



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

3D Analytical Modeling of Slotless Axial Flux Machines under No-Load Condition and Different Magnet Shapes

Farhad Rezaee Alam ^{a*}, Mojtaba Hosseini ^b

^a Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Lorestan University, Khorramabad, Iran

^b Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Lorestan University, Khorramabad, Iran

PAPER INFO

Paper history:

Received: 2024-10-09

Revised: 2025-02-02

Accepted: 2025-02-05

Keywords:

Axial Flux Permanent;
Magnet (AFPM) machine;
Flux-linkage;
Fourier-Bessel series;
PM shaping;
Skew.

ABSTRACT

This paper presents a new 3D analytical model based on Fourier-Bessel series for electromagnetic modeling the performance of slotless Axial Flux Permanent Magnet (AFPM) machines under no-load condition. The machine geometry is divided into different domains including Permanent Magnet (PM) domain, air-gap domain and so on. The Laplace equation in terms of scalar magnetic potential is solved in each domain, and their solutions is expressed based on Fourier-Bessel series to accurately consider the radial variation of air-gap magnetic field. A 2D geometry function based on Fourier-Bessel series is introduced to accurately consider the different PM shaping in magnet domain. The boundary condition is then used to determine the unknown constants in general solutions. This 3D analytical model is prepared to calculate the no-load flux-linkage of stator phases while considering different PM shapes and skewing effect. Two indexes including the amplitude of fundamental component and the total harmonic distortion (THD) of no-load phase flux-linkage are considered to investigate the effect of skewed PMs and other PM shapes. The capability of proposed 3D analytical model is also presented to calculate the air-gap magnetic field due to stator phases for determining the inductance matrix. In final, the accuracy of proposed 3D analytical model is verified by comparing with the corresponding results obtained through finite element method (FEM) and experiment set-up.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2025.35577.2740>

© 2025 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: [email of corresponding author](#)

How to cite this article:

F. Rezaee-Alam and M. Hosseini, "3D Analytical Modeling of Slotless Axial Flux Machines under No-Load Condition and Different Magnet Shapes," Journal of Modeling in Engineering, 23 83 (2025): 11-25, doi: 10.22075/jme.2025.35577.2740

مدلسازی تحلیلی ۳ بعدی ماشین های شار محوری تحت شرایط بی باری و با در نظر داشتن شکل های مختلف برای آهنربا

فرهاد رضائی علم^{۱*}، مجتبی حسینی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۱۸ بازنگری مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۱۴ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۱۷	
واژگان کلیدی: ماشین شار محوری با آهنربای دائم (AFPM)، شار پیوندی، سری فوریه - بسل، شکل آهنربا، مورب سازی.	در این مقاله، یک مدل تحلیلی ۳ بعدی بر پایه سری فوریه - بسل برای مدلسازی عملکرد الکترومغناطیسی ماشین های شار محوری بدون شیار با آهنربای دائم (AFPM) ارائه می شود. هندسه ماشین به نواحی مختلف شامل ناحیه آهنربای دائم (PM)، فاصله هوایی و غیره تقسیم می شود. در هر ناحیه معادله لاپلاس بر حسب پتانسیل مغناطیسی اسکالر حل می شود و به منظور دقیق در نظر گرفتن تغییرات شعاعی میدان مغناطیسی در فاصله هوایی، جواب های معادله لاپلاس بر حسب سری فوریه - بسل بیان می شوند. یک تابع هندسی ۲ بعدی بر حسب سری فوریه - بسل برای در نظر گرفتن شکل های مختلف برای قطب های آهنربایی معرفی می شود. از شرایط مرزی برای تعیین ثابت های مجهول در جواب های عمومی معادله لاپلاس استفاده می شود. از این مدل تحلیلی ۳ بعدی به منظور محاسبه شار پیوندی با فازهای استاتور در حالت بی باری استفاده می شود مادامی که شکل های مختلف برای قطب های آهنربایی و اثر مورب سازی در نظر گرفته خواهد شد. از دامنه مولفه اصلی شار پیوندی و اعوجاج هارمونیک کل (THD) به عنوان شاخص های ارزیابی شار پیوندی با فاز استاتور استفاده می شود. قابلیت و توانایی این مدل تحلیلی ۳ بعدی برای محاسبه میدان مغناطیسی فاصله هوایی ناشی از تحریک فازهای استاتور به منظور محاسبه ماتریس اندوکتانس ارائه می شود. در نهایت، دقت مدل تحلیلی ۳ بعدی پیشنهادی از طریق مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج متناظر حاصل از روش اجزاء محدود (FEM) و نتایج عملی تایید می شود.
DOI: https://doi.org/10.22075/jme.2025.35577.2740	
© 2025 Published by Semnan University Press. This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)	

۱- مقدمه

ماشین های شار محوری با آهنربای دائم (AFPM) و بدون شیار به خاطر نداشتن گشتاور دندانه ای و پایین بودن سطح نویزشان، کاربرد های فراوانی در صنعت پیدا کرده اند [۱-۲]. به همین خاطر، مدلسازی ۳ بعدی دقیق ماشین

های AFPM بدون شیار برای محاسبه میدان مغناطیسی فاصله هوایی ضروری است. روش اجزاء محدود (FEM) مشهورترین تکنیک برای آنالیز عملکرد ماشین های AFPM است [۳-۴]. در مرجع [۵] روش بازسازی میدان که بر پایه توابع پایه بدست آمده از FEM عمل می کند

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: rezaee_fa@lu.ac.ir

۱. گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

۲. گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

استناد به این مقاله:

فرهاد رضائی علم و مجتبی حسینی، "مدلسازی تحلیلی ۳ بعدی ماشین های شار محوری تحت شرایط بی باری و با در نظر داشتن شکل های مختلف برای آهنربا"، مدل سازی در مهندسی، ۸۳ (۱۴۰۴): ۲۵-۱۱، doi: 10.22075/jme.2025.35577.2740

جدول ۱- پارامترهای ماشین AFPM آنالیز شده

شعاع بیرونی هسته استاتور (r_{so})	۱۵۰ میلیمتر
شعاع داخلی هسته استاتور (r_{si})	۱۰۰ میلیمتر
ضخامت محوری هسته استاتور	۱۰ میلیمتر
تعداد کلاف های استاتور	۲۴
ضخامت هر کلاف	۴ میلیمتر
عرض هر کلاف	۷ میلیمتر
تعداد دور هر کلاف	۵۱
طول فاصله هوایی	۲ میلیمتر
شعاع بیرونی آهنربا (r_{mo})	۱۵۵ میلیمتر
شعاع داخلی آهنربا (r_{mi})	۹۵ میلیمتر
تعداد آهنربا	۱۶
ضخامت آهنربا	۲/۵ میلیمتر
نسبت قوس قطب به گام قطب	۰/۸
شعاع بیرونی هسته رتور (r_{ro})	۱۶۰ میلیمتر
شعاع داخلی هسته رتور (r_{ri})	۹۰ میلیمتر
ضخامت هسته رتور	۱۰ میلیمتر
چگالی شار پسماند آهنربا (B_R)	۱/۲ تسلا
نفوذپذیری نسبی آهنربا	۱/۱

مدل شبه ۳ بعدی با کمک مدل های MEC ۲ بعدی در مراجع [۱۴-۱۵] برای آنالیز الکترومغناطیسی ماشین های شار محوری استفاده شد. مدل شبه ۳ بعدی بر پایه ترکیب جواب های معادلات ماکسول در فاصله هوایی و مدل MEC در بخش های آهنی در مرجع [۱۶] ارائه شد. در حالت کلی می توان ادعا کرد با افزایش تعداد اسلایس های ۲ بعدی، دقت مدل شبه ۳ بعدی نیز افزایش خواهد یافت. همچنین، مدل های شبه ۳ بعدی نمی توانند اثرات لبه ای^۵ ناشی از اختلاف طول شعاعی هسته های رتور و استاتور را در نظر بگیرد. به همین خاطر در مراجع [۱۷-۱۸]، ضرائب تصحیح بدست آمده از FEM برای لحاظ کردن اثرات لبه ای در نتایج میدان مغناطیسی فاصله هوایی حاصل از مدل های شبه ۳ بعدی استفاده شده اند. مدل MEC ۳ بعدی نیز می تواند برای مدلسازی و آنالیز عملکرد ماشین های AFPM استفاده شود [۱۹]. در هر حال مدل MEC کاربرپسند نیست و برای محاسبه مولفه های چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی نمی تواند دقیق عمل کند. در مرجع [۲۰]، مدل S-D ۳ بعدی برای آنالیز الکترومغناطیسی ماشین های AFPM بدون در نظر گرفتن اثرات لبه ای استفاده شده است. در [۲۱]، یک مدل تحلیلی ۳ بعدی برای

برای مدلسازی و آنالیز عملکرد یک ماشین AFPM استفاده شده است. امکان مدلسازی تمامی اثرات غیر ایده آل شامل اشباع مغناطیسی و اثر شیارها با استفاده از FEM وجود دارد. در هر حال آماده کردن مدل ۳ بعدی ماشین های الکتریکی شامل ماشین های AFPM در نرم افزارهای FEM و تحلیل ۳ بعدی آنها فوق العاده زمانبر است و در بعضی موارد مانند ماشین های الکتریکی بزرگ و آنالیز ۳ بعدی در حین چرخش رتور، امکان رسیدن به جواب وجود ندارد. به همین خاطر معرفی روشهای تحلیلی ۳ بعدی می تواند فوق العاده ارزشمند باشد، و بهتر است که تنها در مرحله پایانی و به منظور تایید و راستی آزمایی نتایج بدست آمده از مدل های تحلیلی، از FEM استفاده شود [۶]. روش های تحلیلی که تاکنون برای مدلسازی و آنالیز عملکرد ماشین های AFPM استفاده شده اند عبارتند از مدل های شبه ۳ بعدی^۲، مدل مدار معادل مغناطیسی^۳ (MEC)، و مدل ناحیه بندی^۴ (S-D).

مدل های شبه ۳ بعدی بیشتر از سایر مدل های تحلیلی برای مدلسازی ماشین های AFPM استفاده شده اند. در مدل های شبه ۳ بعدی، به منظور در نظر گرفتن تغییرات هندسی موتور در جهت شعاعی و ناشی از اثر انحناء^۵ هندسه ماشین در جهت شعاعی به چندین اسلایس^۶ حلقوی تقسیم می شود. مدل تحلیلی ۲ بعدی در هر اسلایس برای آنالیز الکترومغناطیسی استفاده می شود و سپس از اعمال اصل جمع آثار روی نتایج حاصل از مدل های ۲ بعدی، نتایج مربوط به آنالیز مدل شبه ۳ بعدی بدست می آید. در مرجع [۷]، مدل شبه ۳ بعدی بر پایه مدل های FEM ۲ بعدی استفاده شده است. مدل شبه ۳ بعدی با کمک مدلسازی مغناطیسی هارمونیک در مختصات کارتزین در مرجع [۸] پیشنهاد داده شد. مدل شبه ۳ بعدی بر پایه تنها یک مدل تحلیلی ۲ بعدی در شعاع متوسط هندسی، با کمک مدل S-D در خصوص ترمزهای فوکو شار محوری [۹-۱۰]، و با کمک روش تصاویر برای محاسبه اندوکتانس های یک ماشین AFPM بدون شیار [۱۱] ارائه شده است. مدل شبه ۳ بعدی همچنین برپایه چند مدل S-D ۲ بعدی در شعاع های مختلف هندسی به منظور بهینه سازی طرح و مدلسازی ماشین های AFPM استفاده شده است [۱۲-۱۳].

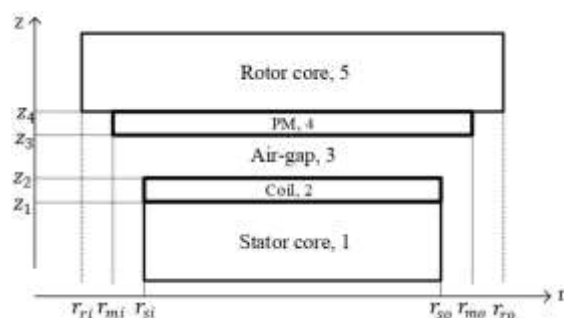
⁵ Curvature effect⁶ Slice⁷ Edge effect² Quasi 3D model³ Magnetic Equivalent Circuit (MEC)⁴ Sub-Domain (S-D) model

۲- پارامترهای ماشین AFPM آنالیز شده

در خصوص ماشین AFPM آنالیز شده که ۳ فاز، بدون شیار، تک وجهی و دارای قطب های آهنربایی مغناطیس شده در جهت محوری است، پارامترهای اصلی در جدول ۱ معرفی می شوند. در شکل (۱)، دیسک های رتور و استاتور که به ترتیب شامل قطب های آهنربایی و کلاف های سیم بندی سه فاز هستند، در محیط نرم افزار ماکسول (Maxwell 14.0) نمایش داده می شوند. همان طور که مشاهده می شود، به منظور وضوح بیشتر، قطب های رتور و کلاف های استاتور با رنگ های متفاوت دیده می شوند.

۳- مدل تحلیلی سه بعدی پیشنهادی

در مدل ۳ بعدی پیشنهادی، هندسه ماشین به نواحی مختلف تقسیم می شود. یک نمای ۲ بعدی از ماشین AFPM بدون شیار در صفحه r - z در دستگاه مختصات استوانه ای در شکل (۲) نشان داده می شود.



شکل ۲- نمای ۲ بعدی از ماشین AFPM آنالیز شده

فرمول (۱)، معادله لاپلاس را برحسب پتانسیل مغناطیسی اسکالر نشان می دهد.

$$\nabla^2 \Omega_i(r, \varphi, z) = 0 \quad (1)$$

در (۱)، Ω_i پتانسیل مغناطیسی اسکالر را در ناحیه i ام نشان می دهد. با استفاده از اصل پیوستگی مولفه نرمال بردار چگالی شار مغناطیسی ($\vec{B}$) و مولفه مماسی بردار شدت میدان مغناطیسی ($\vec{H}$) در سرتاسر مرزهای افقی نشان داده شده در شکل (۲)، شرایط مرزی لازم را برای حل معادله لاپلاس (۱) می توان به شرح زیر تعریف کرد:

$$z = z_4 \rightarrow H_{t,4} = 0 \quad (2)$$

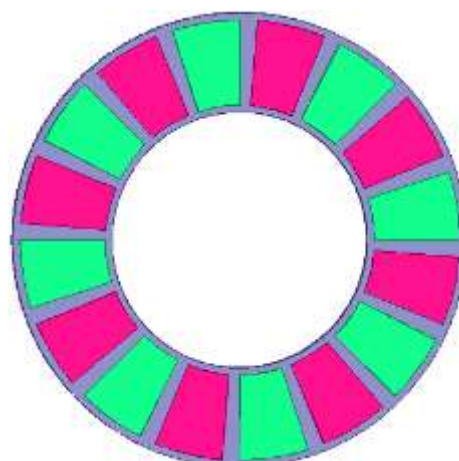
$$z = z_3 \rightarrow \begin{cases} H_{t,3} = H_{t,4} \\ B_{z,3} = B_{z,4} \end{cases} \quad (3)$$

$$z = z_2 \rightarrow \begin{cases} H_{t,2} = H_{t,3} \\ B_{z,2} = B_{z,3} \end{cases} \quad (4)$$

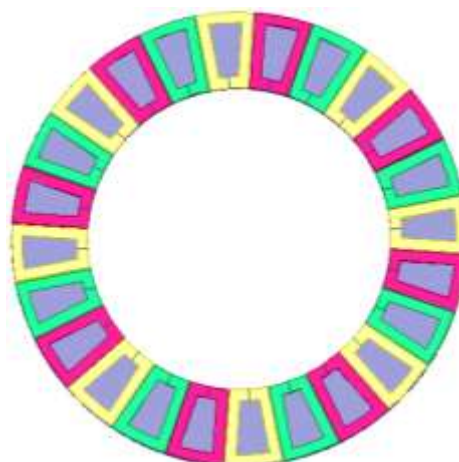
محاسبه گشتاور در ماشین های AFPM بدون شیار ارائه شده است که از اعمال یک ضریب تصحیح برای مدلسازی اثر تغییر شکل قطب های آهنربایی سینوسی شکل در راستای شعاعی استفاده کرده است.

در این مقاله، یک مدل تحلیلی ۳ بعدی برای آنالیز الکترومغناطیسی ماشین های AFPM بدون شیار ارائه شده است که می تواند اثرات انحناء مربوط به هندسه قطب های آهنربایی و اثرات لبه ای ناشی از اختلاف طول شعاعی هسته های رتور و استاتور را در نظر بگیرد. این مقاله شامل بخش های زیر است:

در بخش ۲ ام پارامترهای اصلی ماشین AFPM آنالیز شده معرفی می شوند. مدل تحلیلی ۳ بعدی پیشنهاد شده در بخش ۳ ام به طور کامل معرفی می شود. محاسبه شار پیوندی با استفاده از مدل تحلیلی پیشنهادی در بخش ۴ ام ارائه می شود. نتایج گرفته شده از این مقاله در بخش ۵ ام معرفی می شوند.



الف- دیسک رتور



ب- دیسک استاتور

شکل ۱- ماشین AFPM آنالیز شده

شعاعی متفاوت نواحی در شکل (۲) قابل مشاهده است که منجر به اثرات انتهایی یا لبه ای می شود. جواب عمومی معادله لاپلاس (۱) ناشی از فقط PM های رتور به صورت (۶) قابل نمایش است.

$$\Omega_i(r, \varphi, z) = \sum_k \sum_l \left[\left(L_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} + M_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) J_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \cos(l(\varphi - \theta_r)) \right. \\ \left. + \left(N_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} + O_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) J_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \sin(l(\varphi - \theta_r)) \right] \quad (6)$$

شدت میدان مغناطیسی در ناحیه i ام را با استفاده از رابطه زیر می توان محاسبه کرد:

$$\vec{H}_i = -\vec{\nabla} \Omega_i \quad (7)$$

نتایج حاصل از (۷) برای مولفه های شعاعی، مماسی، و محوری $\vec{H}_i$ در موقعیت های مختلف رتور (θ_r) در فرمول های (۸-۱۰) نشان داده می شوند.

$$H_{r,i}(r, \varphi, z) = - \sum_k \sum_l \left(\frac{j(k,l)}{2r_a} \right) \left[\left(L_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} + M_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) F \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \cos(l(\varphi - \theta_r)) \right. \\ \left. + \left(N_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} + O_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) F \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \sin(l(\varphi - \theta_r)) \right] \quad (8)$$

$$H_{t,i}(r, \varphi, z) = \sum_k \sum_l \left(\frac{l}{r} \right) \left[\left(L_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} + M_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) J_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \sin(l(\varphi - \theta_r)) \right. \\ \left. - \left(N_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} + O_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) J_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \cos(l(\varphi - \theta_r)) \right] \quad (9)$$

$$H_{z,i}(r, \varphi, z) = - \sum_k \sum_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} \right) \left[\left(L_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} - M_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) J_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \cos(l(\varphi - \theta_r)) \right. \\ \left. + \left(N_{i,(k,l)} e^{\frac{j(k,l)}{r_a} z} - O_{i,(k,l)} e^{-\frac{j(k,l)}{r_a} z} \right) J_l \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \sin(l(\varphi - \theta_r)) \right] \quad (10)$$

رابطه (۱۲)، بردار مغناطیس شوندگی آهنربا ($\vec{M}$) در ناحیه ۴ ام، برای محاسبه چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی باید در نظر گرفته شود. در (۱۲)، μ_0 نفوذپذیری مغناطیسی خلاء است. با کمک (۱۳)، از سری فوریه - بسل برای نمایش توزیع مغناطیس شوندگی آهنرباها در جهت محوری استفاده می شود. برای ماشین AFPM بدون شیار آنالیز

$$z = z_1 \rightarrow H_{t,2} = 0 \quad (5)$$

معادله لاپلاس (۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل می شود با این فرض که هسته های رتور و استاتور دارای نفوذپذیری مغناطیسی بی نهایت هستند. طول

همانطور که مشاهده می شود از سری فوریه - بسل در جواب عمومی معادله لاپلاس برای دقیق لحاظ کردن تغییرات هندسی در جهت های شعاعی ناشی از اثر انحنای تغییرات مماسی ناشی از توزیع متناوب قطب های آهنربایی، و تغییرات در راستای محوری با شرایط مرزی مناسب، استفاده شده است. در (۶)، $J_{(k,l)}$ عبارتست از ریشه k ام از تابع بسل نوع اول $J_l(r)$ بعد از حل معادله لاپلاس (۱)،

$F \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right)$ در (۸) به صورت (۱۱) تعریف می شود.

$$F \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) = J_{l-1} \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) - J_{l+1} \left(\frac{j(k,l)}{r_a} r \right) \quad (11)$$

همانطور که در شکل (۲) نشان داده می شود و مطابق

شده با PM های دوزنقه ای شکل، توزیع واقعی و تقریبی

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

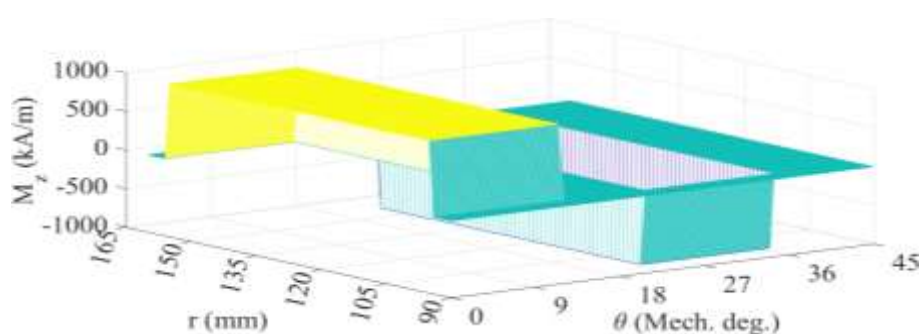
$$\vec{M} = M_z \vec{a}_z = \frac{B_R}{\mu_0} \vec{a}_z \quad (12)$$

در شکل (۳) نشان داده می شوند.

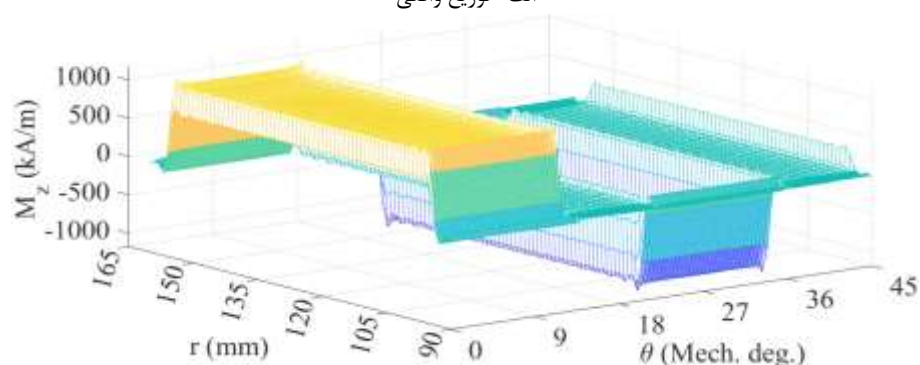
$$M_z(r, \varphi) = -0.5 \sum_k A_{(k,0)} J_l \left(\frac{j_{(k,0)}}{r_a} r \right) + \sum_k \sum_l \left[A_{(k,l)} J_l \left(\frac{j_{(k,l)}}{r_a} r \right) \cos(l(\varphi - \theta_r)) + B_{(k,l)} J_l \left(\frac{j_{(k,l)}}{r_a} r \right) \sin(l(\varphi - \theta_r)) \right] \quad (13)$$

$$A_{(k,l)} = \frac{2}{\pi r_a^2 [J_{l+1}(j_{(k,l)})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} r M_z J_l \left(\frac{j_{(k,l)}}{r_a} r \right) \cos(l\varphi) dr d\varphi$$

$$B_{(k,l)} = \frac{2}{\pi r_a^2 [J_{l+1}(j_{(k,l)})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} r M_z J_l \left(\frac{j_{(k,l)}}{r_a} r \right) \sin(l\varphi) dr d\varphi$$



الف- توزیع واقعی



ب- توزیع تقریبی

شکل ۳- توزیع M_z برای یک جفت قطب آهنربایی بدون مورب سازی

می شوند. لازم به ذکر است که مولفه شعاعی B_r در شعاع متوسط $r=125$ mm قابل چشم پوشی است و به همین خاطر در شعاع $r=101$ mm که نزدیک به لبه است در شکل (۴-ب) نشان داده شده است.

از طریق جایگزینی سیم پیچ ها با آهنرباهای مجازی معادل که دارای جهت مغناطیس شوندگی محوری هستند، مدل تحلیلی ۳ بعدی پیشنهادی می تواند برای محاسبه میدان مغناطیسی فاصله هوایی ناشی از جریان های استاتور استفاده شود.

برای محاسبه توزیع میدان مغناطیسی فاصله هوایی ناشی از فقط آهنرباها، ثابت های مجهول در (۸-۱۰) از طریق اعمال شرایط مرزی در $Z = Z_1$, $Z = Z_3$ و $Z = Z_4$ تعیین می شوند مادامی که ناحیه مربوط به سیم پیچ ها در شکل (۲) در نظر گرفته نمی شود. ثابت های مجهول مربوط به نواحی فاصله هوایی و PM ها از طریق حل دستگاه معادلات (۱۴) تعیین می شوند. برای یک نقطه کار بی باری و در شعاع های مختلف، مولفه های چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی برای ماشین AFPM بدون شیار تحت بررسی با PM های دوزنقه ای شکل در شکل (۴) نشان داده

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} \\ e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} \\ -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_3\right)} \\ e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{3,(k,l)} \\ L_{4,(k,l)} \\ M_{3,(k,l)} \\ M_{4,(k,l)} \\ N_{3,(k,l)} \\ N_{4,(k,l)} \\ O_{3,(k,l)} \\ O_{4,(k,l)} \end{bmatrix} = \left(\frac{r_a}{j(k,l)}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{(k,l)} \\ B_{(k,l)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

در این فرآیند معادلسازی، شکل و نیرو محرکه مغناطیسی کلاف های استاتور به طور کامل حفظ می شود. چگالی شار پسماند آهنربای مجازی معادل (B_R) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$B_R = \frac{\mu_0 \times n_c \times I_c}{h_m} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، n_c تعداد دورهای یک کلاف، I_c اندازه

$$\begin{bmatrix} e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_1\right)} & 0 \\ e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} \\ e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & -e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_2\right)} \\ 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\left(\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} & 0 & e^{\left(-\frac{j(k,l)}{r_a}Z_4\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2,(k,l)} \\ L_{3,(k,l)} \\ M_{2,(k,l)} \\ M_{3,(k,l)} \\ N_{2,(k,l)} \\ N_{3,(k,l)} \\ O_{2,(k,l)} \\ O_{3,(k,l)} \end{bmatrix} = \left(\frac{r_a}{j(k,l)}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{(k,l)} \\ B_{(k,l)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

آزمایی می شوند.

۴- محاسبه شار پیوندی

شار پیوندی با یک کلاف استاتور می تواند به صورت (۱۷) محاسبه شود.

تحت شرایط تحریک فاز A با جریان ۱ آمپری ($I_A=1(A)$, $I_B=0(A)$, $I_C=0(A)$)، مولفه های چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی در شکل (۶) نشان داده شده و همچنین از طریق مقایسه با نتایج نظیر FEM راستی

جمع آثار روی نتایج نظیر بدست آمده برای کلاف های استاتور (فرمول (۱۸)) حاصل می شود.

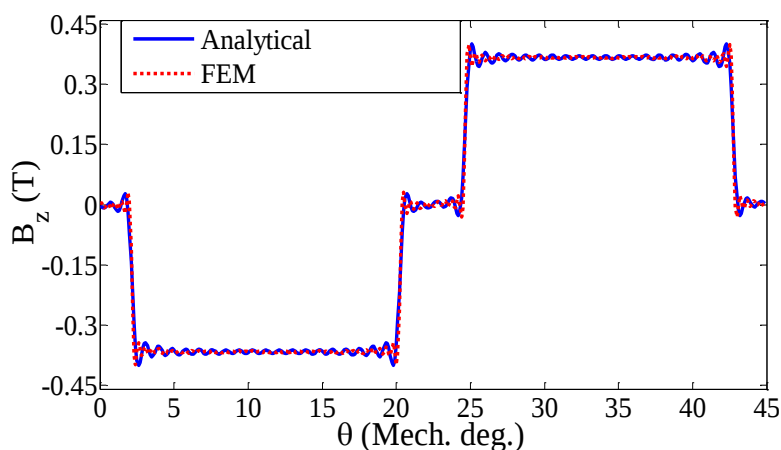
$$\lambda_{ph}(\theta_r) = \sum_{i=1}^8 \lambda_i(\theta_r) \quad (18)$$

با حذف PM های رتور، از محاسبه شار پیوندی با فازهای استاتور می توان برای تعیین عناصر ماتریس اندوکتانس استفاده کرد.

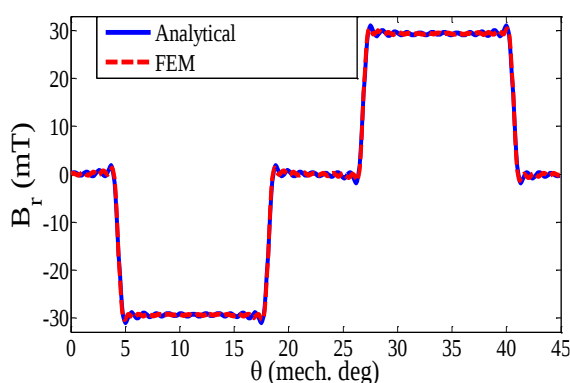
$$\begin{cases} L_{A-A} = \frac{\lambda_A}{I_A} \Big|_{I_A \neq 0, I_{B,C} = 0} = 1.9 \text{ (mH)} \\ L_{A-B} = \frac{\lambda_A}{I_B} \Big|_{I_B \neq 0, I_{A,C} = 0} = -1.2 \text{ (mH)} \\ \lambda_A = \int_0^{2\pi} \int_{r_{si}}^{r_{so}} \mathbf{n}_A(r, \varphi) \times \mathbf{B}_z(r, \varphi) \times d\mathbf{s}(r, \varphi) \end{cases} \quad (19)$$

$$\lambda_i(\theta_r) = \int_0^{2\pi} \int_{r_{si}}^{r_{so}} [n_i(r, \varphi) \times B_z(r, \varphi, \theta_r) \times d\mathbf{s}(r, \varphi)] \quad (17)$$

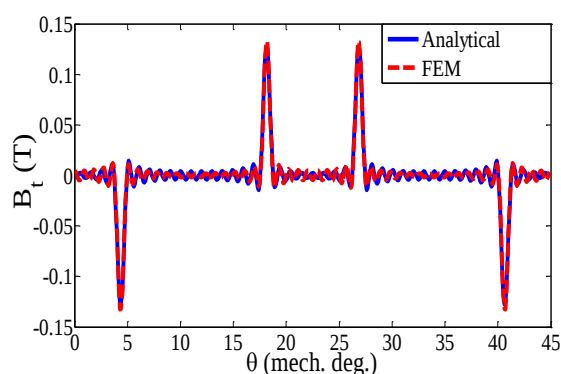
در رابطه (۱۷)، θ_r موقعیت رتور، $n_i(r, \varphi)$ تابع دور کلاف i ام، $B_z(r, \varphi, \theta_r)$ مولفه اصلی (محوری) توزیع چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی در موقعیت θ_r از رتور، و $d\mathbf{s}(r, \varphi)$ مساحت المان دیفرانسیلی مربوطه است. با در نظر داشتن توزیع هادیها در هر نصف کلاف، توزیع ۲ بعدی تابع دور کلاف i ام در شکل (۵-الف) نشان داده شده است. شار پیوندی با سایر کلاف ها از طریق ایجاد شیفت مکانی مناسب در نتایج بدست آمده در (۱۷) حاصل می شود. در نهایت، شار پیوندی با یک فاز استاتور از طریق اعمال اصل



الف- مولفه محوری (r=125 mm)

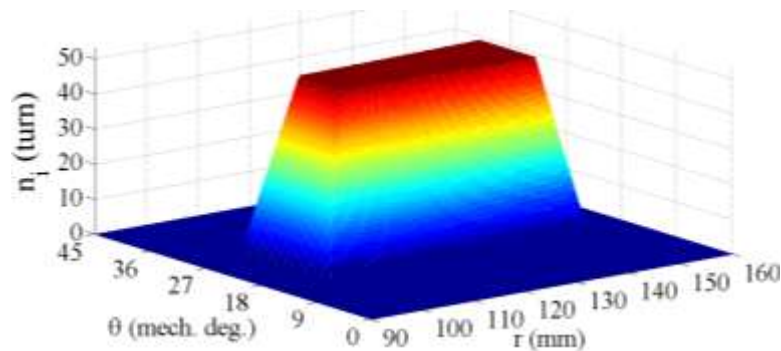


ب- مولفه شعاعی (r=101 mm)

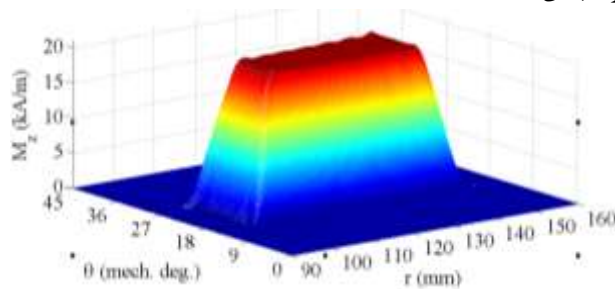
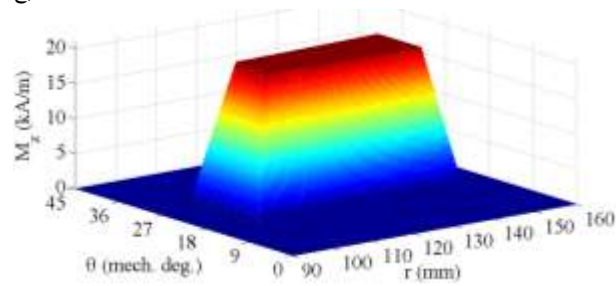


ب- مولفه مماسی (r=125 mm)

شکل ۴- مولفه های چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی در بی باری

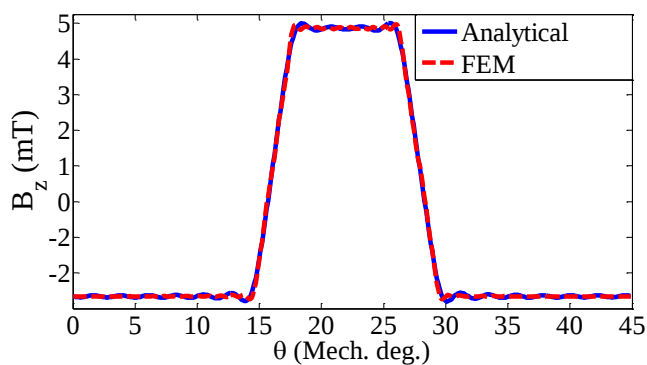


الف- تابع دور ۲ بعدی

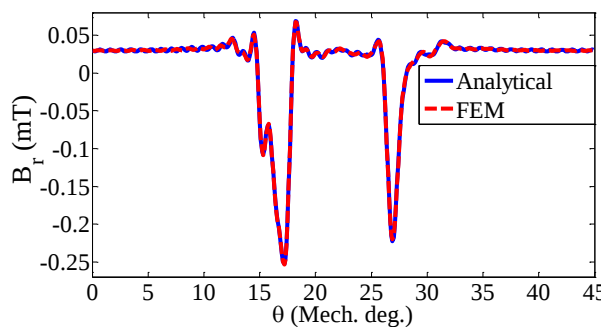
پ- توزیع تقریبی M_z ب- توزیع واقعی M_z

شکل ۵- مشخصه های ۲ بعدی یک کلاف و PM مجازی معادل آن

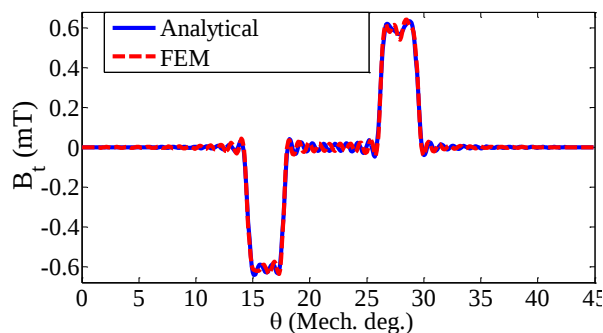
در (۱۹)، $n_A(r, \theta)$ توزیع ۲ بعدی تابع دور فاز A ، و مغناطیسی فاصله هوایی ناشی از تحریک مناسب فازهای $B_z(r, \varphi)$ توزیع ۲ بعدی مولفه محوری چگالی شار مربوطه است.



الف- مولفه محوری

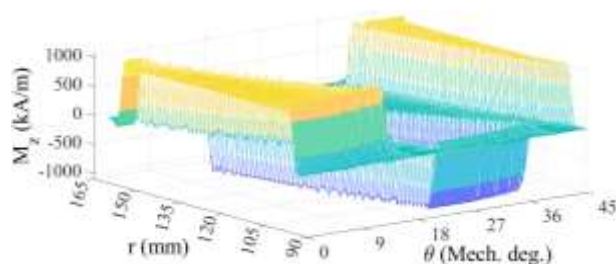


پ- مولفه شعاعی

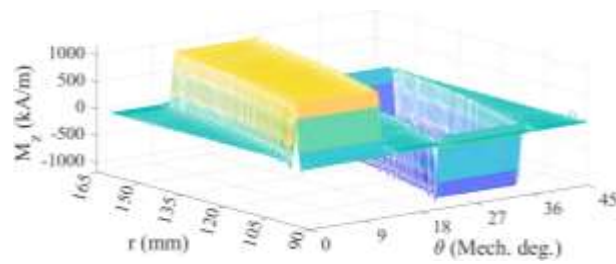


ب- مولفه مماسی

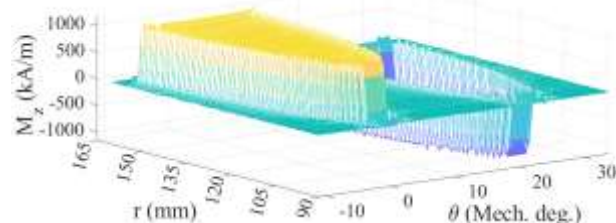
شکل ۶- چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی ناشی از فقط $I_A=1(A)$ در $r=125(mm)$



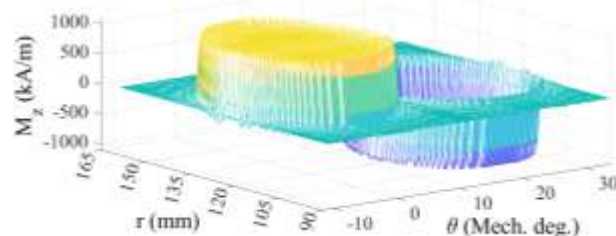
ب- PM های مستطیلی مورب شده



الف- PM های دوزنقه ای مورب شده



ت- PM های سینوسی شکل

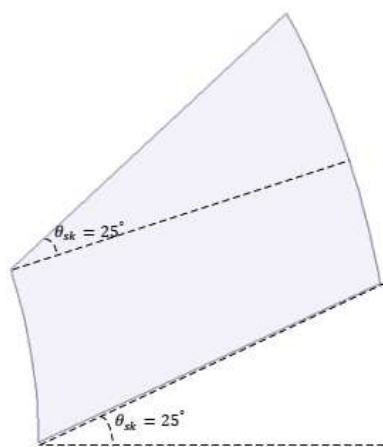


پ- PM های دایره ای شکل

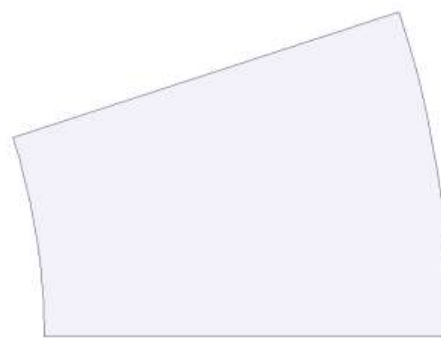
شکل ۷- توزیع های تقریبی M_z برای شکل های مختلف PM

متقابل تابعی از فرکانس نیز خواهند بود [۲۲]. در ادامه در خصوص ماشین AFPM تحت بررسی، با در نظر گرفتن شکل های مختلف برای قطب های PM بدون تغییر در مساحت هر PM (در صفحه $r - \theta$ در دستگاه مختصات استوانه ای) و همچنین با ثابت نگهداشتن ضخامت PM ها در راستای محور Z ، شار پیوندی با فاز استاتور محاسبه می شود.

همان طور که در رابطه (۱۹) مشاهده می شود، به علت بدون شیار بودن هندسه رتور و استاتور و نادیده گرفتن اثر اشباع مغناطیسی در هسته های استاتور و رتور از ماشین AFPM تحت بررسی، مقادیر ثابتی برای اندوکتانس های خودی و متقابل بدست آمده است. لازم به ذکر است که تحت شرایط در نظر گرفتن مشخصه مغناطیس شوندگی واقعی برای هسته های استاتور و رتور، مقدار اندوکتانس های خودی و



ب- PM مورب شده

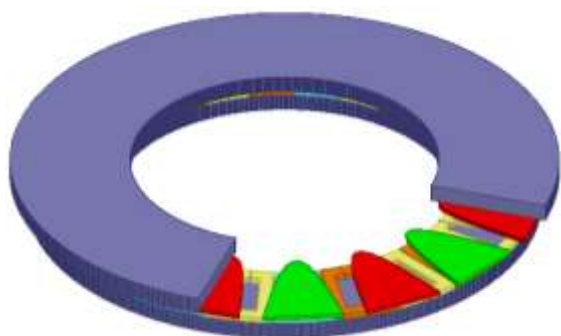


الف- PM مورب نشده

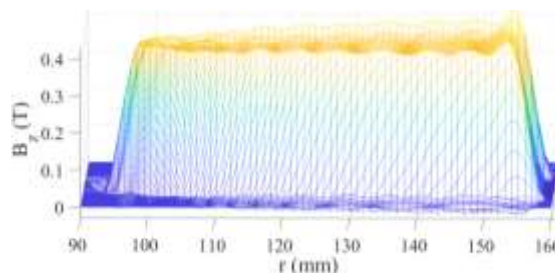
شکل ۸- PM با اثر مورب سازی و بدون آن

مساحت PM ها در صفحه $r - \theta$ تغییر نمی کند. با ثابت نگه داشتن مساحت سطح و ضخامت PM ها، شار پیوندی با فاز استاتور از ماشین AFPM بدون شیار با در نظر داشتن شکل های مختلف برای PM ها در شکل (۹) نشان داده می شوند.

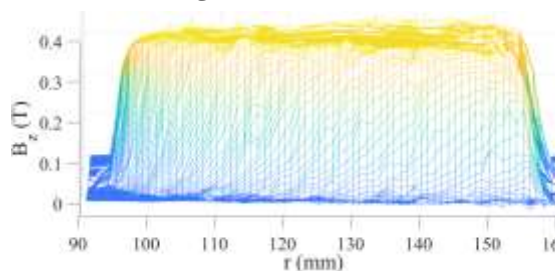
توزیع تقریبی مغناطیس شوندگی برای قطب های PM با در نظر داشتن شکل های مختلف و اثر مورب سازی، بدست آمده از (۱۳)، در شکل (۷) نشان داده می شوند. نمایی ۲ بعدی از یک PM دوزنقه ای مورب شده و بدون اثر مورب سازی در شکل (۸) نشان داده می شود. همان طور که در شکل (۸) مشاهده می شود، ناشی از اثر مورب سازی،



شکل ۱۰- مدل FEM بهینه در نرم افزار ماکسول

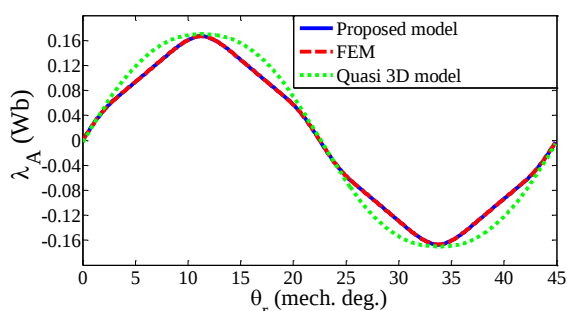


الف - نتیجه تحلیلی



ب - نتیجه FEM

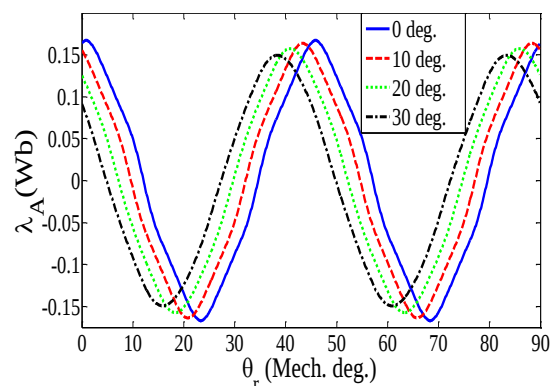
شکل ۱۱- نمایش ۲ بعدی Bz



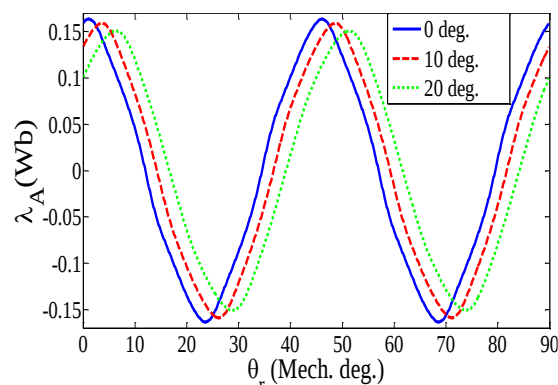
شکل ۱۲- مقایسه مدل پیشنهادی با مدل شبه ۳ بعدی

نتایج بدست آمده از جدول ۲ به شرح زیر ارائه می شوند:

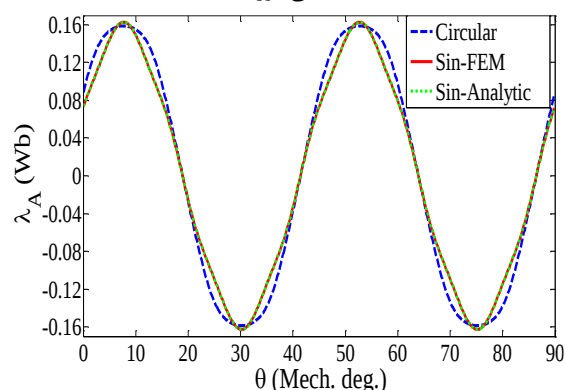
- (۱) مولفه اصلی شار پیوندی با فاز استاتور در اثر مورب سازی قطب های PM کاهش می یابد.
- (۲) در خصوص ماشین AFPM بدون شیار با PM های دایره ای شکل، شار پیوندی با فاز استاتور دارای بالاترین مقادیر برای مولفه اصلی و بیشترین مقدار THD است.



الف- PM دوزنقه ای مورب شده



ب- PM مستطیلی مورب شده



پ- سایر شکل ها

شکل ۹- شار پیوندی با فاز استاتور

همانطور که در شکل (۹-پ) مشاهده می شود، برای ماشین AFPM با PM های سینوسی شکل، شار پیوندی با فاز استاتور بدست آمده از مدل تحلیلی ۳ بعدی به خوبی از طریق مقایسه با نتیجه نظیر بدست آمده از FEM ۳ بعدی تایید و راستی آزمایی می شود. تحت این شرایط، مقایسه دقیق نتایج شار پیوندی با فاز استاتور بر حسب آنالیز فوریه و شاخص THD، در جدول ۲ ارائه شده است. لازم به ذکر است که مقدار ماکزیمم مجاز زاویه مورب سازی برای PM های دوزنقه ای و مستطیلی شکل به ترتیب ۳۰ و ۲۵ درجه می باشد.

جدول ۲- نتایج آنالیز شار پیوندی

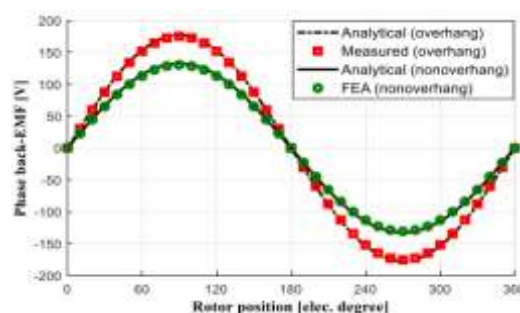
THD	مولفه اصلی	زاویه مورب سازی	شکل PM
۵/۲۴ %	۰/۱۵۵۵ وبر	۰ درجه	دوزنقه ای
۵/۱۱ %	۰/۱۵۴۸ وبر	۵ درجه	
۴/۵۹ %	۰/۱۵۴۱ وبر	۱۰ درجه	
۳/۸۹ %	۰/۱۵۲۸ وبر	۱۵ درجه	
۳/۱۳ %	۰/۱۵۱۲ وبر	۲۰ درجه	
۲/۴۸ %	۰/۱۴۸۸ وبر	۲۵ درجه	
۲/۰۵ %	۰/۱۴۶۲ وبر	۳۰ درجه	
۴/۲۵ %	۰/۱۵۴۵ وبر	۰ درجه	مستطیلی
۳/۸۸ %	۰/۱۵۳۶ وبر	۵ درجه	
۳/۵۴ %	۰/۱۵۲۱ وبر	۱۰ درجه	
۳/۳۷ %	۰/۱۴۹۷ وبر	۱۵ درجه	
۳/۴۲ %	۰/۱۴۶۱ وبر	۲۰ درجه	
۳/۵۱ %	۰/۱۴۱۶ وبر	۲۵ درجه	
۵/۵ %	۰/۱۶۹۱ وبر	-	دایره ای
۳/۹ %	۰/۱۵۴۸ وبر	-	سینوسی

استاتور دارای کمترین مقدار THD است.

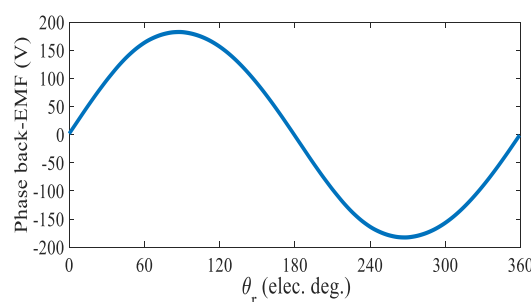
۴) ماشین AFPM با PM های دوزنقه ای مورب شده نسب به حالتی که از PM های مستطیلی مورب شده استفاده می کند دارای نتایج بهینه تری برای شار پیوندی با فاز استاتور خواهد بود.

۵) در مجموع بهینه ترین نتایج برای شار پیوندی با فاز استاتور در حالتی حاصل می شود که ماشین AFPM بدون شیار از PM های سینوسی شکل استفاده کند.

در خصوص ماشین AFPM بدون شیار آنالیز شده، مدل FEM ۳ بعدی با PM های سینوسی شکل در نرم افزار Maxwell 14.0 در شکل ۱۰ نشان داده شده است. لازم به ذکر است در این مدل FEM ۳ بعدی از شرط مرزی insulating استفاده شده است، تعداد کل المان های مش برابر ۲۵۹۴۳۲، و در تکرار شماره ۴ نتایج مدل همگرا می شوند. برای این مدل از ماشین AFPM بدون شیار، قابلیت و دقت مدل تحلیلی ۳ بعدی پیشنهادی برای در نظر گرفتن اثرات لبه ای در شکل (۱۱) نشان داده شده و با نتایج FEM ۳ بعدی راستی آزمایی شده است.



الف- نتیجه عملی [۲۰]



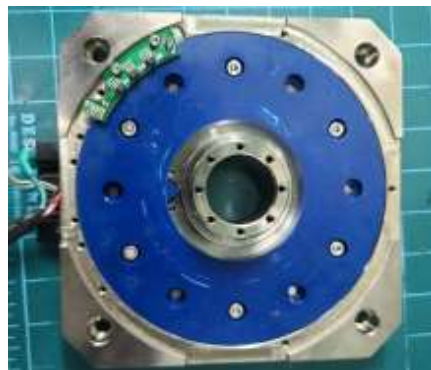
ب- نتیجه تحلیلی حاصل از مدل پیشنهادی

شکل ۱۳- راستی آزمایی با نتیجه عملی در ۳۰۰۰ دور بر دقیقه

۳) برای حالتی که از PM های دوزنقه ای شکل با زاویه مورب سازی ۳۰ درجه استفاده شده است، شار پیوندی با فاز



(ب) دیسک رتور با قطب های آهنربایی



(الف) دیسک استاتور با کلاف های مسی قالب گیری شده در اپوکسی



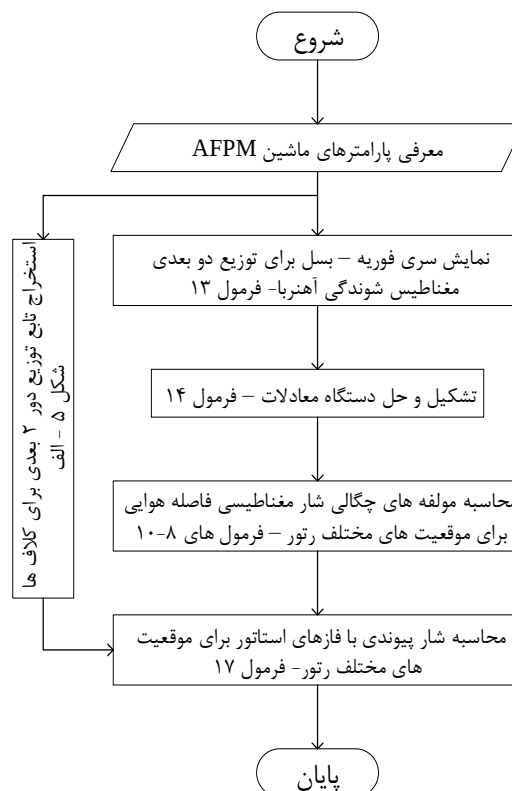
(ت) آزمایش بی باری



(پ) ساختار کلی

شکل ۱۴- ماشین AFPM بدون شیار ساخته شده در [۲۴]

در مرجع [۲۳] برای یک ماشین AFPM بدون هسته استاتور، از یک مدل شبه ۳ بعدی بر پایه روش هیگ برای محاسبه مولفه اصلی چگالی شار مغناطیسی فاصله هوایی استفاده شده است. دقت بالای مدل تحلیلی ۳ بعدی پیشنهاد شده در این مقاله در مقایسه با مدل شبه ۳ بعدی ارائه شده در [۲۳]، در شکل (۱۲) نشان داده می شود. به منظور راستی آزمایی با نتایج عملی، مدل تحلیلی ۳ بعدی ارائه شده در این مقاله روی ماشین AFPM بدون شیار ساخته شده در [۲۴] اجرا می شود. مقایسه نتیجه تحلیلی ولتاژ القاء شده در فاز استاتور (شکل ۱۳-ب) با نتیجه عملی نظیر در شکل (۱۳-الف) (با در نظر گرفتن ناحیه انتهای سیم بندی)، دقت بالای مدل تحلیلی ۳ بعدی ارائه شده در این مقاله را نشان می دهد. نمایی از بخش های مختلف ماشین AFPM بدون شیار ساخته شده در [۲۴] و اتصالات آزمایش بی باری، در شکل (۱۴) نشان داده می شود. در پایان، فلوچارت کلی مربوط به روش تحلیلی ۳ بعدی ارائه شده به منظور محاسبه شار پیوندی با فازهای استاتور برای موقعیت های مختلف رتور- فرمول ۱۷



شکل ۱۵- فلوچارت کلی روش تحلیلی ارائه شده

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک مدل تحلیلی ۳ بعدی سریع و جدید بر پایه پتانسیل مغناطیسی اسکالر برای آنالیز الکترومغناطیسی ماشین های AFPM بدون شیار ارائه شد. در این روش، هندسه ماشین به چندین ناحیه تقسیم شد و معادله لاپلاس در ناحیه فاصله هوایی به منظور محاسبه مولفه های میدان مغناطیسی فاصله هوایی حل شد. به منظور لحاظ کردن اثرات ناشی از شکل PM ها و مورب سازی، توزیع ۳ بعدی مغناطیس شونده PM ها بر حسب سری فوریه - بسط بیان شد. به همین خاطر، جواب عمومی معادله لاپلاس نیز بر حسب سری فوریه - بسط بیان شد. مدل تحلیلی ارائه شده برای محاسبه شار پیوندی با فازهای استاتور با در نظر داشتن شکل های مختلف برای PM ها و همچنین با لحاظ کردن اثر مورب سازی استفاده شد. همچنین نشان داده شد که اثر مورب سازی PM ها در ماشین های AFPM همزمان با سینوسی تر کردن شار پیوندی با فازهای استاتور تا حدودی نیز منجر به کاهش دامنه مولفه اصلی آن نیز می شود. در حالت کلی این نتیجه را می توان گرفت که در حالتی که ماشین AFPM بدون شیار از PM های سینوسی شکل استفاده می کند، بهینه ترین نتیجه برای شار پیوندی با فاز های استاتور حاصل می شود به این صورت که همزمان دارای دامنه مولفه اصلی

بالا و مقدار کم برای THD است. در کارهای انجام شده در آینده، امکان توسعه این مدل تحلیلی ۳ بعدی به منظور در نظر گرفتن اثر شیار وجود دارد.

تقدیر و تشکر

بدین وسیله از مجموعه دانشگاه لرستان به خاطر حمایت از نویسندگان کمال تشکر و سپاس را دارم.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می کنند که در مورد انتشار این مقاله تعارض منافع وجود ندارد.

تاییدیه اخلاقی

نویسندگان متعهد می شوند که مطالب این مقاله را در هیچ مجله دیگری به چاپ نرسانده اند.

مشارکت های نویسندگان

فرهاد رضائی علم: مرور مقالات گذشته، انجام شبیه

سازی های تحلیلی، تحلیل نتایج، و نگارش مقاله

مجتبی حسینی: انجام شبیه سازی های عددی، و کمک

در نگارش مقاله

منابع مالی

منابع مالی مورد نیاز توسط دانشگاه لرستان تامین شده است.

مراجع

- [1] Liu, Ye, Zhuoran Zhang, Chen Wang, Weiwei Geng, and Tao Yang. "Design and analysis of oil-immersed cooling stator with nonoverlapping concentrated winding for high-power ironless stator axial-flux permanent magnet machines." IEEE Transactions on Industrial Electronics 68, no. 4 (2021): 2876-2886.
- [2] Taran, Narges, Vandana Rallabandi, Greg Heins, and Dan M. Ionel. "Coreless and conventional axial flux permanent magnet motors for solar cars." IEEE Transactions on Industry Applications 54, no. 6 (2018): 5907-5917.
- [3] Chan, T. F., Weimin Wang, and L. L. Lai. "Performance of an axial-flux permanent magnet synchronous generator from 3-D finite-element analysis." IEEE Transactions on Energy Conversion 25, no. 3 (2010): 669-676.
- [4] Talebi, Dorsa, Matthew C. Gardner, Sri Vignesh Sankarraman, Ahmad Daniar, and Hamid A. Toliyat. "Electromagnetic design characterization of a dual rotor Axial Flux Motor for electric aircraft." IEEE Transactions on Industry Applications 58, no. 6 (2022): 7088-7098.
- [5] Ajily, Ehsan, Karim Abbaszadeh, and Mohammad Ardebili. "Three-dimensional field reconstruction method for modeling axial flux permanent magnet machines." IEEE Transactions on Energy Conversion 30, no. 1 (2015): 199-207.
- [6] Cheng, Wenjie, Guangdong Cao, Zhikai Deng, and Ling Xiao. "Torque comparison between slotless and slotted ultra-high speed AFPM motors using analytical method." IEEE Transactions on Magnetics 58, no. 2 (2022).
- [7] Parviainen, A., M. Niemelä, and J. Pyrhönen. "Modeling of axial flux permanent-magnet machines." IEEE Transactions on Industry Applications 40, no. 5 (2004): 1333-1340.

- [8] Zhao, Hang, K. T. Chau, Tengbo Yang, Zaixin Song, and Chunhua Liu. "A novel quasi-3D analytical model for axial flux motors considering magnetic saturation." *IEEE Transactions on Energy Conversion* 37, no. 2 (2022): 1358-1368.
- [9] Lubin, Thierry, and Abderrezak Rezzoug. "3-D Analytical model for axial-flux eddy-current couplings and brakes under steady-state conditions." *IEEE Transactions on Magnetics* 51, no. 10 (2015).
- [10] Taghipour Boroujeni, Samad, Abdolmajid Abedini Mohammadi, Ashknaz Oraee, and Hashem Oraee. "Approach for analytical modelling of axial-flux PM machines." *IET Electric Power Applications* 10, no. 6 (2016): 441-450.
- [11] Si, Jikai, Meng Huang, Rui Nie, Chun Gan, and Yaofei Han. "Inductance calculation and analysis of axial-flux slotless surface-mounted permanent magnet machine with equidirectional toroidal winding." *IEEE Transactions on Energy Conversion* 39, no. 3 (2024): 1509-1519.
- [12] Tong, Wenming, Deyi Cai, and Shengnan Wu. "An improved subdomain model for optimizing electromagnetic performance of AFPM machines." *IEEE Transactions on Industry Applications* 60, no. 6 (2024): 8745-8754.
- [13] Guo, Baocheng, Zakarya Djelloul-Khedda, and Frédéric Dubas. "Nonlinear analytical solution in axial flux permanent magnet machines using scalar potential." *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 71, no. 4 (2024): 3383-3393.
- [14] Kano, Yoshiaki, Takashi Kosaka, and Nobuyuki Matsui. "A simple nonlinear magnetic analysis for axial-flux permanent-magnet machines." *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57, no. 6 (2010): 2124-2133.
- [15] Hemeida, Ahmed, Antti Lehtikainen, Pavvo Rasilo, Hendrik Vansompel, Anouar Belahcen, Antero Arkkio, and Peter Sergeant. "A simple and efficient quasi-3D magnetic equivalent circuit for surface axial flux permanent magnet synchronous machines." *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 66, no. 11 (2019): 8318-8333.
- [16] Taqavi, Omolbanin, and Nasim Taghavi. "Development of a mixed solution of maxwell's equations and magnetic equivalent circuit for double-sided axial-flux permanent magnet machines." *IEEE Transactions on Magnetics* 57, no. 4 (2021).
- [17] Sung, So-Young, Jae-Hoon Jeong, Yu-Seop Park, Jang-Young Choi, and Seok-Myeong Jang. "Improved analytical modeling of axial flux machine with a double-sided permanent magnet rotor and slotless stator based on an analytical method." *IEEE Transactions on Magnetics* 48, no. 11 (2012): 2945-2948.
- [18] Deng, Wenzhe, and Shuguang Zuo. "Analytical modeling of the electromagnetic vibration and noise for an external rotor axial flux in-wheel motor." *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 65, no. 3 (2018): 1991-2000.
- [19] Alipour-Sarabi, Ramin, Zahra Nasiri-Gheidari, and Hashem Oraee. "Development of a three-dimensional magnetic equivalent circuit model for axial flux machines." *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 67, no. 7 (2020): 5758-5767.
- [20] Okita, Taishi, and Hisako Harada. "3-D analytical model of axial-flux permanent magnet machine with segmented multipole-halbach array." *IEEE Access* 11 (2023): 2078-2091.
- [21] Diao, Chengwu, Wenliang Zhao, Longxuan Li, Sunil Kumar, and Byung-II Kwon. "Analytical calculation of slotless axial flux permanent magnet motor with sinusoidal magnets for torque ripple reduction." *IEEE Transactions on Magnetics* 60, no. 12 (2024).
- [22] Alatawneh, Natheer, and P. Pillay. "Rotational Core Loss and Permeability Measurements in Machine Laminations with Reference to Permeability Asymmetry." *IEEE Transactions on Magnetics* 48, no. 4 (2012): 1445-1448.
- [23] Frank, Zdenek and Jan Laksar. "Analytical design of coreless Axial-Flux Permanent Magnet machine with planar coils." *IEEE Transactions on Energy Conversion* 36, no. 3 (2021): 2348-2357.
- [24] Min, Seun Guy. "Analytical design and optimization of Axial Flux Permanent Magnet machines with slotless structure." *IEEE Transactions on Transportation Electrification* 8, no. 2 (2022): 1994-2004.