



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

Grey Wolf Optimization with Inequality Constraints for Non-Convex Optimization with Application to Engineering Science

Somayeh Ebrahimzadeh^a, Seyed Kazem Alavipanah^{a,*}, Sara Attarchi^a, Vahid Mahboub^b

^a Department of Remote Sensing and GIS, Faculty of Geography, University of Tehran, Tehran, Iran

^b Department of Surveying Engineering, Faculty of Engineering, Golestan University, Aliabad Katoul, Iran

PAPER INFO

Paper history:

Received: 2024-07-15

Revised: 2025-03-14

Accepted: 2025-04-06

Keywords:

Non-convex problem;
Optimization;
Inequality constraints;
Grey wolf algorithm.

ABSTRACT

Here, an improved meta-heuristic method is proposed to solve one of the most challenging nonlinear problems known as non-convex problems. In this type of problem, we are faced with more than one minimum, all of which do not lead to the correct solution. This method is based on equipping the grey wolf meta-heuristic algorithm with inequality constraints. Although various forms of the grey wolf algorithm have been proposed in the last few years, none of them included inequality constraints, especially in the form presented here. The main advantage of the proposed algorithm in engineering applications is solving non-convex optimization problems where analytical methods may get stuck in a local minimum, while the aforementioned algorithm is located in a global minimum. With two mathematical test functions and one geodetic example, the efficiency of the proposed approach is evaluated.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2025.34751.2704>

© 2025 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: salavipa@ut.ac.ir

How to cite this article:

S. Ebrahimzadeh, S. K. Alavipanah, S. Attarchi and V. Mahboub, "Grey wolf optimization with inequality constraints for non-convex optimization with application to engineering science," Journal of Modeling in Engineering, 23 83 (2025): 145-155, doi: 10.22075/jme.2025.34751.2704

بهینه سازی گرگ خاکستری با قیود نامعین برای حل غیر محدب مسائل مهندسی

سمیه ابراهیم زاده^۱، سید کاظم علوی پناه^{۱*}، سارا عطارچی^۱، وحید محبوب^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۴/۲۵ بازنگری مقاله: ۱۴۰۳/۱۲/۲۴ پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷	در این مقاله یک روش فراابتکاری بهبود یافته برای حل یک نوع از چالش برانگیزترین مسائل غیرخطی موسوم به مسائل غیرمحدب پیشنهاد شده است. در این نوع از مسائل، ما با بیش از یک کمینه روبرو هستیم که همه ی آن ها منجر به جواب صحیح نمی شوند. این روش مبتنی بر تجهیز الگوریتم فراابتکاری گرگ خاکستری با قیود نامعین براساس روش دیپیلو و گریپو است. اگرچه اشکال مختلفی از الگوریتم گرگ خاکستری در چند سال اخیر ارائه شده اند، هیچ یک از آن ها قیود نامعین را به شکلی که در این جا ارائه می شود، در نظر نمی گیرند. مزیت اصلی الگوریتم پیشنهادی در کاربردهای مهندسی، حل مسائل بهینه سازی غیرمحدب است که در آن روش های تحلیلی ممکن است در کمینه محلی گیر کنند، در حالی که الگوریتم مذکور در کمینه ی جهانی به جواب می رسد. ضمناً در مقایسه ی با برخی روش های فراابتکاری شناخته شده، الگوریتم مذکور به تکرار کمتری نیاز دارد. با چهار تابع آزمون ریاضی و یک مثال ژئودتیکی، کارایی روش پیشنهادی ارزیابی می شود.

واژگان کلیدی:

مسئله ی غیر محدب،
قیود نامعین،
بهینه سازی،
الگوریتم گرگ خاکستری.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2025.34751.2704>

© 2025 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

۱- مقدمه

در علوم کاربردی و مهندسی بدست آوردن جواب بهینه حائز اهمیت می باشد. بهینه سازی به اشکال مختلف و روش های گوناگون می تواند حل شود. به شکل کلی می توان این مسائل را به دو دسته ی خطی و غیرخطی تقسیم نمود. حل مسائل بهینه سازی غیرخطی همواره یکی از چالش های علوم کاربردی و مهندسی بوده است. این مسائل زمانی چالشی تر می شوند که تابع هدف حاصل غیر محدب باشد. در سال های اخیر، تقاضای فزاینده ی برای درک مسئله ی غیر محدب و توسعه ی روش های محاسباتی برای بهینه سازی توابع غیر محدب وجود دارد. به عنوان مثال یکی از مدل های نسبتاً نوظهور در مهندسی، مدل EIV است که در آن ماتریس

ضرائب مدل تابعی نیز تصادفی می باشد و سبب غیر محدب شدن تابع هدف می شود. راجع به این مدل در قسمت مثال- های عددی بیشتر توضیح داده می شود. چنین مسائلی بیش از یک اکسترمم دارند که لزوماً اکسترمم مطلق یا جهانی نیست، و مشتق دوم آن ها همیشه مثبت نمی باشد. به عبارت دیگر، برای مسائل محدب، و به ویژه برای مسائل خطی، حل های محلی همان حل های جهانی هستند. با این حال، این امر برای بهینه سازی غیر محدب صادق نیست. مسائل غیرخطی کلی، چه قیددار چه بدون قید، ممکن است دارای حل های محلی باشند که الزاماً حل های جهانی نیستند. به طور سنتی روش های تحلیلی مبتنی بر مشتق به عنوان راه حلی برای مسائل بهینه سازی در نظر گرفته می شدند

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: salavipa@ut.ac.ir

۱. گروه سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۲. گروه مهندسی نقشه برداری، دانشکده مهندسی، دانشگاه گلستان، علی آباد کتول، ایران

استناد به این مقاله:

سمیه ابراهیم زاده، سید کاظم علوی پناه، سارا عطارچی و وحید محبوب، "بهینه سازی گرگ خاکستری با قیود نامعین برای حل غیر محدب مسائل مهندسی"، مدل سازی در مهندسی، ۸۳ (۱۴۰۴): ۱۴۵-۱۵۵، doi: 10.22075/jme.2025.34751.2704

در این مقاله، روش بهینه‌سازی گرگ خاکستری (GWO) را با قیود نامعین تجهیز می‌کنیم. GWO توسط [۴] پیشنهاد شد که از سلسله مراتب رهبری و مکانیسم شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت الهام گرفته شده بود. این روش عمده‌تاً شامل سلسله مراتب اجتماعی، احاطه بر طعمه و حمله به طعمه است. مطالعات اولیه نشان می‌دهد که الگوریتم GWO بسیار رقابتی است و می‌تواند از الگوریتم‌های مبتنی بر جمعیت موجود، مانند الگوریتم ژنتیک (GA)، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)، الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) و الگوریتم جستجوی گرانشی (GSA) بهتر عمل کند [۴].

الگوریتم گرگ خاکستری الزامات خاصی در تابع هدف ندارد. به عنوان مثال به ویژگی‌های ریاضی دقیق مسئله بهینه‌سازی بستگی ندارد. علاوه بر این، مکانیسم‌های آنها به راحتی قابل پیاده‌سازی است. مزایای دیگر این الگوریتم به همراه کاربردهای بیشتر آن در [۹، ۱۰، ۱۱] اشاره شده است.

مسائل بهینه‌سازی قیددار از مدل‌هایی ناشی می‌شوند که در آن قیود نقش اساسی دارند. این مدل با قیود نامعین را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۲]:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x), x \in R^n \\ & \text{subject to } c(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $f: R^n \rightarrow R$ تابع هدف است، $c: R^n \rightarrow R^d$ نشان دهنده قیود نامعین است، و جایی که $0 \leq$ به معنای نیمه معین منفی است. این مسئله از دهه‌ی ۱۹۹۰ به شدت مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها در بسیاری از کاربردها در کنترل خودکار، امور مالی، طراحی مهندسی و ژئودزی به وجود می‌آیند [۱۴، ۱۳]. قیود نامعین را می‌توان به روش‌های مختلف بر روی مسئله بهینه‌سازی اعمال کرد. در اوایل دهه ۱۹۹۰، روش‌های نقطه‌ای داخلی تنها راه واقعی برای حل (۱) در نظر گرفته می‌شدند، اما بعداً روش‌های دیگری از جمله بهینه‌سازی غیرهموار و مقدار ویژه [۱۵]، SDP متوالی [۱۶] و روش‌های لاگرانژی افزوده [۱۷] وارد صحنه شدند. [۱۸] چندین مدل لاگرانژی تقویت شده را مطالعه کرد و [۱۹] پلتفرم‌های PENNON و PENBMI را برای حل برنامه‌های نیمه معین خطی و دوخطی توسعه داد.

در این مقاله، ما قیود نامعین معادله (۱) را با روش لاگرانژی

و طیف وسیعی از آن‌ها با روش‌های تحلیلی حل می‌گردیدند. با این وجود، این روش‌ها در بسیاری از موارد در حل مسائل غیر محدب نمی‌توانند به بهینه جهانی برسند. بعدها با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر، روش‌های عددی رونق بیشتری یافت. به طور خاص، در دهه‌های اخیر، روش‌های فراابتکاری به عنوان ابزاری کارآمد در حل مسائل مختلف مهندسی توسعه یافته‌اند که مزایای عمده‌ای نسبت به روش‌های سنتی دارند [۱].

سادگی، انعطاف‌پذیری، مکانیسم بدون مشتق، و اجتناب از بهینه‌ی محلی دلایلی هستند که روش‌های فراابتکاری را بسیار محبوب می‌کنند. حتی برخی از آن‌ها مانند الگوریتم ژنتیک (GA) [۲] و بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها (ACO) [۳] در بین تمام علوم کاربردی کاملاً شناخته شده هستند. آن‌ها بیشتر از مفاهیم بسیار ساده الهام گرفته‌اند. روش‌های فراابتکاری به راحتی برای مسائل مختلف قابل استفاده هستند زیرا تنها ورودی و خروجی یک سیستم برایشان مهم است. همانطور که روش فراابتکاری مسائل را به صورت تصادفی بهینه می‌کند، مشتق‌های تابع هدف و قید مورد نیاز نیستند. ضمناً عملکرد قابل اعتماد و قوی، پیاده‌سازی آسان، و احتمال کمتر به دام افتادن توسط یک حداقل محلی از دیگر مزایای روش‌های مذکور هستند [۴].

روش‌های فراابتکاری متعددی پیشنهاد شده‌اند. به عنوان مثال، [۵] یک رویکرد لاگرانژی افزوده مبتنی بر الگوریتم ژنتیک را برای مقابله با مسائل بهینه‌سازی قیددار پیشنهاد کرد که در آن از یک روش بهینه‌سازی کلاسیک برای بهبود راه‌حل الگوریتم ژنتیک به دست آمده، استفاده می‌شود. علاوه بر این، یک استراتژی موثر برای به‌روزرسانی پارامترهای حیاتی به شیوه‌ای تطبیقی بر اساس آمار جمعیت ارائه شده است. یک الگوریتم جستجوی فاخته بر اساس روش جستجوی محلی Solis و Wets برای مسائل بهینه‌سازی جهانی قیددار توسط [۶] توسعه داده شد که بر یک تابع لاگرانژی اصلاح شده برای اعمال قید تکیه دارد. [۷] یک الگوریتم جدید کلنی زنبورهای مصنوعی (ABC) را برای مسائل بهینه‌سازی قیددار ارائه کرد که در آن از دو عملگر جستجوی ABC اصلاح شده مختلف در فازهای بکارگیری و ناظر استفاده می‌شود، و عملگر متقاطع در فاز جستجو به جای جستجوی تصادفی استفاده می‌شود. [۸] یک الگوریتم بهبود یافته بهینه‌سازی باکتریایی (BFO) را برای حل مسائل بهینه‌سازی قیددار ایجاد کرد.

تصادفی در محدوده‌ی $[0, 1]$ و اجزای بردار $\vec{a}$ به صورت خطی از ۲ به ۰ در طول مسیر به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$a = 2 - 2 \frac{t}{\text{Max_iter}} \quad (6)$$

که در آن Max_iter حداکثر تکرار است. پس از یافتن موقعیت طعمه توسط گرگ‌های خاکستری که آن را محاصره می‌کنند، می‌توان چنین رفتاری را به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \vec{X}_\alpha - \vec{X}| \quad (7)$$

$$\vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \vec{X}_\beta - \vec{X}| \quad (8)$$

$$\vec{D}_\delta = |\vec{C}_3 \vec{X}_\delta - \vec{X}| \quad (9)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1(\vec{D}_\alpha), \quad \vec{X}_2 = \vec{X}_\beta - \vec{A}_2(\vec{D}_\beta), \\ \vec{X}_3 = \vec{X}_\delta - \vec{A}_3(\vec{D}_\delta) \quad (10)$$

$$\vec{X}(t+1) = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3} \quad (11)$$

در این جا $\vec{X}_\alpha$ ، $\vec{X}_\beta$ و $\vec{X}_\delta$ به ترتیب بردارهای موقعیت گرگ های α ، β و δ هستند، $\vec{A}_i$ و $\vec{C}_i$ مشابه $\vec{A}$ و $\vec{C}$ تولید می‌شوند.

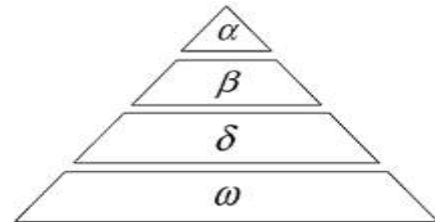
۳- الگوریتم جدید گرگ خاکستری با قیود نامعین (ICGWO)

الگوریتم‌های فراابتکاری، تکنیک‌های بهینه‌سازی بدون قیدی هستند که به مکانیسم‌های اضافی برای مقابله با قیود هنگام حل مسائل بهینه‌سازی قیددار نیاز دارند. همانطور که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، تکنیک‌های محاسباتی تکاملی متعددی برای مسائل بهینه‌سازی قیددار توسعه داده شده‌اند. در اینجا ما قیود معادله (۱) را با روش لاگرانژی افزوده تحمیل می‌کنیم که توسط [۲۰] اثبات شد، زیرا بهینه‌سازی غیرخطی (۱) با قیود نامعین را به یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر تبدیل می‌کند که کمینه‌های بدون قید آن، برای مقدار متناهی ضریب جریمه $1/\epsilon$ ، منجر به حل مسئله‌ی قیددار می‌شود و شرایط کوهن تاکر لازم را برای این مسئله برقرار می‌کند که بیشتر مربوط به یک نقطه کمینه از یک تابع لاگرانژی افزوده جدید است تا یک نقطه‌ی میانی در حالت کلاسیک. در نتیجه می‌توان برای حل این مسئله از تکنیک‌های کمینه‌سازی بدون قید استاندارد

افزوده توسعه یافته توسط [۲۰] اعمال می‌کنیم. مزایای آن در بخش ۳ مورد بحث قرار می‌گیرد. بقیه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲ مفاهیم الگوریتم GWO مرور می‌شود، سپس روش فراابتکاری بهبود یافته مورد نظر در بخش ۳ توسعه می‌یابد. سرانجام در بخش ۴، کارایی الگوریتم پیشنهادی را با چهار تابع آزمون ریاضی و یک کاربرد مهندسی نقشه‌برداری بررسی می‌کنیم. در نهایت مقاله را در بخش ۵ جمع‌بندی می‌کنیم.

۲- بهینه‌سازی گرگ خاکستری

الگوریتم فراابتکاری گرگ خاکستری (GWO) توسط [۴] برای بهینه‌سازی مسائل کاربردی مختلف ارائه گردید و از سلسله مراتب رهبری و مکانیسم شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت الهام گرفته شده است. برای مشاهده‌ی این سلسله مراتب به شکل (۱) مراجعه شود. بهترین راه حل به عنوان α که رهبر گروه گرگ‌های خاکستری است، مشخص شده است. دومین راه حل برتر به عنوان β مشخص می‌شود که به α در تصمیم‌گیری کمک می‌کند و همچنین بهترین نامزد در صورت فوت یا پیر شدن α می‌باشد. راه حل سوم با عنوان δ و بقیه راه حل‌ها با ω علامت گذاری می‌شوند.



شکل ۱- سلسله مراتب گرگ‌های خاکستری

با توجه به این طبقه‌بندی، GWO شامل دو بخش محاسباتی اصلی است: ۱. احاطه کردن طعمه، ۲. حمله به طعمه. بر اساس [۳] احاطه کردن طعمه به شرح زیر است:

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A}\vec{D} \quad (2)$$

$$\vec{D} = |\vec{C}\vec{X}_p(t) - \vec{X}(t)| \quad (3)$$

$$\vec{A} = 2a\vec{r}_1 - \vec{a} \quad (4)$$

$$\vec{C} = 2\vec{r}_2 \quad (5)$$

جایی که $\vec{X}$ و $\vec{X}_p$ به ترتیب بردارهای موقعیت طعمه و گرگ خاکستری را نشان می‌دهند، t نشان دهنده تکرار فعلی است، $\vec{A}$ و $\vec{C}$ بردارهای ضریب هستند، $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ بردارهای

۴- مثال‌های عددی

در این بخش چهار تابع تست و یک مثال ژئودتیک را برای ارزیابی کارایی الگوریتم ICGWO انتخاب می‌کنیم. توجه داشته باشید که می‌توانیم چندین مثال عددی را برای این منظور انتخاب کنیم، اما با توجه به هدف اصلی این مقاله که بررسی الگوریتم مورد نظر در حل مسائل غیر محدب است، هر پنج مثال به گونه‌ای انتخاب شدند که کمینه محلی هم داشته باشند، نه لزوماً کمینه جهانی. به ویژه برخی از این نمونه‌ها دارای چندین کمینه محلی هستند. در تمام این مثال‌ها، الگوریتم ICGWO با روش تحلیلی مبتنی بر مشتق و دو روش فراابتکاری PSO و تبرید شبیه‌سازی شده (SA) [۲۱] مقایسه شده است. ضمناً جهت بررسی حساسیت قیود نامعین در حل مسئله، در حالت بدون اعمال قید نیز مثال‌ها با GWO حل می‌گردند. در همه مثال‌ها، کمینه‌ی مقدار تابع هدف، ملاک انتخاب راه حل صحیح است. همچنین لازم به ذکر است که برای نشان دادن تابع هدف سه بعدی، مسئله‌ای را انتخاب کردیم که دو مجهول دارد، در حالی که می‌توان هر مسئله غیرخطی دلخواه را با تعداد متفاوت پارامترهای مجهول در نظر گرفت.

۴-۱- توابع تست

برای ارزیابی رویکردهای جدید در طراحی و تحلیل روش‌های فراابتکاری می‌توان از توابع آزمون ریاضی مختلفی استفاده کرد که به عنوان مثال در [۲۲] یافت می‌شوند. چهار تابع ریاضی انتخاب شد که ویژگی اصلی آن‌ها داشتن تعداد زیادی کمینه محلی است و روش‌های تحلیلی مبتنی بر مشتق ممکن است در درون آن‌ها گیر کرده و آن‌ها را به اشتباه کمینه‌های جهانی در نظر بگیرند. توجه داشته باشید که به دلیل پیچیدگی این توابع تست، روش‌های شناخته شده تحلیلی برای آن‌ها قابل اجرا نیست. اولین تابع Easom است که با فرمول زیر ارائه می‌شود:

$$f(x_1, x_2) = -\cos(x_1) \cos(x_2) \exp((x_1 - \pi)^2 - (x_2 - \pi)^2) \quad (15)$$

که در آن x_1 و x_2 دو پارامتر مجهول هستند. این تابع چندین کمینه محلی دارد. کمینه‌ی جهانی دارای ناحیه‌ی کوچکی نسبت به فضای جستجو است و معمولاً در بازه ارزیابی $\forall i \in \{1, 2\}$ به ازای $X_i \in [-100, 100]$ می‌شود. شکل (۲) را ببینید. قیود نامعین را می‌توان $0 < X_i < 5$ در نظر گرفت.

استفاده کرد [۲۰]. بر اساس این یافته، ما ICGWO را به دلیل برتری بهینه‌سازی گرگ خاکستری پیشنهاد می‌کنیم. [۲۰] ثابت کرد که مسئله بهینه‌سازی (۱) با قیود نامعین را می‌توان به تابع لاگرانژی افزوده زیر تبدیل کرد:

$$T(x, \lambda; \epsilon) \triangleq f(x) + (1/\epsilon) \|c(x)\|^2 + \lambda^T c(x) + \eta \|J(x) \nabla_x L(x, \lambda)\|^2 - \sum_{i=1}^d \{[\min(0, w_i(x, \lambda; \epsilon))]^2 / [\epsilon(1 + 16\epsilon\eta\lambda_i^2)]\} \quad (12)$$

که در آن $J(x)$ ماتریس ژاکوبین قیود $c(x)$ است، ϵ و η ثابت‌های مثبت هستند. $\nabla_x L(x, \lambda)$ و w_i توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + J^T(x) \lambda \quad (13)$$

$$w_i(x, \lambda; \epsilon) \triangleq [2c_i(x) + \epsilon(\lambda_i + 8\eta\lambda_i a_i(x) \nabla_x L(x, \lambda))] / 2 \quad (14)$$

که در آن $\nabla f(x)$ گرادیان $f(x)$ و $j_i(x)$ سطر i ام ماتریس $J(x)$ است. بنابراین، می‌توانیم مسئله بهینه‌سازی غیرخطی را با قیود نامعین به وسیله‌ی الگوریتم ICGWO زیر حل کنیم:

مرحله ۱: توابع $f(x)$ و $c(x)$ را با توجه به معادله (۱) وارد کنید.

مرحله دوم: پارامترهای $\vec{A}$ ، $\vec{C}$ ، a ، ϵ و η را مقداردهی کنید.

مرحله سوم: $\nabla_x L(x, \lambda)$ و w_i را با معادلات (۱۳) و (۱۴) محاسبه کنید.

مرحله چهارم: تابع هدف (۱۲) را شکل دهید.

مرحله پنجم: مقدار تابع هدف هر عامل جستجو را محاسبه کنید

گام ششم: بهترین حل‌های $\vec{X}_\alpha$ ، $\vec{X}_\beta$ و $\vec{X}_\delta$ را بیابید

مرحله هفتم: موقعیت گرگ خاکستری فعلی را با معادله (۱۱) به روز کنید.

مرحله هشتم: $\vec{A}$ ، $\vec{C}$ و a را به روز کنید.

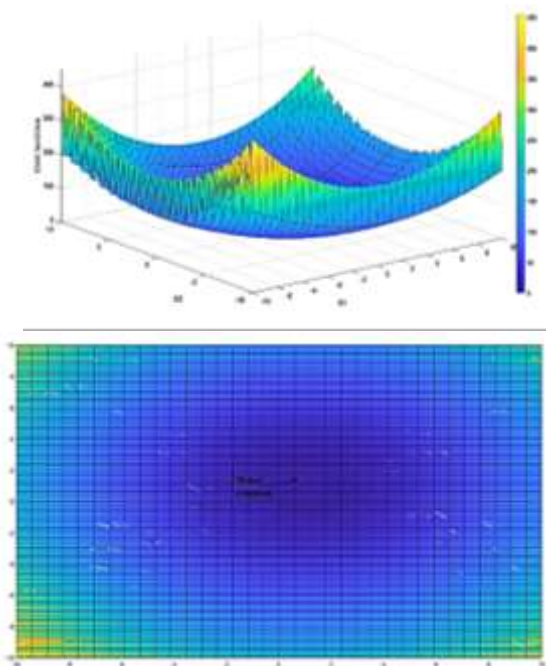
مرحله نهم: با توجه به حد دقت داده شده، مراحل ۵ تا ۸ را به صورت تکراری انجام دهید.

جدول ۱- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع Easom

Method	x_1	x_2	Cost function
Analytical solution	-1.5707	-1.5707	-1.18×10^{-105}
ICGWO algorithm	3.1497	3.1413	0.963
GWO solution	-1.5715	-1.5716	-5.3×10^{-11}
PSO solution	3.1496	3.1413	0.961
SA solution	3.1492	3.1412	0.958
True solution	π	π	-1

دومین تابع تست ریاضی LevyN13 است که معادله آن به همراه شکل و موقعیت کمینه‌ی جهانی به شرح زیر است. شکل (۴) را ببینید:

$$f(x_1, x_2) = \sin^2(3\pi x_1) + (x_1 - 1)^2[1 + \sin^2(3\pi x_2)] + (x_2 - 1)^2[1 + \sin^2(3\pi x_1)] \quad (16)$$

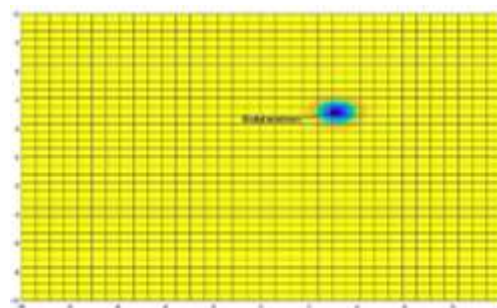
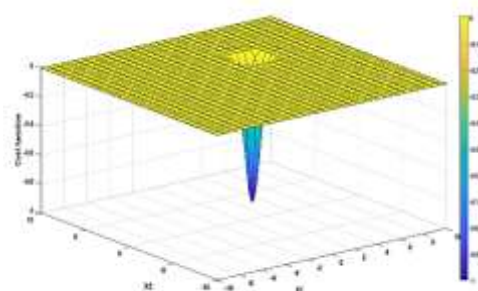


شکل ۴- تابع LevyN13 و موقعیت کمینه‌ی جهانی

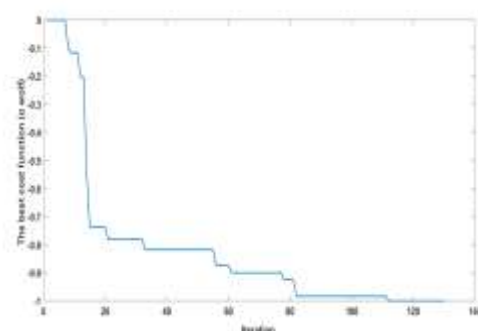
عملیات محاسباتی و نتایج مشابهی برای تابع LevyN13 در جدول ۲ و شکل (۵) ارائه شده است که در آن قیود نابرابری با $0.5 < X_i < 1.5$ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است تکرارهای ICGWO، PSO و SA به ترتیب برابر ۱۱۱، ۳۹۱ و ۱۲۰۱ می‌باشند.

نتایج الگوریتم ICGWO، حل تحلیلی، الگوریتم‌های GWO بدون قید، PSO و SA و حل صحیح علاوه بر مقدار تابع هدف در جدول (۱) آورده شده‌اند. با توجه به این جدول می‌توان دریافت که الگوریتم ICGWO توانسته است به خوبی به کمینه‌ی جهانی نزدیک شود و روش تحلیلی در کمینه‌ی محلی گیر کرده است. ضمن اینکه در حالت بدون قید حل GWO نیز در کمینه‌ی محلی قرار گرفته است، در حالی که با اعمال قید نامعین در ICGWO این مشکل رفع شده است. نکته‌ی دیگر اینکه اگرچه جواب‌های SA و PSO نیز با در نظر گرفتن قیود نامعین به جواب‌های درست رسیده‌اند، آن‌ها به تکرارهای به مراتب بیشتری نیاز دارند. زیرا تکرارهای ICGWO، PSO و SA به ترتیب برابر ۱۲۱، ۴۰۳ و ۱۲۲۱ می‌باشند.

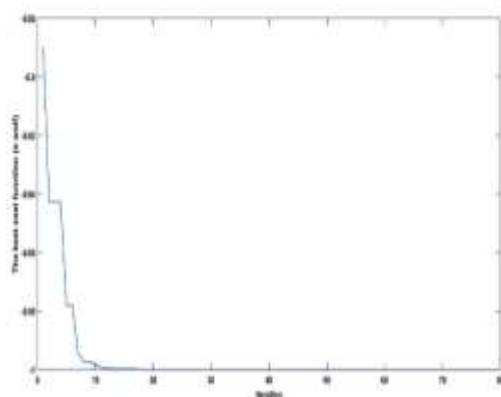
همچنین همگرایی الگوریتم ICGWO در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل ۲- تابع Easom و موقعیت کمینه‌ی جهانی



شکل ۳- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع Easom



شکل ۷- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع Drop wave

نتایج مرتبط با تابع Drop Wave که با معادله (۱۷) نشان داده شده است، در شکل‌های (۶) و (۷) و جدول ۳ داده شده‌اند.

جدول ۳- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع

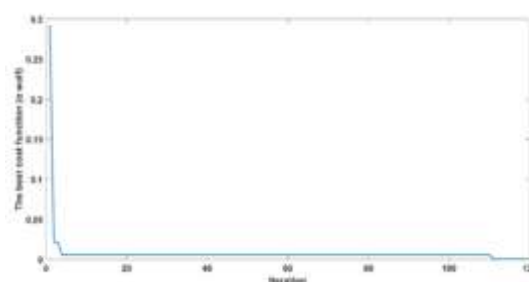
Drop Wave

Method	x_1	x_2	Cost function
Analytical solution	-226.98	98.412	0
ICGWO algorithm	-1.41×10^{-9}	9.89×10^{-11}	-1
GWO solution	-225.64	97.54	-0.0002
PSO solution	-2.41×10^{-8}	7.89×10^{-7}	-0.9999
SA solution	-1.21×10^{-8}	8.81×10^{-9}	-0.9994
True solution	0	0	-1

لازم به ذکر است در خصوص این تابع تکرارهای ICGWO ، PSO و SA به ترتیب برابر ۱۱۱، ۳۹۱ و ۱۲۰۱ می‌باشند که نشان‌دهنده‌ی این است که روش ICGWO کمترین میزان تکرار را نیاز دارد. ضمن اینکه عدم اعمال قید نامعین $|X_i| < 4$ سبب گیر کردن روش گرگ خاکستری GWO در کمینه‌ی محلی می‌شود.

$$f(x_1, x_2) = -(1 + \cos 12\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) / (2 + (x_1^2 + x_2^2) / 2) \quad (17)$$

نتایج مشابهی هم برای تابع تست Ackley با قید نامعین $|X_i| < 3$ وجود دارد که فقط به ذکر نتایج نهایی مطابق شکل‌های (۸) و (۹) و جدول ۴ بسنده می‌کنیم.

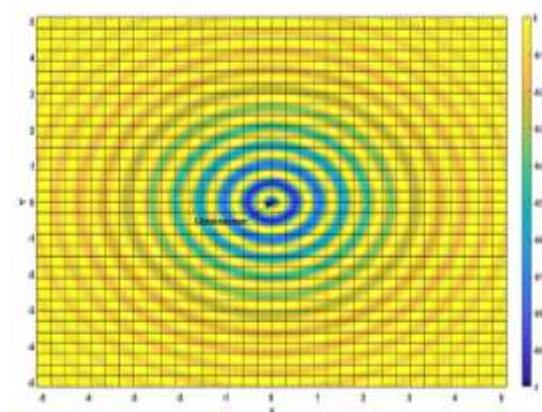
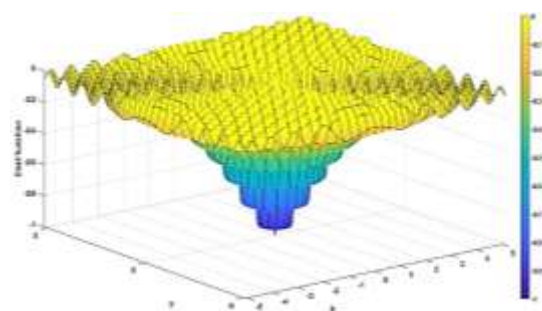


شکل ۸- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع LevyN13

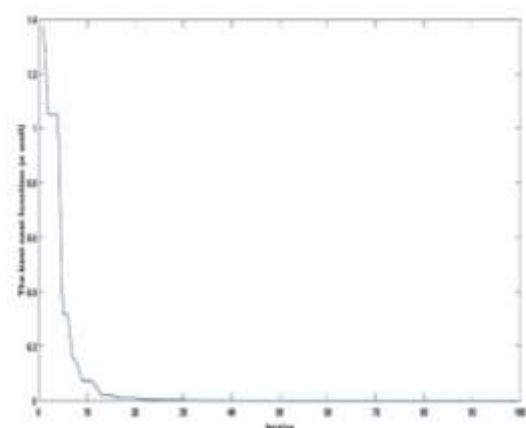
جدول ۲- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع LevyN13

Method	x_1	x_2	Cost function
Analytical solution	0.0112	0.0079	1.9809
ICGWO algorithm	0.9999	1.020	4.8×10^{-6}
GWO solution	0.0109	0.0081	1.9721
PSO solution	0.9908	1.031	5.1×10^{-4}
SA solution	0.9974	1.023	4.7×10^{-5}
True solution	1	1	0

در ادامه نتایج مربوط به دو تابع تست Drop Wave و Ackley به شکل مشابه ارائه می‌شوند.



شکل ۹- تابع Drop wave و موقعیت کمینه‌ی جهانی



شکل ۹- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع Drop wave

۴-۱- کاربرد در علوم مهندسی

یکی از مسائل غیر محدب که در بسیاری از علوم کاربردی و مهندسی از جمله مهندسی نقشه‌برداری، سنجش از دور، پردازش تصویر، ناوبری و ... استفاده شده است، مدل EIV می‌باشد [۲۳، ۲۴] که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y = (A - \underline{E}_A)x + \underline{e} \quad (19)$$

$$\text{rank}(A_{m \times n}) = n < m,$$

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \underline{e}_A \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \text{vec}(\underline{E}_A) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \right)$$

در این روابط y بردار مشاهدات دارای نویز، A ماتریس ضرائب که آن نیز مشاهده شده و دارای نویز است، $\underline{e}$ و $\underline{E}_A$ به ترتیب توصیف‌کننده خطای تصادفی این دو کمیت می‌باشند، x بردار مجهولات و σ_0^2 فاکتورس وریانس است. ضمناً Q_A و Q_y ماتریس وریانس متناظر با بردار مشاهدات و ماتریس ضرائب هستند. این مدل زمانی استفاده می‌شود که علاوه بر بردار مشاهدات، ماتریس ضرائب نیز مشاهده شده و نویزی باشد و آن را اخیراً در کاربردهای مهندسی به شکل گسترده استفاده کرده‌اند.

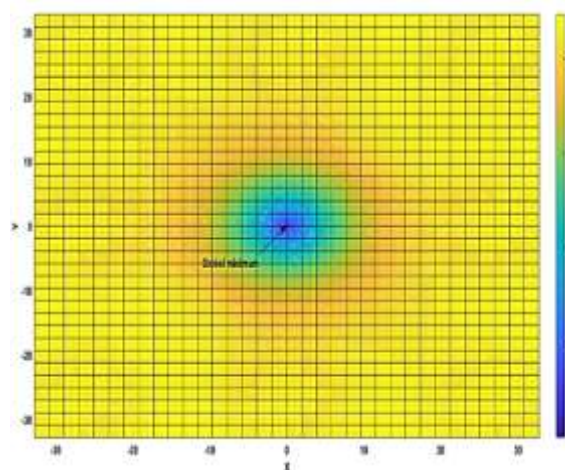
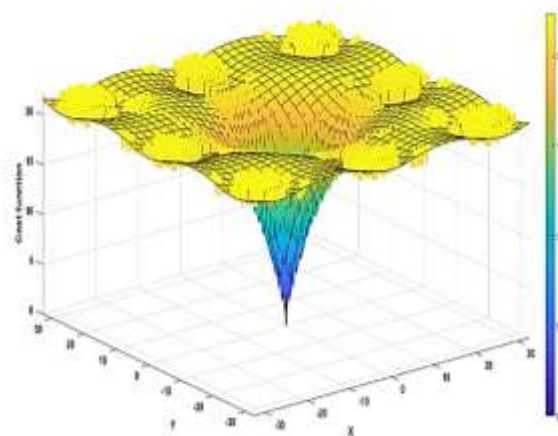
تابع هدف این مسئله، غیر محدب است که به شکل زیر بدست می‌آید [۲۵]:

$$\Phi(x) := (y - Ax)^T [Q_y + (x^T \otimes I_m) Q_A (x \otimes I_m)]^{-1} (y - Ax) \quad (20)$$

در این رابطه $\otimes$ نماد نشان دهنده ضرب کرونکر است. در این بخش، الگوریتم ICGWO را برای بازسازی سطح اعمال می‌کنیم که می‌تواند برای مسائل مختلف در علوم

جدول ۴- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع Ackley

Method	x_1	x_2	Cost function
Analytical solution	-226.99	98.50	21.71
ICGWO algorithm	-2.71×10^{-6}	1.28×10^{-5}	3.72×10^{-5}
GWO solution	-227.04	98.11	-0.0032
PSO solution	-1.21×10^{-4}	1.08×10^{-5}	4.53×10^{-4}
SA solution	-2.20×10^{-4}	6.01×10^{-5}	7.02×10^{-5}
True solution	0	0	0



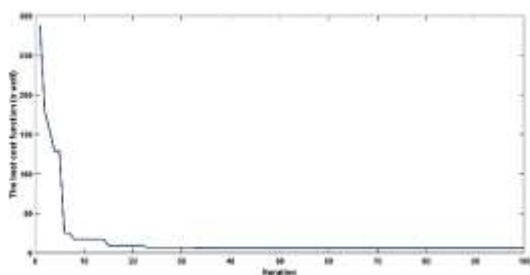
شکل ۸- تابع Ackley و موقعیت کمینه‌ی جهانی

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -20e^{\left(-0.2\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right)} \\ &- e^{\left(\frac{\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2)}{2}\right)} + e^1 + 20 \end{aligned} \quad (18)$$

همگرایی الگوریتم ICGWO در شکل (۱۱) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم ICGWO با توجه به کمترین میزان تابع هدف، حل روش تحلیلی را بهبود بخشیده است. اگرچه حل‌های PSO و SA نیز به جواب ICGWO نزدیک هستند اما کمترین تکرار برای همگرایی مربوط به تابع ICGWO است. لازم به ذکر است میزان این تکرارها برای الگوریتم‌های ICGWO، PSO و SA به ترتیب برابر ۳۵، ۱۰۸ و ۵۸۰ می‌باشد.

جدول ۵- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای مدل EIV مسئله

Method	x_1	x_2
Analytical solution	0.2748	-2.0683
ICGOW algorithm	0.3271	-1.806
PSO solution	0.3282	-1.815
SA solution	0.3279	-1.821
True solution	0.34	-1.7



شکل ۱۱- همگرایی الگوریتم ICGWO برای مدل EIV مسئله

۵- نتیجه‌گیری

حل مسائل غیرخطی و به ویژه غیر محدب از چالش برانگیزترین مسائل در علوم کاربردی و مهندسی نظیر سنجش از دور، ژئودزی و سایر علوم زمین است که ما در اینجا سعی نمودیم با یک روش محاسباتی نوین آن را حل کنیم. رویکردهای فراابتکاری مزایای زیادی نسبت به بهینه سازی تحلیلی سنتی دارند، اگرچه روش دوم هنوز برای حل بسیاری از مسائل کارآمد است. اکثر رویکردهای فراابتکاری دارای مکانیسم‌های بدون مشتق هستند که در مقایسه با روش‌های بهینه‌سازی سنتی منجر به اجتناب از قرارگیری در بهینه محلی می‌شود. با توجه به این مزایا، روش‌های مبتنی بر محاسبات تکاملی اخیراً به طور گسترده برای

زمین به ویژه برای تنظیم مشاهدات گرانشی در ژئودزی استفاده شود. به [۲۶] مراجعه شود. ضمن اینکه همانند مثال‌های قبل این حل با جواب‌های الگوریتم‌های SA، PSO و حل تحلیلی مقایسه می‌شود. مدل کلی این مسئله بدون انتقال را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

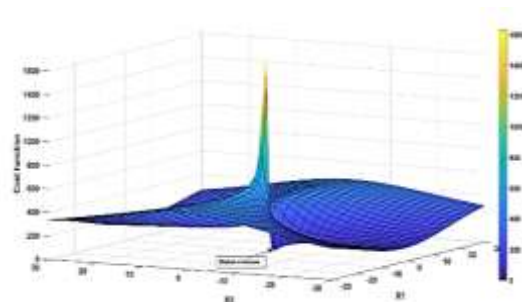
$$Z = x_1 X + x_2 Y \quad (21)$$

که در آن Y, X و Z مختصات مکانی هستند و $\xi = [x_1 \ x_2]^T$ پارامترهای مجهول هستند. مجموعه داده‌های این مسئله به شرح زیر است:

A=[-7.8432	-7.7482	y=[8.1876
19.0388	1.4793	8.9738
-19.1997	5.8180	-12.9688
-8.9301	13.3343	-22.0878
14.9508	-7.6570	20.2087
14.8738	-5.4149	8.8923
17.9294	2.9344	2.6264
14.5900	12.2604]	-9.8573]

$$Q_A = I_{16}, \quad Q_y = I_8$$

تابع هدف این مسئله در بازه‌ی $X_i \in [-30, 30]$ به ازای $\forall i = \{1, 2\}$ توسط شکل (۱۰) نشان داده شده است. قیود نامعین را می‌توان $|X_i| \leq 2$ در نظر گرفت.



شکل ۱۰- تابع هدف مدل (۱۸) برای مسئله بازسازی سطح

ما این مسئله را با الگوریتم ICGWO، PSO، SA و کمترین مربعات با قیود نامعین به عنوان راه حل تحلیلی حل کردیم. ضمناً مقادیر مربوطه برای تابع هدف را نیز بدست آوردیم. نتایج در جدول ۵ آورده شده است. همچنین

مواجهه با مسائل بهینه‌سازی قیددار به کار گرفته شده‌اند. بنابراین، در این مقاله الگوریتم گرگ خاکستری را بهبود دادیم. زیرا الگوریتم گرگ خاکستری در مقایسه با سایر روش‌های فراابتکاری عملکرد خوبی از خود نشان داده است. ما این الگوریتم را با قیود نامعین با استفاده از تکنیک اثبات شده توسط [۲۰] مجهز کردیم. مزیت اصلی روش پیشنهادی حل مسائل غیر محدب است. نمونه‌های انجام شده و توابع تست، کارایی الگوریتم پیشنهادی را تایید کردند.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم که با نقدهای سازنده سبب بهبود کیفیت مقاله شده‌اند، تشکر می‌کنیم.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که در مورد انتشار این مقاله

تعارض منافع وجود ندارد.

تاییدیه‌ی اخلاقی

نویسندگان متعهد می‌شوند که مطالب این مقاله را در هیچ مجله دیگری به چاپ نرسانده‌اند.

مشارکت‌های نویسندگان

سمیه ابراهیم زاده: نوشتن نسخه‌ی اولیه، ایده پردازی و پیاده‌سازی مقاله

وحید محبوب: ایده‌پردازی مقاله

سید کاظم علوی پناه: پیاده‌سازی و بازنگری مقاله

سارا عطارچی: بازنگری مقاله

منابع مالی

ندارد.

مراجع

- [1] Mahboub, Vahid. "L1-norm optimization of problems with arbitrary column rank by Whale method and its improved algorithm for outlier detection." *Earth Science Informatics* (2024): 1-11.
- [2] Bonabeau, Eric, Marco Dorigo, and Guy Theraulaz. *Swarm Intelligence: from Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, 1999.
- [3] Dorigo, Marco, Mauro Birattari, and Thomas Stutzle. "Ant colony optimization." *IEEE Computational Intelligence Magazine* 1, no. 4 (2006): 28-39.
- [4] Mirjalili, Seyedali, Seyed Mohammad Mirjalili, and Andrew Lewis. "Grey wolf optimizer." *Advances in Engineering Software* 69 (2014): 46-61.
- [5] Deb, Kalyanmoy, and Soumil Srivastava. "A genetic algorithm based augmented Lagrangian method for constrained optimization." *Computational Optimization and Applications* 53 (2012): 869-902.
- [6] Long, Wen, Ximing Liang, Yafei Huang, and Yixiong Chen. "An effective hybrid cuckoo search algorithm for constrained global optimization." *Neural Computing and Applications* 25 (2014): 911-926.
- [7] Brajevic, Ivona. "Crossover-based artificial bee colony algorithm for constrained optimization problems." *Neural Computing and Applications* 26 (2015): 1587-1601.
- [8] Niu, Ben, Jingwen Wang, and Hong Wang. "Bacterial-inspired algorithms for solving constrained optimization problems." *Neurocomputing* 148 (2015): 54-62.
- [9] Mahboub, Vahid. "A direct approach for L1-norm minimisation." *Survey Review* (2023): 1-5.
- [10] Mahboub, V., S. Ebrahimzadeh, A. Baghani, A. Rastegar, and M. Zanganeh. "L1-norm optimisation of rank deficient GNSS networks by an improved Grey Wolf method." *Survey Review* 56, no. 399 (2024): 582-588.
- [11] Mahboub, Vahid. "A modified grey wolf algorithm with applications to engineering." *Journal of Modeling in Engineering* 22, no. 76 (2024): 189-195.
- [12] Boyd, Stephen, and Lieven Vandenbergh. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [13] Mahboub, Vahid, and Mohammad Ali Sharifi. "On weighted total least-squares with linear and quadratic constraints." *Journal of geodesy* 87 (2013a): 279-286.
- [14] Mahboub, Vahid, and Mohammad Ali Sharifi. "Erratum to: On weighted total least-squares with linear and quadratic constraints." *Journal of Geodesy* 87 (2013b): 607-608.

- [15] Overton, Michael L. "Large-scale optimization of eigenvalues." *SIAM Journal on Optimization* 2, no. 1 (1992): 88-120.
- [16] Jarre, Florian. "Some aspects of nonlinear semidefinite programming." In *System Modeling and Optimization XX: IFIP TC7 20 th Conference on System Modeling and Optimization July 23–27, 2001, Trier, Germany 20*, pp. 55-69. Springer US, 2003.
- [17] Arrow, Kenneth Joseph, Leonid Hurwicz, Hirofumi Uzawa, Hollis Burnley Chenery, Selmer Johnson, and Samuel Karlin. *Studies in Linear and Non-Linear Programming*. Vol. 2. Stanford: Stanford University Press, 1958.
- [18] Mosheyev, Leonid, and Michael Zibulevsky. *Penalty/Barrier Multiplier Algorithm for Semidefinite Programming: Dual Bounds and Implementation*. Research Report 1, Optimization Laboratory, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion—Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1996.
- [19] Kočvara, Michal, and Michael Stingl. "On the solution of large-scale SDP problems by the modified barrier method using iterative solvers." *Mathematical Programming* 109 (2007): 413-444.
- [20] Di Pillo, Gianni, and Luigi Grippo. "A new augmented Lagrangian function for inequality constraints in nonlinear programming problems." *Journal of Optimization Theory and Applications* 36 (1982): 495-519.
- [21] Metropolis, Nicholas, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. "Equation of state calculations by fast computing machines." *The journal of chemical physics* 21, no. 6 (1953): 1087-1092.
- [22] Surjanovic, Sonja, and Derek Bingham. "Virtual library of simulation experiments: test functions and datasets." Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada, Accessed May 13 (2013): 2015.
- [23] Mahboub, Vahid, Mohammad Saadatseresht, and Alireza A. Ardalan. "A solution to dynamic errors-in-variables within system equations." *Acta Geodaetica et Geophysica* 53 (2018): 31-44.
- [24] Mahboub, Vahid, Mohammad Saadatseresht, and Alireza A. Ardalan. "On constrained integrated total Kalman filter for integrated direct geo-referencing." *Survey Review* 51, no. 364 (2019): 26-34.
- [25] Mahboub, Vahid, and Somayeh Ebrahimzadeh. "Non-linear block least-squares adjustment for a large number of observations." *Survey Review* 54, no. 387 (2022): 479-489.
- [26] Hwang, Cheinway, Cheng-Gi Wang, and Li-Hua Lee. "Adjustment of relative gravity measurements using weighted and datum-free constraints." *Computers & Geosciences* 28, no. 9 (2002): 1005-1015.