد. معادله غیرخطی $f(x) = 0$ که تنها ریشه ساده آن در بازه $[a, b]$ باشد را در نظر بگیرید. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله تولید شده توسط روش نیوتن کلاسیک باشد، بطوریکه در حلقه تکرار قرار گرفته و در شرایط زیر صدق کند.

$$x_{n+1} - \alpha = \alpha - x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

هدف یافتن تابع مجهول $f(x)$ است.

با توجه به اینکه دنباله $\{x_n\}$ توسط روش نیوتن ساخته شده است، داریم که:

$$\begin{cases} x_{n+1} - \alpha = \alpha - x_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

و بنابراین رابطه زیر برقرار خواهد شد.

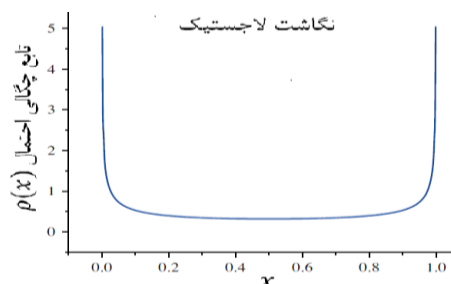
$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha = \alpha - x_n \quad (9) \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

یک دامنه کامل از فضای جواب را جستجو کنند و لذا این خصوصیت مبنای روند یافتن ریشه معادله غیرخطی در روش پیشنهادی است. بایستی توجه شود که اگر ضریب لیاپانوف دنباله‌های آشوبی بزرگتر باشد، آنگاه آشوبیت آن بیشتر است و به همین دلیل سرعت جستجوی کل فضای جواب معادله نیز بیشتر خواهد بود و خصوصیت ارگودیکی دنباله‌های آشوبی بهتر خواهد شد.

در روش پیشنهادی به این دلیل از نگاشت لاجستیک استفاده شده است که اولاً نگاشت لاجستیک بسیار ساده است و از طرفی می‌تواند منجر به پدیده‌های پیچیده‌ای از دینامیک‌های آشوبی شود [۲۱، ۲۰، ۱۹، ۱۸-۱۶، ۱۵]. همچنین نمای لیاپانوف آن با استفاده از معادله (۴) و به ازای پارامتر $\mu = 4$ برابر $LE = 0,6931$ است که همراه با نگاشت چبیشف (و پارامتر $\mu = 2$) با ضریب لیاپانوف $LE = 0,6932$ در مقایسه با دیگر نگاشت‌های آشوبی یک بعدی دارای بالاترین نمای لیاپانوف می‌باشند و این به آن معناست که با بکارگیری نگاشت لاجستیک بهترین سرعت جستجو در فضای جواب حاصل خواهد شد و همچنین داشتن تابع چگالی احتمال دنباله‌های آشوبی حاصل از نگاشت لاجستیک با معادله زیر (که به عنوان توزیع چبیشف شناخته می‌شود) از جمله دلایل مهم برای انتخاب نگاشت لاجستیک به عنوان بهترین گزینه برای تولید دنباله‌های آشوبی در الگوریتم پیشنهادی است.

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi x \sqrt{1-x}}$$

نمودار تابع چگالی احتمال از نگاشت لاجستیک در شکل (۳) آورده شده است. همچنین باید اشاره کرد که با توجه به تفاوت‌های موجود بین دنباله‌های آشوبی و اعداد تصادفی که در بخش ۲-۲ به آن تأکید شده است، نمی‌توان از اعداد تصادفی به منظور غلبه بر چالش موجود استفاده کرد؛ زیرا تضمینی برای اینکه نقاط در فضای جستجو غیرتکراری باشند، وجود ندارد.



اگر هر دو روش نیوتن کلاسیک و روش پیشنهادی را با نقاط شروع یکسان $x_0 = -5$, $x_0 = -0.7$, $x_0 = 0.5$ و معیار توقف $|x_n - 3| < 10^{-5}$ و یا حداکثر تعداد تکرار $n = 2000$ مورد ارزیابی قرار دهیم آنگاه در شکل ۵-A مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی به ازای هر سه نقطه شروع دلخواه انتخابی به ریشه معادله نزدیک شده است. در حالیکه طبق آنچه در بحث بالا انتظار داشته‌ایم روش نیوتن کلاسیک در هر سه مورد در حلقه قرار گرفته و این موضوع در شکل ۵-B نشان داده شده است. در حقیقت اگرچه در روند پیشنهادی محاسبات و زمان اجرای الگوریتم بیشتر می‌گردد، ولیکن اصلاحیه انجام شده باعث می‌شود با تولید نقاط آشوبی دنباله جواب تولید شده در حلقه قرار نگیرد. در جدول ۲ به عنوان یک نمونه، دنباله جواب‌های تولید شده توسط روش نیوتن و نسخه بهبود یافته به ازای نقطه شروع دلخواه $x_0 = 0.5$ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود روش پیشنهادی در تکرار ۱۷۴۸ام به جواب تقریبی با دقت 0.00001 دست پیدا کرده است. در این مثال جستجوی سریع و خصوصیت ارگودیکی دنباله آشوبی که توسط روش پیشنهادی و بواسطه نمای لیاپانوف مناسب نگاشت لاجستیک ایجاد شده باعث گردیده که زمان رسیدن به جواب $28/7199$ ثانیه شود که مناسب و قابل قبول است.

با توجه به پیکربندی پیوسته رابطه (۹)، معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت که با حل آن تابع مجهول f بدست می‌آید.

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{2(x-\alpha)} \Rightarrow f(x) = \pm c\sqrt{|x-\alpha|}$$

که در آن c مقداری ثابت است و می‌توان

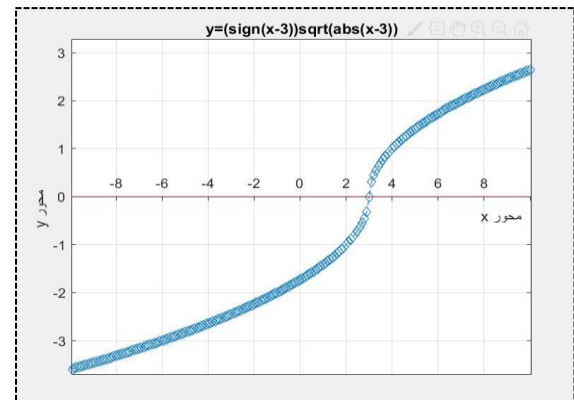
$$\text{sign}(x-\alpha) = \pm c$$

$$f(x) = \text{sign}(x-\alpha) (\sqrt{|x-\alpha|})$$

حال به ازای $\alpha = 3$ و با استفاده از معادله زیر کارایی روش پیشنهادی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

$$f(x) = \text{sign}(x-\alpha) (\sqrt{|x-\alpha|}) = 0 \quad (10)$$

نمودار تابع f در شکل (۴) نشان می‌دهد که معادله غیرخطی متناظر با آن تنها دارای یک ریشه $x = 3$ است.

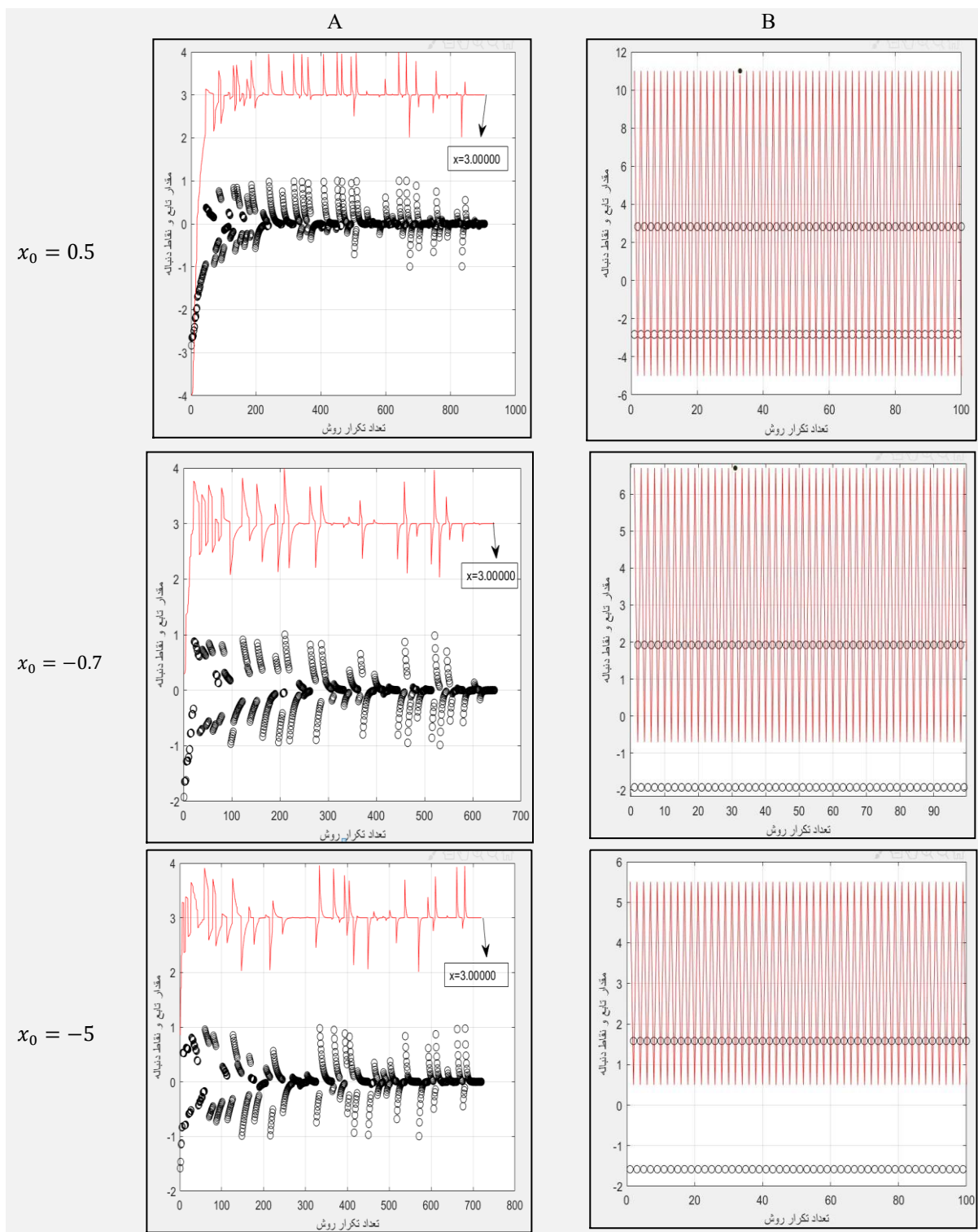


شکل ۴- نمودار تابع $f(x) = \text{sign}(x-3) (\sqrt{|x-3|})$

جدول ۲- مقایسه روش بهبود یافته با روش نیوتن به ازای نقطه شروع $x_0 = 0.5$

n	روش نیوتن-رافسون		روش نیوتن بهبود یافته (پیشنهادی)	
	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
۱	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹
۲	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۰/۶۶۶۴۹۲	-۱/۵۲۷۵۸۲
۳	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	۰/۹۷۱۸۹۶	-۱/۴۲۴۱۱۵
۴	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۱/۹۵۰۱۲۴	-۱۰۰۲۴۶۳۴
۵	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	۱/۹۵۴۳۱۷	-۱۰۰۲۲۵۸۶
۶	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۱/۹۵۹۵۹۲	-۱۰۰۲۰۰۰۴
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۷۴۲	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۱۲۹
۷۴۳	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۸۷
۷۴۴	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۵۹
۷۴۵	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۴۰
۷۴۶	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۲۷
۷۴۷	۰/۵۰۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۱۸
۷۴۸	۵/۵۰۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	۳/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۱۲
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

۱۹۹۷	۰/۵۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	
۱۹۹۸	۵/۵۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	
۱۹۹۹	۰/۵۰۰۰۰	-۱/۵۸۱۱۳۹	
۲۰۰۰	۵/۵۰۰۰۰	۱/۵۸۱۱۳۹	



$x_0 = 0.5$

$x_0 = -0.7$

$x_0 = -5$

شکل ۵- مقایسه روش اصلاح شده با الگوریتم نیوتن با نقاط شروع مختلف. (منحنی‌ها به رنگ قرمز دنباله جواب و منحنی‌ها به رنگ مشکی دنباله مقادیر تابع متناظر دنباله جواب آن هستند.)

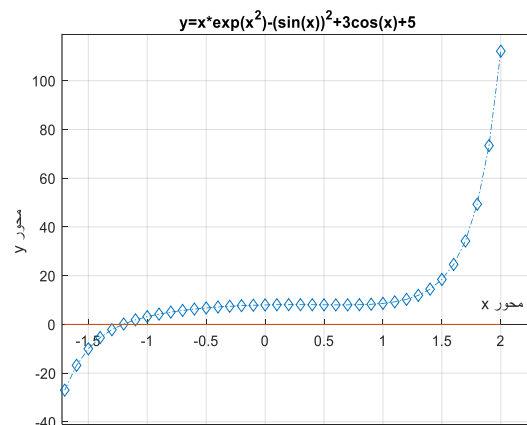
همانطور که از نمودارها $\gamma-A$ ، $\gamma-B$ و $\gamma-C$ مشاهده می‌شود، در حالیکه هر ۳ اجرا به جواب معادله $1/20764 -$ همگرا هستند اما دنباله جواب‌ها و متناظر آن دنباله مقادیر تابع در هر اجرا متفاوت از دیگری می‌باشد و این به علت تصادفی بودن جواب‌ها و خاصیت ارگودیستی و تابع چگالی احتمال مربوط به نگاشت لاجستیک است. در این مثال دنباله‌های آشوبی در اجرهای مختلف با هم متفاوت هستند بنابراین اگر بخواهیم مرتبه همگرایی روش پیشنهادی را بصورت عددی بررسی کنیم برای هر اجرا به نتایج متمایز و نادقیق از دیگری خواهیم رسید و در کل بررسی مرتبه همگرایی روش پیشنهادی و تحلیل دقیق آن بصورت عددی با پیچیدگی محاسباتی خاص خود که از آن جمله می‌توان وابستگی آن به معادله غیرخطی و مشتق آن و شبه تصادفی بودن دنباله‌های آشوبی تولید شده اشاره کرد که این مطلب خود بحث مفصلی را می‌طلبد و لذا در اینجا از آن صرف نظر کرده و به عنوان کارهای آینده در نظر می‌گیریم، و فقط به این نکته بسنده می‌کنیم که تنها تفاوت در نسخه پیشنهادی با روش نیوتن کلاسیک اضافه شدن یک جمله برحسب نگاشت لاجستیک است که این نگاشت دارای نمای لیاپانوف بالایی است لذا سرعت جستجو در فضای جواب سریع خواهد بود. از مهمترین مزایای نسخه پیشنهادی آن است که، دیگر الگوریتم به نقطه شروع حساس نمی‌باشد و از طرفی می‌توان با چندین اجرای مجزا، تنوع جواب‌های معادله غیرخطی و کلیه حالات ممکن مانند رسیدن به جواب‌های مختلف (در صورت وجود) و یا امکان واگرایی در برخی نقاط را برای مساله، مورد بررسی قرار داد. برای واضح شدن این مطلب در ادامه روش پیشنهادی را روی دو مساله بکار گرفته‌ایم.

مطالعه دوم: روش پیشنهادی دنباله جواب‌های تقریبی شبه تصادفی تولید می‌کند.

در این مطالعه نشان می‌دهیم که دنباله جواب بدست آمده با یک نقطه شروع مشخص در نسخه پیشنهادی در هر اجرا شبه تصادفی است، در حالیکه در روش نیوتن کلاسیک دنباله جواب تولید شده همواره مشخص و غیرتصادفی می‌باشد. برای بررسی این موضوع معادله غیرخطی (۱۱) را در نظر بگیرید.

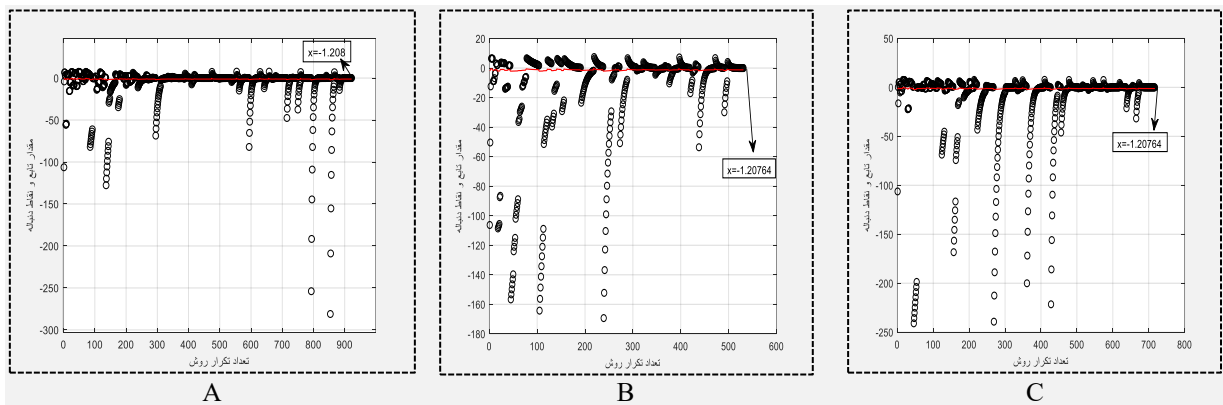
$$xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3 \cos(x) + 5 = 0 \quad (11)$$

طبق شکل (۶) معادله (۱۱) تنها دارای یک ریشه در بازه $[-1/5, -1]$ است. اگر الگوریتم پیشنهادی را روی معادله (۱۱) با نقطه شروع $x_0 = -2$ اجرا کنیم، متوجه خواهیم شد که در هر اجرا یک دنباله جواب تقریبی بصورت تصادفی و متفاوت از دیگری تولید می‌شود.



شکل ۶- نمودار تابع معادله $xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3 \cos(x) + 5 = 0$

شکل (۷) سه اجرای مجزای روش پیشنهادی با نقطه شروع یکسان $x_0 = -2$ را برای معادله (۱۱) نشان می‌دهد.



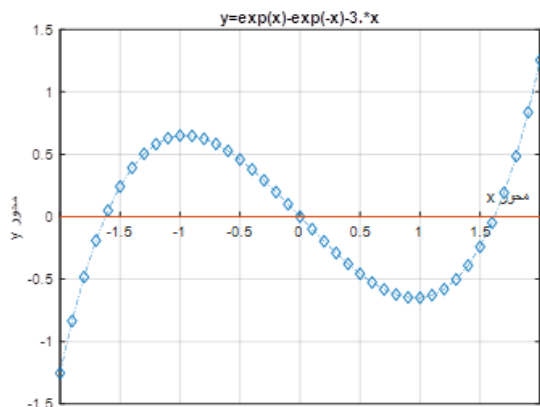
شکل ۷- مقایسه روند دنباله تصادفی تولید شده در سه اجرای مجزا از روش پیشنهادی

مسئله ۱. معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$e^x - e^{-x} - 3x = 0 \quad (12)$$

شکل (۸) نشان می‌دهد که معادله (۱۲) دارای ۳ ریشه ساده می‌باشد. اگر روش نیوتن کلاسیک را به‌ازای $x_0 = -1$ روی این معادله بکار بگیریم با تولید دنباله جواب تقریبی به ریشه $1/62213$ خواهیم رسید. همچنین روش نیوتن با نقطه شروع $x_0 = -0.8$ به ریشه $1/62213$ نزدیک خواهد شد و نهایتاً با استفاده از نقطه شروع $x_0 = -0.7$ به ریشه $0/00000$ می‌رسیم. در واقع این مسئله نشان می‌دهد که روش نیوتن به نقطه شروع و جواب اولیه حساس می‌باشد. حال اگر نسخه بهبود یافته پیشنهادی نیوتن را با نقطه شروع $x_0 = -1$ بکار بگیریم، به علت تولید دنباله جواب‌های تقریبی آشوبی در هر اجرا می‌توان به جواب‌های مختلف معادله با استفاده از چندین اجرای مجزا دست یافت. یعنی یافتن جواب‌های متعدد در الگوریتم پیشنهادی دست یافتنی است در حالیکه این امر در روش نیوتن امکان‌پذیر

نیست. در جدول ۳ روش نیوتن با نسخه پیشنهادی مقایسه شده است. در این جدول نشان داده شده است که نسخه

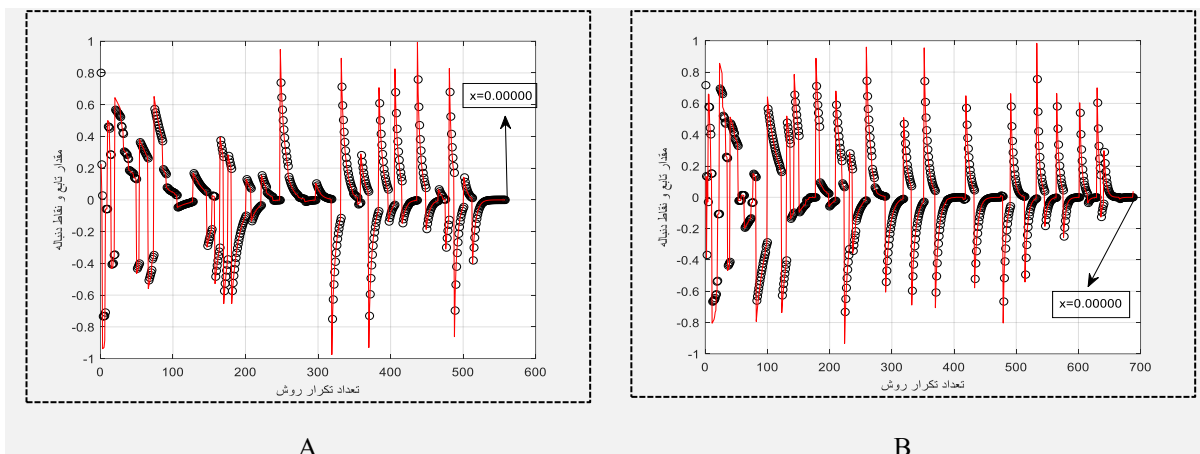


پیشنهادی به نقطه شروع حساس نبوده و هر سه ریشه معادله با استفاده از جواب اولیه $x_0 = -1$ توسط روش پیشنهادی دست‌یافتنی هستند در حالیکه الگوریتم نیوتن پایه با نقاط شروع مختلف به جواب‌های متفاوت همگرا خواهد شد.

شکل ۸- نمودار تابع $f(x) = e^x - e^{-x} - 3x$

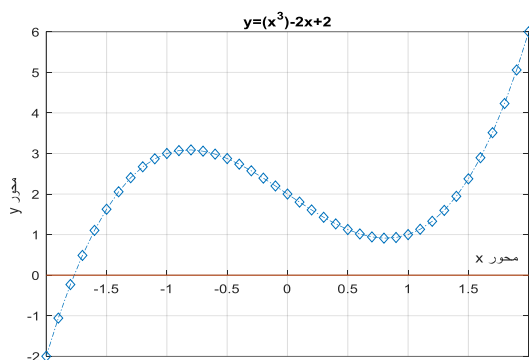
جدول ۳- مقایسه دنباله جواب‌های تولید شده توسط الگوریتم نیوتن و نسخه بهبود یافته

تعداد تکرار الگوریتم	الگوریتم نیوتن کلاسیک			نسخه پیشنهادی		
	$x_0 = -1$	$x_0 = -0.8$	$x_0 = -0.7$	$x_0 = -1$		
۱	-۱/۰۰۰۰۰	-۰/۸۰۰۰۰	-۰/۷۰۰۰۰	-۱/۰۰۰۰۰	-۱/۰۰۰۰۰	-۱/۰۰۰۰۰
۲	-۸/۵۳۹۳۲	۱/۱۱۸۵۸	۰/۴۹۰۲۷	-۱/۱۱۷۹۳	-۱/۵۱۶۲۰	-۱/۴۹۰۸۷
۳	-۷/۵۴۳۷۵	۲/۷۲۴۷۳	-۰/۱۰۶۶۱	-۱/۲۸۳۲۰	-۲/۵۱۵۰۸	-۲/۴۸۹۵۹
۴	-۶/۵۵۴۱۶	۲/۱۵۵۴۳	۰/۰۰۰۸۱	-۲/۱۷۸۶۶	-۲/۵۱۴۳۳	-۲/۴۸۸۸۵
۵	-۵/۵۷۷۹۹	۱/۷۹۸۸۴	۰/۰۰۰۰۰	-۲/۱۷۷۵۴	-۲/۵۱۳۳۳	-۲/۴۸۷۸۷
۶	-۴/۶۳۰۵۳	۱/۶۴۹۰۲		-۲/۱۵۰۳۴	-۲/۵۱۲۰۸	-۲/۴۸۶۶۴
۷	-۳/۷۴۰۱۰	۱/۶۲۲۸۸		-۱/۱۵۶۱۹	-۲/۵۱۰۵۷	-۲/۴۸۵۱۵
۸	-۲/۹۵۱۴۲	۱/۶۲۲۱۳		-۱/۱۶۰۴۸	-۲/۴۹۹۷۹	-۲/۴۶۹۰۷
۹	-۲/۳۱۹۵۷			-۱/۱۶۵۲۴	-۱/۵۰۱۳۴	-۱/۵۳۱۳۷
۱۰	-۱/۸۹۱۱۷			-۱/۱۷۰۴۳	-۱/۵۰۱۹۷	-۱/۵۳۱۸۲
۱۱	-۱/۶۷۸۷۰			-۱/۱۷۶۰۱	-۱/۵۰۲۶۶	-۱/۵۳۲۳۲
۱۲	-۱/۶۲۵۳۱			-۱/۲۵۱۲۲	-۱/۵۰۳۴۲	-۱/۵۳۲۹۹
۱۳	-۱/۶۲۲۱۴			-۱/۲۶۴۵۲	-۱/۵۰۴۲۳	-۲/۳۸۸۲۴
۱۴	-۱/۶۲۲۱۳			-۱/۴۴۷۱۸	-۱/۵۰۵۱۲	-۲/۳۸۵۳۰
⋮				⋮	⋮	⋮
۵۹۰				-۰/۰۵۱۱۸	-۰/۱۲۷۹۷	۱/۶۲۲۱۲
۵۹۱				-۰/۰۳۹۵۰	-۰/۰۹۸۵۰	۱/۶۲۲۱۳
۵۹۲				-۰/۰۳۰۴۸	-۰/۰۷۵۸۸	۱/۶۲۲۱۳
⋮				⋮	⋮	⋮
۷۱۵				۰/۰۵۹۴۲	-۱/۶۲۲۱۲	
۷۱۶				۰/۰۴۳۷۳	-۱/۶۲۲۱۲	
۷۱۷				۰/۰۳۲۱۹	-۱/۶۲۲۱۳	



شکل ۱۱- روند همگرایی الگوریتم پیشنهادی به ازای نقاط شروع مختلف برای معادله $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0$

بگیریم، هیچگاه در حلقه قرار نخواهد گرفت. شکل (A-۱۳) در حلقه قرار گرفتن الگوریتم نیوتن به‌ازای $x_0 = 1$ و $x_0 = 0$ را نشان می‌دهد و از شکل‌های (B-۱۳) و (C-۱۳) می‌توان روند همگرایی روش پیشنهادی را به‌ازای همین نقاط مشاهده نمود.



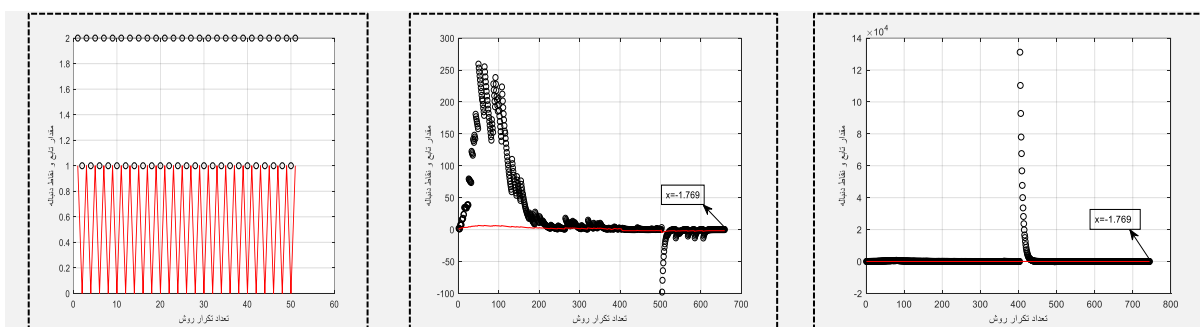
شکل ۱۲- نمودار تابع $f(x) = x^3 - 2x + 2$

۲-۴- مثال‌های عددی

با توجه به اینکه هدف اصلی در این مطالعه ارائه نسخه بهبود یافته‌ای از روش نیوتن به منظور جلوگیری از حلقه قرار گرفتن دنباله جواب‌های تقریبی بوده است، در این قسمت با ارائه چند مثال و مقایسه نتایج حاصل از اجرای الگوریتم نیوتن و روش پیشنهادی، به بررسی کارایی نسخه پیشنهادی تاکید خواهیم کرد.

مثال ۱) $x^3 - 2x + 2 = 0$

همانطور که در شکل (۱۲) مشاهده می‌گردد، این معادله دارای یک ریشه در بازه $[-2, -1/5]$ است. نتایج عددی نشان می‌دهد دنباله جواب‌های تقریبی تولید شده توسط الگوریتم نیوتن می‌تواند در حلقه قرار گرفته و بین مقادیر $x_{i+1} = 1$ و $x_i = 0$ در نوسان باشد ولیکن اگر روند پیشنهادی را با هر کدام از نقاط شروع صفر یا یک بکار



A. نوسانات دنباله جواب بین صفر و یک با بکارگیری الگوریتم نیوتن

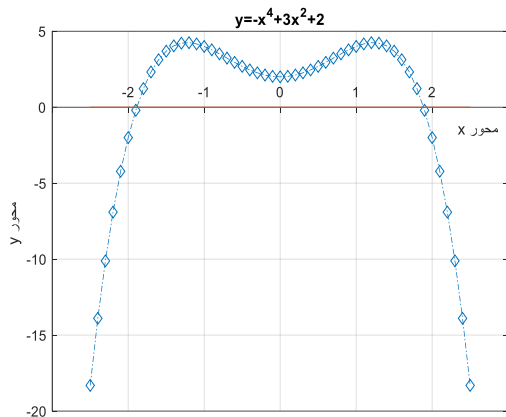
B. روند همگرایی دنباله جواب و دنباله مقادیر تابع متناظر آن‌ها با بکارگیری نسخه بهبودیافته با نقطه شروع $x_0 = 1$

C. روند همگرایی دنباله جواب و دنباله مقادیر تابع متناظر آن‌ها با بکارگیری نسخه بهبودیافته با نقطه شروع $x_0 = 0$

شکل ۱۳- مقایسه روند پیشنهادی و الگوریتم نیوتن.

مطابق با شکل (۱۴) این معادله دارای دو ریشه ساده در بازه‌های $[1/5, 2]$ و $[-2, -1/5]$ می‌باشد.

مثال ۲) $-x^4 + 3x^2 + 2 = 0,$

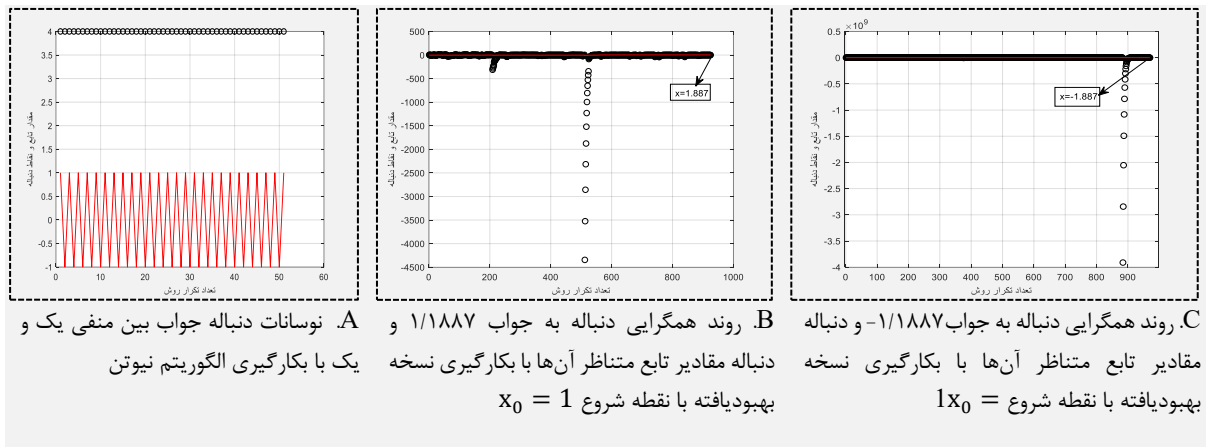


شکل ۱۴- نمودار تابع $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2$

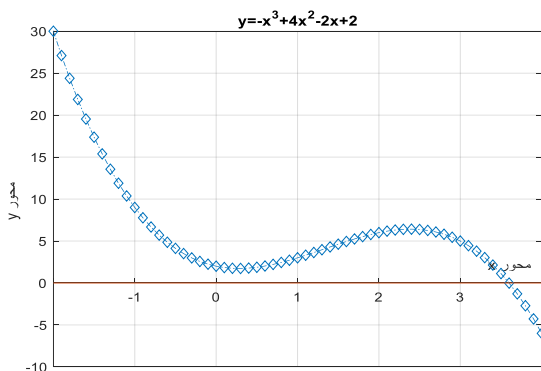
مشابه مثال ۱ می‌توان روند همگرایی روش پیشنهادی و در حلقه قرار گرفتن الگوریتم نیوتن به‌ازای نقاط شروع $x_0 = 1$ و $x_0 = -1$ را در شکل‌های ۱۵-A، ۱۵-B، و ۱۵-C مشاهده نمود.

مثال ۳) $-x^3 + 4x^2 - 2x + 2 = 0$,

شکل (۱۶) نشان می‌دهد که این معادله دارای یک ریشه ساده در بازه $[۳, ۴]$ می‌باشد.

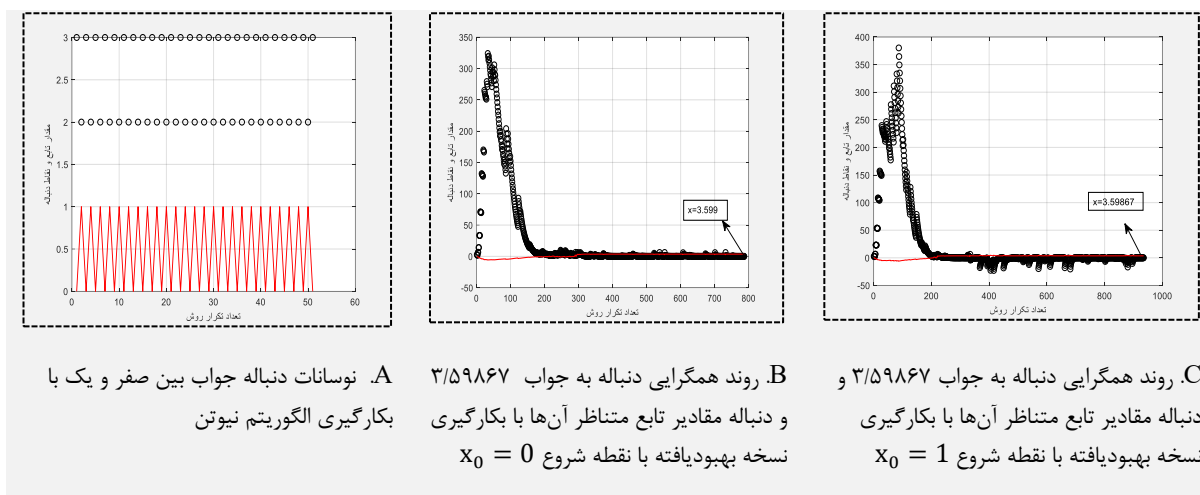


شکل ۱۵- مقایسه روش پیشنهادی و الگوریتم نیوتن
 A. نوسانات دنباله جواب بین منفی یک و یک با بکارگیری الگوریتم نیوتن
 B. روند همگرایی دنباله به جواب $1/1887$ و دنباله مقادیر تابع متناظر آن‌ها با بکارگیری نسخه بهبودیافته با نقطه شروع $x_0 = 1$
 C. روند همگرایی دنباله به جواب $-1/1887$ و دنباله مقادیر تابع متناظر آن‌ها با بکارگیری نسخه بهبودیافته با نقطه شروع $x_0 = 1$



شکل ۱۶- نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 2$

مشابه مثال‌های قبلی می‌توان روند همگرایی روش پیشنهادی و در حلقه قرار گرفتن الگوریتم نیوتن به‌ازای نقطه شروع $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$ را در شکل‌های (۱۷-A)، (۱۷-B)، و (۱۷-C) مشاهده نمود.



شکل ۱۷- مقایسه روش پیشنهادی و الگوریتم نیوتن.

۵- نتیجه گیری و کارهای آینده

این مقاله بهبودیافته‌ای از الگوریتم نیوتن-رافسون را ارائه داده است که دو مشکل اساسی این روش یعنی حساسیت به نقطه شروع و در حلقه قرار گرفتن دنباله جواب‌های تولیدی را برطرف می‌کند. با افزودن یک جمله آشوبی به رابطه بازگشتی نیوتن و استفاده از نگاشت لاجستیک، دنباله جواب‌ها از حالت قطعی به حالت شبه تصادفی تبدیل می‌شود. این تغییر باعث می‌شود حساسیت به نقطه شروع کاهش یابد و امکان فرار دنباله جواب از حلقه فراهم شود. همچنین، به دلیل ساختار قطعی دنباله‌های شبه تصادفی تولید شده از نگاشت لاجستیک، زمان اجرای الگوریتم بهبود یافته قابل قبول خواهد بود. در این مقاله، کارایی روش پیشنهادی با استفاده از معادلات غیرخطی مختلف به صورت عددی بررسی شده و تحلیل نظری موضوع به عنوان کارهای آینده مطرح می‌شود.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که در مورد انتشار این مقاله تعارض منافع وجود ندارد.

تأییدیه اخلاقی

نویسندگان متعهد می‌شوند که مطالب این مقاله را در هیچ مجله دیگر به چاپ نرسانند.

مشارکت‌های نویسندگان:

مراجع

[1] M. Kumar, K.S. Akhilesh, and S. Akanksha. "Various Newton-Type Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations." *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 21, no. 3 (2013): 334–39.

- [2] C. Chun. "Iterative Methods Improving Newton's Method by the Decomposition Method." *Computers & Mathematics with Applications* 50, no. 10–12 (2005): 1559–68.
- [3] S. Abbasbandy. "Improving Newton–Raphson Method for Nonlinear Equations by Modified Adomian Decomposition Method." *Applied Mathematics and Computation* 145, no. 2–3 (2003): 887–93.
- [4] L. Asiedu. "A Modification of Newton Method for Solving Non-Linear Equations." *Science and Development Journal* 5, no. 1 (2021): 54–54.
- [5] S. Weerakoon, and T.G.I. Fernando. "A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence." *Applied Mathematics Letters* 13, no. 8 (2000): 87–93.
- [6] J. Kou, L. Yitian, and W. Xiuhua. "Some Modifications of Newton's Method with Fifth-Order Convergence." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 209, no. 2 (2007): 146–52.
- [7] T.J. McDougall, and S.J. Wotherspoon. "A Simple Modification of Newton's Method to Achieve Convergence of Order 1+2." *Applied Mathematics Letters* 29 (2014): 20–25.
- [8] M.A.A. Bortoloti, T.A. Fernandes, and O.P. Ferreira. "An Efficient Damped Newton-Type Algorithm with Globalization Strategy on Riemannian Manifolds." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 403 (2022): 113853.
- [9] O.P. Ferreira, and G.N. Silva. "Local Convergence Analysis of Newton's Method for Solving Strongly Regular Generalized Equations." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 458, no. 1 (2018): 481–96.
- [10] D. Yang, L. Gang, and C. Gengdong. "On the Efficiency of Chaos Optimization Algorithms for Global Optimization." *Chaos, Solitons & Fractals* 34, no. 4 (2007): 1366–75.
- [11] V. Jovanovic. "Chaotic descent method and fractal conjecture." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48, no. 1 (2000): 137-152.
- [12] V. Jovanovic, and K. Kazerounian. "Optimal Design Using Chaotic Descent Method." *Journal of Mechanical Design* 122, no. 3 (1998): 265–70.
- [13] T. Xiang, X. Liao, and K. Wong. "An Improved Particle Swarm Optimization Algorithm Combined with Piecewise Linear Chaotic Map." *Applied Mathematics and Computation* 190, no. 2 (2007): 1637–45.
- [14] D. Yang, Z. Liu, and J. Zhou. "Chaos Optimization Algorithms Based on Chaotic Maps with Different Probability Distribution and Search Speed for Global Optimization." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19, no. 4 (2014): 1229–46.
- [15] D. Yang, P. Yang, and C. Zhang. "Chaotic Characteristic Analysis of Strong Earthquake Ground Motions." *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22, no. 03 (2012): 1250045.
- [16] J.L. McCauley. *Chaos, Dynamics, and Fractals: An Algorithmic Approach to Deterministic Chaos*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [17] Ott, Edward. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [18] D. Yang, G. Li, and G. Cheng. "Convergence Analysis of First Order Reliability Method Using Chaos Theory." *Computers & Structures* 84, no. 8–9 (2006): 563–71.
- [19] B. Li, and W-S. Jiang. "Optimizing Complex Functions by Chaos Search." *Cybern. Syst.* 29, no. 4 (1998): 409–19.
- [20] M.S. Tavazoei, and M. Haeri. "Comparison of Different One-Dimensional Maps as Chaotic Search Pattern in Chaos Optimization Algorithms." *Appl. Math. Comput.* 187, no. 2 (2007): 1076–85.
- [21] Y.Y. He, J-Z. Zhou, X-Q. Xiang, H. Chen, and H. Qin. "Comparison of Different Chaotic Maps in Particle Swarm Optimization Algorithm for Long-Term Cascaded Hydroelectric System Scheduling." *Chaos, Solitons & Fractals* 42, no. 5 (2009): 3169–76.