

# بهینه‌سازی گرگ خاکستری با قیود نامعین برای حل غیر محدب مسائل مهندسی

سمیه ابراهیم‌زاده<sup>۱</sup>، سید کاظم علوی‌پناه<sup>۲</sup>، سارا عطاری<sup>۳</sup>، وحید محبوب<sup>۴</sup>،<sup>۵</sup>

| اطلاعات مقاله                                                                                     | چکیده                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| دریافت مقاله:<br>پذیرش مقاله:                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>واژگان کلیدی:</b><br>مسئله‌ی غیر محدب،<br>قیود نامعین،<br>بهینه‌سازی،<br>الگوریتم گرگ خاکستری، | در این مقاله یک روش فراابتکاری بهبود یافته برای حل یک نوع از چالش برانگیزترین مسائل غیرخطی موسوم به مسائل غیرمحدب پیشنهاد شده است. در این نوع از مسائل، ما با بیش از یک کمینه روبرو هستیم که همه‌ی آن‌ها منجر به جواب صحیح نمی‌شوند. این روش مبتنی بر تجهیز الگوریتم فراابتکاری گرگ خاکستری با قیود نامعین براساس روش دیپیلو و گریپو است. اگرچه اشکال مختلفی از الگوریتم گرگ خاکستری در چند سال اخیر ارائه شده‌اند، هیچ یک از آن‌ها قیود نامعین را به شکلی که در این‌جا ارائه می‌شود، در نظر نمی‌گیرند. مزیت اصلی الگوریتم پیشنهادی در کاربردهای مهندسی، حل مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب است که در آن روش‌های تحلیلی ممکن است در کمینه محلی گیر کنند، در حالی که الگوریتم مذکور در کمینه‌ی جهانی به جواب می‌رسد. ضمناً در مقایسه‌ی با برخی روش‌های فراابتکاری شناخته شده، الگوریتم مذکور به تکرار کمتری نیاز دارد. با چهار تابع آزمون ریاضی و یک مثال ژئودتیکی، کارایی روش پیشنهادی ارزیابی می‌شود. |

## ۱-مقدمه

در علوم کاربردی و مهندسی بدست آوردن جواب بهینه حائز اهمیت می‌باشد. بهینه‌سازی به اشکال مختلف و روش‌های گوناگون می‌تواند حل شود. به شکل کلی می‌توان این مسائل را به دو دسته‌ی خطی و غیرخطی تقسیم نمود. حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی همواره یکی از چالش‌های علوم کاربردی و مهندسی بوده است. این مسائل زمانی چالشی‌تر می‌شوند که تابع هدف حاصل غیر محدب باشد. در سال‌های اخیر، تقاضای فزاینده‌ای برای درک مسئله‌ی

غیر محدب و توسعه‌ی روش‌های محاسباتی برای بهینه‌سازی توابع غیر محدب وجود دارد. به عنوان مثال یکی از مدل‌های نسبتاً نوظهور در مهندسی، مدل EIV است که در آن ماتریس ضرائب مدل تابعی نیز تصادفی می‌باشد و سبب غیر محدب شدن تابع هدف می‌شود. راجع به این مدل در قسمت مثال‌های عددی بیشتر توضیح داده می‌شود. چنین مسائلی بیش از یک اکسترمم دارند که لزوماً اکسترمم مطلق یا جهانی نیست، و مشتق دوم آن‌ها همیشه مثبت نمی‌باشد. به عبارت دیگر، برای مسائل محدب، و به ویژه برای مسائل خطی، حل‌های محلی همان حل‌های

<sup>۱</sup> دانشجوی دکترا، گروه سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استاد، گروه سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران

\* [salavipa@ut.ac.ir](mailto:salavipa@ut.ac.ir)

<sup>۳</sup> دانشیار، گروه سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران

<sup>۴</sup> استادیار، گروه تحقیقات هیدروانفورماتیک، پژوهشکده مخاطرات زیست محیطی، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

<sup>۵</sup> استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی، دانشگاه گلستان، علی آباد کتول، ایران

جهانی هستند. با این حال، این امر برای بهینه‌سازی غیر محدب صادق نیست. مسائل غیرخطی کلی، چه قیددار چه بدون قید، ممکن است دارای حل‌های محلی باشند که الزاماً حل‌های جهانی نیستند.

به طور سنتی روش‌های تحلیلی مبتنی بر مشتق به عنوان راه حلی برای مسائل بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شدند و طیف وسیعی از آن‌ها با روش‌های تحلیلی حل می‌گردیدند. با این وجود، این روش‌ها در بسیاری از موارد در حل مسائل غیر محدب نمی‌توانند به بهینه جهانی برسند. بعدها با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر، روش‌های عددی رونق بیشتری یافت. به طور خاص، در دهه‌های اخیر، روش‌های فراابتکاری به عنوان ابزاری کارآمد در حل مسائل مختلف مهندسی توسعه یافته‌اند که مزایای عمده‌ای نسبت به روش‌های سنتی دارند [۱].

سادگی، انعطاف‌پذیری، مکانیسم بدون مشتق، و اجتناب از بهینه‌ی محلی دلایلی هستند که روش‌های فراابتکاری را بسیار محبوب می‌کنند. حتی برخی از آن‌ها مانند الگوریتم ژنتیک (GA) [۲] و بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها (ACO) [۳] در بین تمام علوم کاربردی کاملاً شناخته شده هستند. آن‌ها بیشتر از مفاهیم بسیار ساده الهام گرفته‌اند. روش‌های فراابتکاری به راحتی برای مسائل مختلف قابل استفاده هستند زیرا تنها ورودی و خروجی یک سیستم برایشان مهم است. همانطور که روش فراابتکاری مسائل را به صورت تصادفی بهینه می‌کند، مشتق‌های تابع هدف و قید مورد نیاز نیستند. ضمناً عملکرد قابل اعتماد و قوی، پیاده‌سازی آسان، و احتمال کمتر به دام افتادن توسط یک حداقل محلی از دیگر مزایای روش‌های مذکور هستند [۴].

روش‌های فراابتکاری متعددی پیشنهاد شده‌اند. به عنوان مثال، [۵] یک رویکرد لاگرانژی افزوده مبتنی بر الگوریتم ژنتیک را برای مقابله با مسائل بهینه‌سازی قیددار پیشنهاد کرد که در آن از یک روش بهینه‌سازی کلاسیک برای بهبود راه‌حل الگوریتم ژنتیک به‌دست‌آمده، استفاده می‌شود. علاوه بر این، یک استراتژی موثر برای به‌روزرسانی پارامترهای حیاتی به شیوه‌ای تطبیقی بر اساس آمار

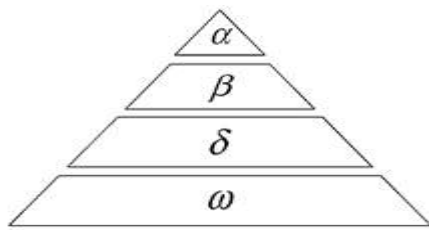
جمعیت ارائه شده است. یک الگوریتم جستجوی فاخته بر اساس روش جستجوی محلی Solis و Wets برای مسائل بهینه‌سازی جهانی قیددار توسط [۶] توسعه داده شد که بر یک تابع لاگرانژی اصلاح‌شده برای اعمال قید تکیه دارد. [۷] یک الگوریتم جدید کلنی زنبورهای مصنوعی (ABC) را برای مسائل بهینه‌سازی قیددار ارائه کرد که در آن از دو عملکرد جستجوی ABC اصلاح‌شده مختلف در فازهای بکارگیری و ناظر استفاده می‌شود، و عملکرد متقاطع در فاز جستجو به جای جستجوی تصادفی استفاده می‌شود. [۸] یک الگوریتم بهبود یافته بهینه‌سازی باکتریایی (BFO) را برای حل مسائل بهینه‌سازی قیددار ایجاد کرد.

در این مقاله، روش بهینه‌سازی گرگ خاکستری (GWO) را با قیود نامعین تجهیز می‌کنیم. GWO توسط [۴] پیشنهاد شد که از سلسله مراتب رهبری و مکانیسم شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت الهام گرفته شده بود. این روش عمده‌تاً شامل سلسله مراتب اجتماعی، احاطه بر طعمه و حمله به طعمه است. مطالعات اولیه نشان می‌دهد که الگوریتم GWO بسیار رقابتی است و می‌تواند از الگوریتم‌های مبتنی بر جمعیت موجود، مانند الگوریتم ژنتیک (GA)، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)، الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) و الگوریتم جستجوی گرانشی (GSA) بهتر عمل کند [۴].

الگوریتم گرگ خاکستری الزامات خاصی در تابع هدف ندارد. به عنوان مثال به ویژگی‌های ریاضی دقیق مسئله بهینه‌سازی بستگی ندارد. علاوه بر این، مکانیسم‌های آنها به راحتی قابل پیاده‌سازی است. مزایای دیگر این الگوریتم به همراه کاربردهای بیشتر آن در [۹، ۱۰، ۱۱] اشاره شده است.

مسائل بهینه‌سازی قیددار از مدل‌هایی ناشی می‌شوند که در آن قیود نقش اساسی دارند. این مدل با قیود نامعین را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۲]:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x), x \in R^n \\ & \text{subject to } c(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۱- سلسله مراتب گرگ‌های خاکستری

با توجه به این طبقه‌بندی، GWO شامل دو بخش محاسباتی اصلی است: ۱. احاطه کردن طعمه، ۲. حمله به طعمه. بر اساس [۳] احاطه کردن طعمه به شرح زیر است:

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A}\vec{D} \quad (2)$$

$$\vec{D} = |\vec{C}\vec{X}_p(t) - \vec{X}(t)| \quad (3)$$

$$\vec{A} = 2\vec{a}\vec{r}_1 - \vec{a} \quad (4)$$

$$\vec{C} = 2\vec{r}_2 \quad (5)$$

جایی که  $\vec{X}$  و  $\vec{X}_p$  به ترتیب بردارهای موقعیت طعمه و گرگ خاکستری را نشان می‌دهند،  $t$  نشان دهنده تکرار فعلی است،  $\vec{A}$  و  $\vec{C}$  بردارهای ضریب هستند،  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  بردارهای تصادفی در محدوده  $[0, 1]$  و اجزای بردار  $\vec{a}$  به صورت خطی از ۲ به ۰ در طول مسیر به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$a = 2 - 2 \frac{t}{\text{Max\_iter}} \quad (6)$$

که در آن  $\text{Max\_iter}$  حداکثر تکرار است. پس از یافتن موقعیت طعمه توسط گرگ‌های خاکستری که آن را محاصره می‌کنند، می‌توان چنین رفتاری را به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1\vec{X}_\alpha - \vec{X}| \quad (7)$$

$$\vec{D}_\beta = |\vec{C}_2\vec{X}_\beta - \vec{X}| \quad (8)$$

$$\vec{D}_\delta = |\vec{C}_3\vec{X}_\delta - \vec{X}| \quad (9)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1(\vec{D}_\alpha), \quad \vec{X}_2 = \vec{X}_\beta - \vec{A}_2(\vec{D}_\beta),$$

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_\delta - \vec{A}_3(\vec{D}_\delta) \quad (10)$$

$$\vec{X}(t+1) = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3} \quad (11)$$

در این جا  $\vec{X}_\alpha$ ،  $\vec{X}_\beta$  و  $\vec{X}_\delta$  به ترتیب بردارهای موقعیت گرگ های  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$  هستند،  $\vec{A}_i$  و  $\vec{C}_i$  مشابه  $\vec{A}$  و  $\vec{C}$  تولید می‌شوند.

که در آن  $f: R^n \rightarrow R$  تابع هدف است،  $c: R^n \rightarrow R^d$  نشان دهنده ی قیود نامعین است، و جایی که  $0 \leq$  به معنای نیمه معین منفی است. این مسئله از دهه ی ۱۹۹۰ به شدت مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها در بسیاری از کاربردها در کنترل خودکار، امور مالی، طراحی مهندسی و ژئودزی به وجود می‌آیند [۱۳، ۱۴]. قیود نامعین را می‌توان به روش‌های مختلف بر روی مسئله بهینه‌سازی اعمال کرد. در اوایل دهه ۱۹۹۰، روش‌های نقطه‌ی داخلی تنها راه واقعی برای حل (۱) در نظر گرفته می‌شدند، اما بعداً روش‌های دیگری از جمله بهینه‌سازی غیرهموار و مقدار ویژه [۱۵]، SDP متوالی [۱۶] و روش‌های لاگرانژی افزوده [۱۷] وارد صحنه شدند. [۱۸] چندین مدل لاگرانژی تقویت شده را مطالعه کرد و [۱۹] پلتفرم های PENNON و PENBMI را برای حل برنامه های نیمه معین خطی و دوخطی توسعه داد.

در این مقاله، ما قیود نامعین معادله (۱) را با روش لاگرانژی افزوده توسعه یافته توسط [۲۰] اعمال می‌کنیم. مزایای آن در بخش ۳ مورد بحث قرار می‌گیرد. بقیه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲ مفاهیم الگوریتم GWO مرور می‌شود، سپس روش فراابتکاری بهبود یافته مورد نظر در بخش ۳ توسعه می‌یابد. سرانجام در بخش ۴، کارایی الگوریتم پیشنهادی را با چهار تابع آزمون ریاضی و یک کاربرد مهندسی نقشه‌برداری بررسی می‌کنیم. در نهایت مقاله را در بخش ۵ جمع‌بندی می‌کنیم.

## ۲- بهینه‌سازی گرگ خاکستری

الگوریتم فراابتکاری گرگ خاکستری (GWO) توسط [۴] برای بهینه‌سازی مسائل کاربردی مختلف ارائه گردید و از سلسله مراتب رهبری و مکانیسم شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت الهام گرفته شده است. برای مشاهده ی این سلسله مراتب به شکل (۱) مراجعه شود. بهترین راه حل به عنوان  $\alpha$  که رهبر گروه گرگ‌های خاکستری است، مشخص شده است. دومین راه حل برتر به عنوان  $\beta$  مشخص می‌شود که به  $\alpha$  در تصمیم‌گیری کمک می‌کند و همچنین بهترین نامزد در صورت فوت یا پیر شدن  $\alpha$  می‌باشد. راه حل سوم با عنوان  $\delta$  و بقیه راه حل‌ها با  $\omega$  علامت گذاری می‌شوند.

### ۳- الگوریتم جدید گرگ خاکستری با قیود نامعین (ICGWO)

الگوریتم‌های فراابتکاری، تکنیک‌های بهینه‌سازی بدون قیدی هستند که به مکانیسم‌های اضافی برای مقابله با قیود هنگام حل مسائل بهینه‌سازی قیددار نیاز دارند. همانطور که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، تکنیک‌های محاسباتی تکاملی متعددی برای مسائل بهینه‌سازی قیددار توسعه داده شده‌اند. در اینجا ما قیود معادله (۱) را با روش لاگرانژی افزوده تحمیل می‌کنیم که توسط [۲۰] اثبات شد، زیرا بهینه‌سازی غیرخطی (۱) با قیود نامعین را به یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر تبدیل می‌کند که کمینه‌های بدون قید آن، برای مقدار متناهی ضریب جریمه  $1/\epsilon$ ، منجر به حل مسئله‌ی قیددار می‌شود و شرایط کوهن تاکر لازم را برای این مسئله برقرار می‌کند که بیشتر مربوط به یک نقطه کمینه از یک تابع لاگرانژی افزوده جدید است تا یک نقطه‌ی میانی در حالت کلاسیک. در نتیجه می‌توان برای حل این مسئله از تکنیک‌های کمینه‌سازی بدون قید استاندارد استفاده کرد [۲۰]. بر اساس این یافته، ما ICGWO را به دلیل برتری بهینه‌سازی گرگ خاکستری پیشنهاد می‌کنیم. [۲۰] ثابت کرد که مسئله بهینه‌سازی (۱) با قیود نامعین را می‌توان به تابع لاگرانژی افزوده زیر تبدیل کرد:

$$T(x, \lambda; \epsilon) \triangleq f(x) + (1/\epsilon)\|c(x)\|^2 + \lambda^T c(x) + \eta \|J(x) \nabla_x L(x, \lambda)\|^2 - \sum_{i=1}^d \{[\min(0, w_i(x, \lambda; \epsilon))]^2 / [\epsilon(1 + 16\epsilon\eta\lambda_i^2)]\} \quad (12)$$

که در آن  $J(x)$  ماتریس ژاکوبین قیود  $c(x)$  است،  $\epsilon$  و  $\eta$  ثابت‌های مثبت هستند.  $\nabla_x L(x, \lambda)$  و  $w_i$  توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda) &= \nabla f(x) + J^T(x) \lambda \quad (13) \\ w_i(x, \lambda; \epsilon) &\triangleq [2c_i(x) + \epsilon(\lambda_i + 8\eta\lambda_i a_i(x) \nabla_x L(x, \lambda))]/2 \quad (14) \end{aligned}$$

که در آن  $\nabla f(x)$  گرادیان  $f(x)$  و  $j_i(x)$  سطر  $i$ ام ماتریس  $J(x)$  است. بنابراین، می‌توانیم مسئله بهینه‌سازی غیرخطی را با قیود نامعین به وسیله‌ی الگوریتم ICGWO زیر حل کنیم:

مرحله ۱: توابع  $f(x)$  و  $c(x)$  را با توجه به معادله (۱) وارد کنید.

مرحله دوم: پارامترهای  $\vec{A}$ ،  $\vec{C}$ ،  $a$ ،  $\epsilon$  و  $\eta$  را مقداردهی کنید.

مرحله سوم:  $\nabla_x L(x, \lambda)$  و  $w_i$  را با معادلات (۱۳) و (۱۴) محاسبه کنید.

مرحله چهارم: تابع هدف (۱۲) را شکل دهید.

مرحله پنجم: مقدار تابع هدف هر عامل جستجو را محاسبه کنید

گام ششم: بهترین حل‌های  $\vec{X}_\alpha$ ،  $\vec{X}_\beta$  و  $\vec{X}_\delta$  را بیابید  
مرحله هفتم: موقعیت گرگ خاکستری فعلی را با معادله (۱۱) بروز کنید.

مرحله هشتم:  $\vec{A}$ ،  $\vec{C}$  و  $a$  را بروز کنید.

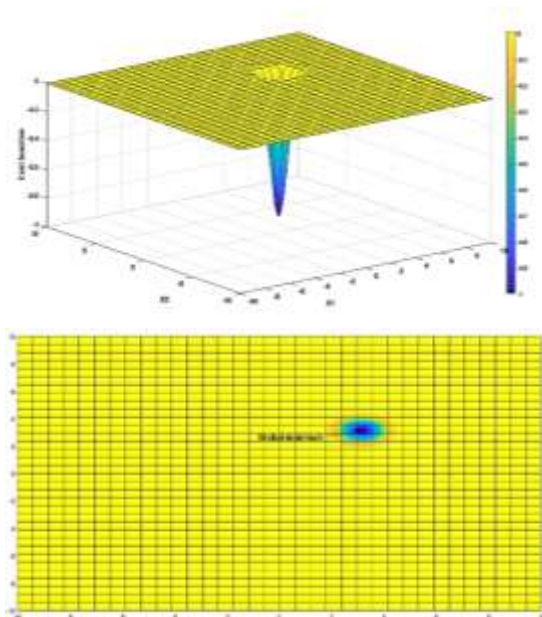
مرحله نهم: با توجه به حد دقت داده شده، مراحل ۵ تا ۸ را به صورت تکراری انجام دهید.

### ۴- مثال‌های عددی

در این بخش چهار تابع تست و یک مثال ژئودتیک را برای ارزیابی کارایی الگوریتم ICGWO انتخاب می‌کنیم. توجه داشته باشید که می‌توانیم چندین مثال عددی را برای این منظور انتخاب کنیم، اما با توجه به هدف اصلی این مقاله که بررسی الگوریتم مورد نظر در حل مسائل غیر محدب است، هر پنج مثال به‌گونه‌ای انتخاب شدند که کمینه محلی هم داشته باشند، نه لزوماً کمینه جهانی. به ویژه برخی از این نمونه‌ها دارای چندین کمینه محلی هستند. در تمام این مثال‌ها، الگوریتم ICGWO با روش تحلیلی مبتنی بر مشتق و دو روش فراابتکاری PSO و تبرید شبیه‌سازی شده (SA) [۲۱] مقایسه شده است. ضمناً جهت بررسی حساسیت قیود نامعین در حل مسئله، در حالت بدون اعمال قید نیز مثال‌ها با GWO حل می‌گردند. در همه مثال‌ها، کمینه‌ی مقدار تابع هدف، ملاک انتخاب راه حل صحیح است. همچنین لازم به ذکر است که برای نشان دادن تابع هدف سه بعدی، مسئله‌ای را انتخاب کردیم که دو مجهول دارد، در حالی که می‌توان هر مسئله غیرخطی دلخواه را با تعداد متفاوت پارامترهای مجهول در نظر گرفت.

#### ۴-۱- توابع تست

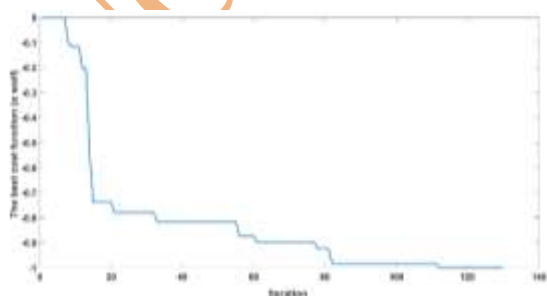
برای ارزیابی رویکردهای جدید در طراحی و تحلیل روش‌های فراابتکاری می‌توان از توابع آزمون ریاضی مختلفی استفاده کرد که به عنوان مثال در [۲۲] یافت می‌شوند. چهار تابع ریاضی انتخاب شد که ویژگی اصلی آن‌ها داشتن



شکل ۲- تابع Easom و موقعیت کمینه‌ی جهانی

جدول ۱- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع Easom

| Method              | $x_1$   | $x_2$   | Cost function            |
|---------------------|---------|---------|--------------------------|
| Analytical solution | -1.5707 | -1.5707 | $-1.18 \times 10^{-105}$ |
| ICGWO algorithm     | 3.1497  | 3.1413  | 0.963                    |
| GWO solution        | -1.5715 | -1.5716 | $-5.3 \times 10^{-11}$   |
| PSO solution        | 3.1496  | 3.1413  | 0.961                    |
| SA solution         | 3.1492  | 3.1412  | 0.958                    |
| True solution       | $\pi$   | $\pi$   | -1                       |



شکل ۳- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع Easom

تعداد زیادی کمینه‌ی محلی است و روش‌های تحلیلی مبتنی بر مشتق ممکن است در درون آن‌ها گیر کرده و آن‌ها را به اشتباه کمینه‌های جهانی در نظر بگیرند. توجه داشته باشید که به دلیل پیچیدگی این توابع تست، روش‌های شناخته شده تحلیلی برای آن‌ها قابل اجرا نیست. اولین تابع Easom است که با فرمول زیر ارائه می‌شود:

$$f(x_1, x_2) = -\cos(x_1) \cos(x_2) \exp((x_1 - \pi)^2 - (x_2 - \pi)^2) \quad (15)$$

که در آن  $x_1$  و  $x_2$  دو پارامتر مجهول هستند. این تابع چندین کمینه‌ی محلی دارد. کمینه‌ی جهانی دارای ناحیه‌ی کوچکی نسبت به فضای جستجو است و معمولاً در بازه  $X_i \in [-100, 100]$  به ازای  $i = \{1, 2\}$  ارزیابی می‌شود. شکل (۲) را ببینید. قیود نامعین را می‌توان  $0 < X_i < 5$  در نظر گرفت.

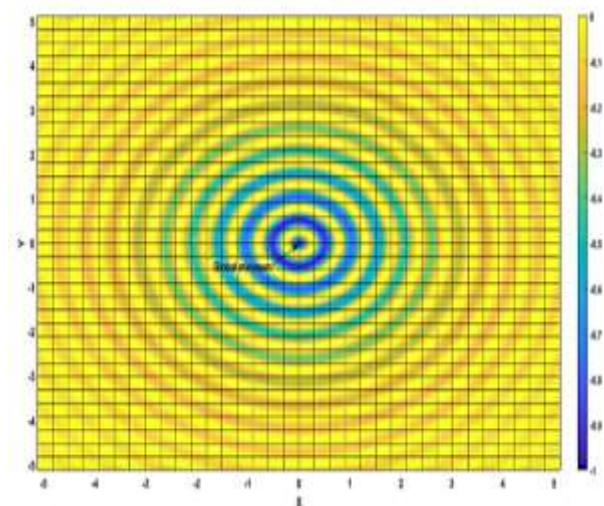
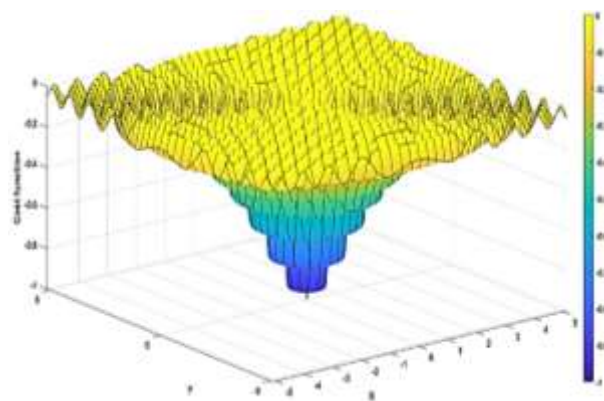
نتایج الگوریتم ICGWO، حل تحلیلی، الگوریتم‌های GWO بدون قید، PSO و SA و حل صحیح علاوه بر مقدار تابع هدف در جدول (۱) آورده شده‌اند. با توجه به این جدول می‌توان دریافت که الگوریتم ICGWO توانسته است به خوبی به کمینه‌ی جهانی نزدیک شود و روش تحلیلی در کمینه‌ی محلی گیر کرده است. ضمن اینکه در حالت بدون قید حل GWO نیز در کمینه‌ی محلی قرار گرفته است، در حالی که با اعمال قید نامعین در ICGWO این مشکل رفع شده است. نکته‌ی دیگر اینکه اگرچه جواب‌های SA و PSO نیز با در نظر گرفتن قیود نامعین به جواب‌های درست رسیده‌اند، آن‌ها به تکرارهای به مراتب بیشتری نیاز دارند. زیرا تکرارهای ICGWO، PSO و SA به ترتیب برابر ۱۲۱، ۴۰۳ و ۱۲۲۱ می‌باشند.

همچنین همگرایی الگوریتم ICGWO در شکل (۳) نشان داده شده است.

جدول ۲- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع LevyN13

| Method              | $x_1$  | $x_2$  | Cost function        |
|---------------------|--------|--------|----------------------|
| Analytical solution | 0.0112 | 0.0079 | 1.9809               |
| ICGWO algorithm     | 0.9999 | 1.020  | $4.8 \times 10^{-6}$ |
| GWO solution        | 0.0109 | 0.0081 | 1.9721               |
| PSO solution        | 0.9908 | 1.031  | $5.1 \times 10^{-4}$ |
| SA solution         | 0.9974 | 1.023  | $4.7 \times 10^{-5}$ |
| True solution       | 1      | 1      | 0                    |

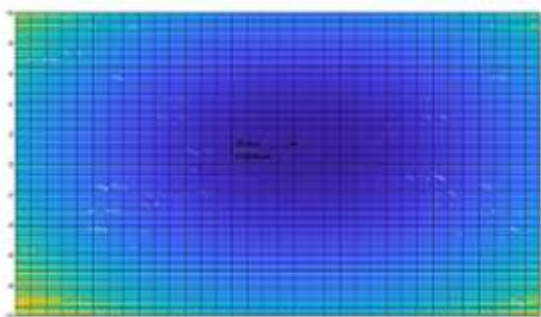
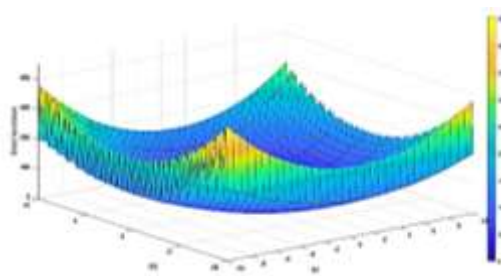
در ادامه نتایج مربوط به دو تابع تست Drop Wave و Ackley به شکل مشابه ارائه می‌شوند.



شکل 6- تابع Drop wave و موقعیت کمینه‌ی جهانی

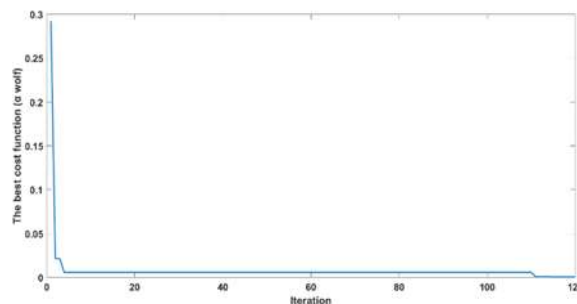
دومین تابع تست ریاضی LevyN13 است که معادله آن به همراه شکل و موقعیت کمینه‌ی جهانی به شرح زیر است. شکل (۴) را ببینید:

$$f(x_1, x_2) = \sin^2(3\pi x_1) + (x_1 - 1)^2[1 + \sin^2(3\pi x_2)] + (x_2 - 1)^2[1 + \sin^2(3\pi x_2)] \quad (۱۶)$$



شکل ۴- تابع LevyN13 و موقعیت کمینه‌ی جهانی

عملیات محاسباتی و نتایج مشابهی برای تابع LevyN13 در جدول ۲ و شکل ۵ ارائه شده است که در آن قیود نابرابری با  $0.5 < X_i < 1.5$  در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است تکرارهای ICGWO ، PSO ، SA به ترتیب برابر ۱۱۱، ۳۹۱ و ۱۲۰۱ می‌باشند.

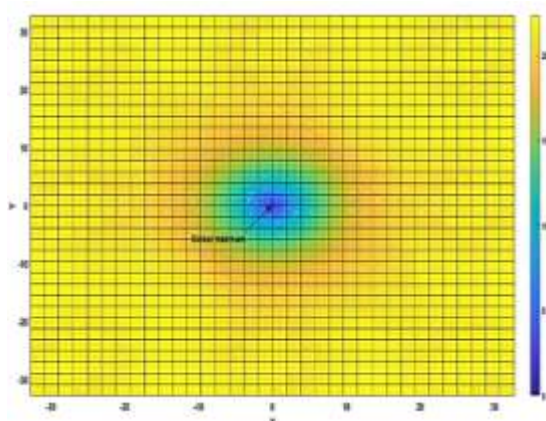
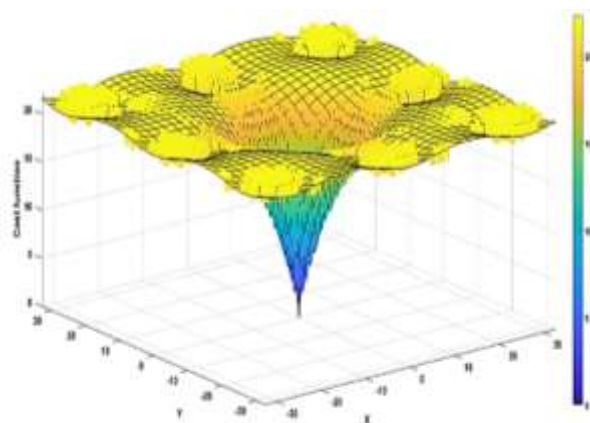


شکل ۵- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع LevyN13

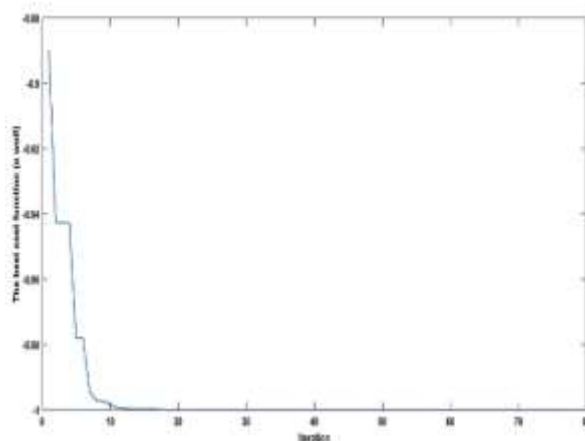
جدول ۳- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع

Drop Wave

| Method              | $x_1$                  | $x_2$                  | Cost function |
|---------------------|------------------------|------------------------|---------------|
| Analytical solution | -226.98                | 98.412                 | 0             |
| ICGWO algorithm     | $-1.41 \times 10^{-9}$ | $9.89 \times 10^{-11}$ | -1            |
| GWO solution        | -225.64                | 97.54                  | -0.0002       |
| PSO solution        | $-2.41 \times 10^{-8}$ | $7.89 \times 10^{-7}$  | -0.9999       |
| SA solution         | $-1.21 \times 10^{-8}$ | $8.81 \times 10^{-9}$  | -0.9994       |
| True solution       | 0                      | 0                      | -1            |



شکل ۸- تابع Ackley و موقعیت کمینه جهانی



شکل ۷- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع Drop wave

نتایج مرتبط با تابع Drop Wave که با معادله (۱۷) نشان داده شده است، در شکل‌های ۶ و ۷ و جدول ۳ داده شده‌اند. لازم به ذکر است در خصوص این تابع تکرارهای ICGWO، PSO و SA به ترتیب برابر ۱۱۱، ۳۹۱ و ۱۲۰۱ می‌باشند که نشان‌دهنده این است که روش ICGWO کمترین میزان تکرار را نیاز دارد. ضمن اینکه عدم اعمال قید نامعین  $|X_i| < 4$  سبب گیر کردن روش گرگ خاکستری GWO در کمینه‌ی محلی می‌شود.

$$f(x_1, x_2) = -(1 + \cos 12\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) / (2 + (x_1^2 + x_2^2)/2)$$

(۱۷)

نتایج مشابهی هم برای تابع تست Ackley با قید نامعین  $|X_i| < 3$  وجود دارد که فقط به ذکر نتایج نهایی مطابق شکل‌های ۸ و ۹ و جدول ۴ بسنده می‌کنیم.

$$f(x_1, x_2) = -20e^{\left(-0.2\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right)} - e^{\left(\frac{\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2)}{2}\right)} + e^1 + 20$$

(۱۸)

به ترتیب توصیف‌کننده خطای تصادفی این دو کمیت می- باشند، بردار مجهولات و  $\sigma_0^2$  فاکتورس وریانس است. ضمناً  $Q_A$  و  $Q_y$  ماتریس وریانس متناظر با بردار مشاهدات و ماتریس ضرائب هستند. این مدل زمانی استفاده می‌شود که علاوه بر بردار مشاهدات، ماتریس ضرائب نیز مشاهده شده و نویزی باشد و آن را اخیراً در کاربردهای مهندسی به شکل گسترده استفاده کرده‌اند.

تابع هدف این مسئله، غیر محدب است که به شکل زیر بدست می‌آید [۲۵]:

$$\Phi(x) := (y - Ax)^T [Q_y + (x^T \otimes I_m) Q_A (x \otimes I_m)]^{-1} (y - Ax) \quad (20)$$

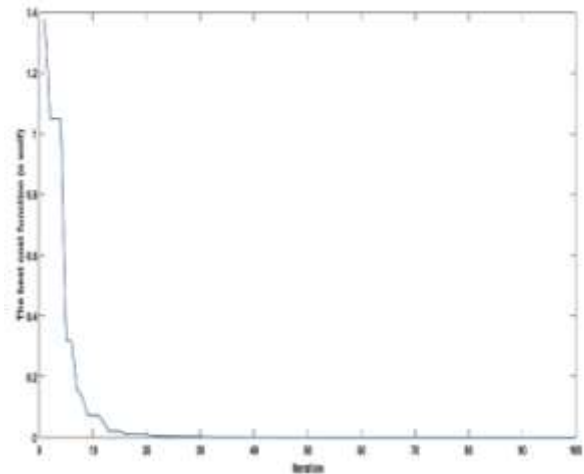
در این رابطه  $\otimes$  نماد نشان دهنده‌ی ضرب کرونکر است. در این بخش، الگوریتم ICGWO را برای بازسازی سطح اعمال می‌کنیم که می‌تواند برای مسائل مختلف در علوم زمین به ویژه برای تنظیم مشاهدات گرانشی در ژئودزی استفاده شود. به [۲۶] مراجعه شود. ضمن اینکه همانند مثال‌های قبل این حل با جواب‌های الگوریتم‌های SA، PSO و حل تحلیلی مقایسه می‌شود. مدل کلی این مسئله بدون انتقال را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$Z = x_1 X + x_2 Y \quad (21)$$

که در آن  $X, Y$  و  $Z$  مختصات مکانی هستند و  $\xi = [x_1 \ x_2]^T$  پارامترهای مجهول هستند. مجموعه داده- های این مسئله به شرح زیر است:

|                |            |               |
|----------------|------------|---------------|
| $A = [-7.8432$ | $-7.7482$  | $y = [8.1876$ |
| $19.0388$      | $1.4793$   | $8.9738$      |
| $-19.1997$     | $5.8180$   | $-12.9688$    |
| $-8.9301$      | $13.3343$  | $-22.0878$    |
| $14.9508$      | $-7.6570$  | $20.2087$     |
| $14.8738$      | $-5.4149$  | $8.8923$      |
| $17.9294$      | $2.9344$   | $2.6264$      |
| $14.5900$      | $12.2604]$ | $-9.8573]$    |

$$Q_A = I_{16}, \quad Q_y = I_8$$



شکل 9- همگرایی الگوریتم ICGWO برای تابع Drop wave

جدول ۴- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای تابع Ackley

| Method              | $x_1$                  | $x_2$                 | Cost function         |
|---------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Analytical solution | -226.99                | 98.50                 | 21.71                 |
| ICGWO algorithm     | $-2.71 \times 10^{-6}$ | $1.28 \times 10^{-5}$ | $3.72 \times 10^{-5}$ |
| GWO solution        | -227.04                | 98.11                 | -0.0032               |
| PSO solution        | $-1.21 \times 10^{-4}$ | $1.08 \times 10^{-5}$ | $4.53 \times 10^{-4}$ |
| SA solution         | $-2.20 \times 10^{-4}$ | $6.01 \times 10^{-5}$ | $7.02 \times 10^{-5}$ |
| True solution       | 0                      | 0                     | 0                     |

#### ۴-۱ کاربرد در علوم مهندسی

یکی از مسائل غیر محدب که در بسیاری از علوم کاربردی و مهندسی از جمله مهندسی نقشه‌برداری، سنجش از دور، پردازش تصویر، ناوبری و ... استفاده شده است، مدل EIV می‌باشد [۲۳، ۲۴] که به صورت زیر تعریف می‌شود:

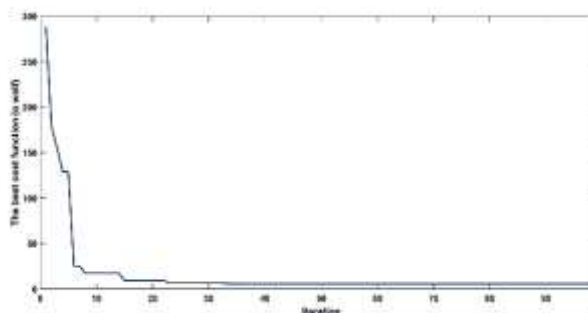
$$y = (A - \underline{E}_A)x + \underline{e} \quad (19)$$

$$\text{rank}(A_{m \times n}) = n < m,$$

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \underline{e}_A \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \text{vec}(\underline{E}_A) \end{bmatrix} \sim \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \right)$$

در این روابط  $y$  بردار مشاهدات دارای نویز،  $A$  ماتریس ضرائب که آن نیز مشاهده شده و دارای نویز است،  $\underline{e}$  و  $\underline{E}_A$

|               |      |      |
|---------------|------|------|
| True solution | 0.34 | -1.7 |
|---------------|------|------|

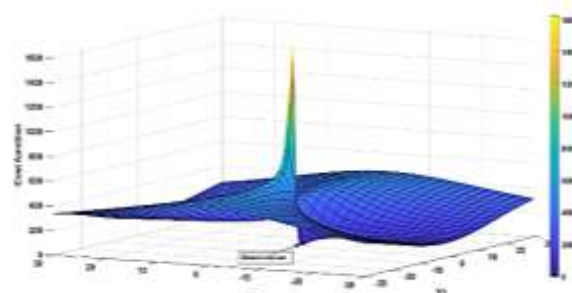


شکل ۱۱- همگرایی الگوریتم ICGWO برای مدل EIV مسئله

## ۵- نتیجه‌گیری

حل مسائل غیرخطی و به ویژه غیر محدب از چالش برانگیزترین مسائل در علوم کاربردی و مهندسی نظیر سنجش از دور، ژئودزی و سایر علوم زمین است که ما در اینجا سعی نمودیم با یک روش محاسباتی نوین آن را حل کنیم. رویکردهای فراابتکاری مزایای زیادی نسبت به بهینه سازی تحلیلی سنتی دارند، اگرچه روش دوم هنوز برای حل بسیاری از مسائل کارآمد است. اکثر رویکردهای فراابتکاری دارای مکانیسم‌های بدون مشتق هستند که در مقایسه با روش‌های بهینه‌سازی سنتی منجر به اجتناب از قرارگیری در بهینه محلی می‌شود. با توجه به این مزایا، روش‌های مبتنی بر محاسبات تکاملی اخیراً به طور گسترده برای مواجهه با مسائل بهینه‌سازی قیددار به کار گرفته شده‌اند. بنابراین، در این مقاله الگوریتم گرگ خاکستری را بهبود دادیم. زیرا الگوریتم گرگ خاکستری در مقایسه با سایر روش‌های فراابتکاری عملکرد خوبی از خود نشان داده است. ما این الگوریتم را با قیود نامعین با استفاده از تکنیک اثبات شده توسط [۲۰] مجهز کردیم. مزیت اصلی روش پیشنهادی حل مسائل غیر محدب است. نمونه‌های انجام شده و توابع تست، کارایی الگوریتم پیشنهادی را تایید کردند.

تابع هدف این مسئله در بازه‌ی  $X_i \in [-30, 30]$  به ازای  $\forall i = \{1, 2\}$  توسط شکل (۱۰) نشان داده شده است. قیود نامعین را می‌توان  $|X_i| \leq 2$  در نظر گرفت.



شکل ۱۰- تابع هدف مدل (۱۸) برای مسئله بازسازی سطح

ما این مسئله را با الگوریتم ICGWO, PSO, SA و کمترین مربعات با قیود نامعین به عنوان راه حل تحلیلی حل کردیم. ضمناً مقادیر مربوطه برای تابع هدف را نیز بدست آوردیم. نتایج در جدول (۵) آورده شده است. همچنین همگرایی الگوریتم ICGWO در شکل (۱۱) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم ICGWO با توجه به کمترین میزان تابع هدف، حل روش تحلیلی را بهبود بخشیده است. اگرچه حل‌های PSO و SA نیز به جواب ICGWO نزدیک هستند اما کمترین تکرار برای همگرایی مربوط به تابع ICGWO است. لازم به ذکر است میزان این تکرارها برای الگوریتم‌های ICGWO, PSO و SA به ترتیب برابر ۳۵، ۱۰۸ و ۵۸۰ می‌باشد.

جدول ۵- مجهولات برآورد شده با روش‌های مختلف برای مدل EIV مسئله

| Method              | $x_1$  | $x_2$   |
|---------------------|--------|---------|
| Analytical solution | 0.2748 | -2.0683 |
| ICGOW algorithm     | 0.3271 | -1.806  |
| PSO solution        | 0.3282 | -1.815  |
| SA solution         | 0.3279 | -1.821  |

- [1] Mahboub, Vahid. "L1-norm optimization of problems with arbitrary column rank by Whale method and its improved algorithm for outlier detection." *Earth Science Informatics* (2024): 1-11.
- [۲] Bonabeau, Eric, Marco Dorigo, and Guy Theraulaz. *Swarm intelligence: from natural to artificial systems*. Oxford university press, 1999.
- [۳] Dorigo, Marco, Mauro Birattari, and Thomas Stutzle. "Ant colony optimization." *IEEE computational intelligence magazine* 1, no. 4 (2006): 28-39.
- [۴] Mirjalili, Seyedali, Seyed Mohammad Mirjalili, and Andrew Lewis. "Grey wolf optimizer." *Advances in engineering software* 69 (2014): 46-61.
- [۵] Deb, Kalyanmoy, and Soumil Srivastava. "A genetic algorithm based augmented Lagrangian method for constrained optimization." *Computational optimization and Applications* 53 (2012): 869-902.
- [۶] Long, Wen, Ximing Liang, Yafei Huang, and Yixiong Chen. "An effective hybrid cuckoo search algorithm for constrained global optimization." *Neural Computing and Applications* 25 (2014): 911-926.
- [۷] Brajevic, Ivona. "Crossover-based artificial bee colony algorithm for constrained optimization problems." *Neural Computing and Applications* 26 (2015): 1587-1601.
- [۸] Niu, Ben, Jingwen Wang, and Hong Wang. "Bacterial-inspired algorithms for solving constrained optimization problems." *Neurocomputing* 148 (2015): 54-62.
- [۹] Mahboub, Vahid. "A direct approach for L1-norm minimisation." *Survey review* (2023): 1-5.
- [۱۰] Mahboub, V., S. Ebrahimzadeh, A. Baghani, A. Rastegar, and M. Zanganeh. "L1-norm optimisation of rank deficient GNSS networks by an improved Grey Wolf method." *Survey Review* (2024): 1-7.
- [1۱] Mahboub, Vahid. "A modified grey wolf algorithm with applications to engineering." *Journal of Modeling in Engineering* 22, no. 76 (2024): 189-195.
- [1۲] Boyd, Stephen, and Lieven Vandenbergh. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [1۳] Mahboub, Vahid, and Mohammad Ali Sharifi. "On weighted total least-squares with linear and quadratic constraints." *Journal of geodesy* 87 (2013a): 279-286.
- [1۴] Mahboub, Vahid, and Mohammad Ali Sharifi. "Erratum to: On weighted total least-squares with linear and quadratic constraints." *Journal of geodesy* 87 (2013b): 607-608.
- [1۵] Overton, Michael L. "Large-scale optimization of eigenvalues." *SIAM Journal on Optimization* 2, no. 1 (1992): 88-120.
- [1۶] Jarre, Florian. "Some aspects of nonlinear semidefinite programming." In *System Modeling and Optimization XX: IFIP TC7 20 th Conference on System Modeling and Optimization July 23–27, 2001, Trier, Germany* 20, pp. 55-69. Springer US, 2003.

- [1<sup>Y</sup>] Arrow, Kenneth Joseph, Leonid Hurwicz, Hirofumi Uzawa, Hollis Burnley Chenery, Selmer Johnson, and Samuel Karlin. *Studies in linear and non-linear programming*. Vol. 2. Stanford: Stanford University Press, 1958.
- [1<sup>^</sup>] Mosheyev, Leonid, and Michael Zibulevsky. *Penalty/Barrier Multiplier Algorithm for Semidefinite Programming: Dual Bounds and Implementation*. Research Report 1, Optimization Laboratory, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion—Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1996.
- [1<sup>9</sup>] Kočvara, Michal, and Michael Stingl. "On the solution of large-scale SDP problems by the modified barrier method using iterative solvers." *Mathematical Programming* 109 (2007): 413-444.
- [Y<sup>0</sup>] Di Pillo, Gianni, and Luigi Grippo. "A new augmented Lagrangian function for inequality constraints in nonlinear programming problems." *Journal of Optimization Theory and Applications* 36 (1982): 495-519.
- [21] Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH, Teller E (1953) Equation of state calculations by fast computing machines. *J Chem Phys* 21(6):1087–1092
- [22] Surjanovic, Sonja, and Derek Bingham. "Virtual library of simulation experiments: test functions and datasets." *Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada, accessed May 13 (2013)*: 2015.
- [23] Mahboub, Vahid, Mohammad Saadatseresht, and Alireza A. Ardalan. "A solution to dynamic errors-in-variables within system equations." *Acta geodaetica et geophysica* 53 (2018): 31-44.
- [24] Mahboub, Vahid, Mohammad Saadatseresht, and Alireza A. Ardalan. "On constrained integrated total Kalman filter for integrated direct geo-referencing." *Survey review* 51, no. 364 (2019): 26-34.
- [25] Mahboub, V., & Ebrahimzadeh, S. (2022). Non-linear block least-squares adjustment for a large number of observations. *Survey Review*, 54(387), 479-489.
- [26] Hwang, Cheinway, Cheng-Gi Wang, and Li-Hua Lee. "Adjustment of relative gravity measurements using weighted and datum-free constraints." *Computers & Geosciences* 28, no. 9 (2002): 1005-1015.

## Grey wolf optimization with inequality constraints for non-convex optimization with application to engineering science

**Somayeh Ebrahimzadeh<sup>1</sup>, Seyed Kazem Alavipanah<sup>2\*</sup>, Sara Attarchi<sup>3</sup>, Vahid Mahboub<sup>4,5</sup>**

1. Department of Remote Sensing and GIS, Faculty of Geography, University of Tehran, Tehran, Iran
2. Department of Remote Sensing and GIS, Faculty of Geography, University of Tehran, Tehran, Iran
3. Department of Remote Sensing and GIS, Faculty of Geography, University of Tehran, Tehran, Iran
4. Hydroinformatic Research Group, Environmental Hazard Research Institute, Golestan University, Gorgan, Iran
5. Department of Surveying Engineering, Faculty of Engineering, Golestan University, Aliabad Katoul, Iran

\*Corresponding Author

---

**ARTICLE INFO**

---

Keywords:

Non-convex problem,  
Optimization,  
Inequality constraints,  
GWO,

---

**ABSTRACT**

---

Here, an improved meta-heuristic method is proposed to solve one of the most challenging nonlinear problems known as non-convex problems. In this type of problem, we are faced with more than one minimum, all of which do not lead to the correct solution. This method is based on equipping the grey wolf meta-heuristic algorithm with inequality constraints. Although various forms of the grey wolf algorithm have been proposed in the last few years, none of them included inequality constraints, especially in the form presented here. The main advantage of the proposed algorithm in engineering applications is solving non-convex optimization problems where analytical methods may get stuck in a local minimum, while the aforementioned algorithm is located in a global minimum. With two mathematical test functions and one geodetic example, the efficiency of the proposed approach is evaluated.

---